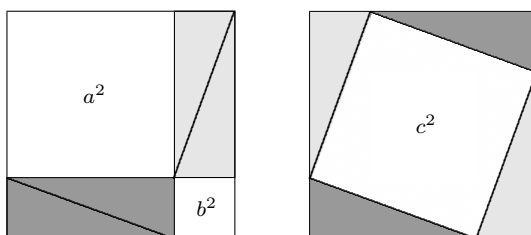
Lições

de

Matemática Básica

$a^2 + b^2 = c^2$

Sebastião (SAPONGA) Firmo

2014

Prefácio

Este livro foi escrito com o objetivo de revisar alguns tópicos de matemática estudados no Ensino Médio. O material apresentado está organizado em *Lições*. Em cada Lição o texto compreende uma parte inicial onde são apresentados de forma concisa, conceitos e resultados, os quais sempre aparecem acompanhados de vários exemplos. Após esta apresentação, damos início a seção de *Exercícios Resolvidos* que constitui a essência deste livro. Finalizamos cada Lição com uma lista de *Exercícios Propostos*, muitos dos quais guardam semelhança com aqueles já resolvidos. No final do livro apresentamos as respostas ou soluções desses exercícios.

Apesar de tratar-se de um texto com tópicos do Ensino Médio a abordagem desses tópicos procura ir um pouco além de uma simples abordagem a nível de Ensino Médio. Tivemos a preocupação de interrelacionar os diversos temas abordados e sempre que possível, procurando destacar seus aspectos geométricos ou intuitivos. Além disso, procuramos ser informais sem perder, no entanto, a exatidão matemática.

Nos temas desenvolvidos e nos exercícios resolvidos e propostos, buscamos lapidar no aluno uma postura de questionamentos constantes e o interesse por vizualizações geométricas de conceitos e fatos quando isso é natural. O autor entende que mesmo não tendo assimilado com desenvoltura esses conceitos no Ensino Médio o aluno adquiriu maturidade, o que lhe deve permitir absorver uma abordagem um pouco mais rica dos tópicos selecionados.

Em muitas Lições usamos conceitos e resultados, na suas formas as mais elementares, para em Lições posteriores desenvolvermos tais assuntos com mais profundidade.

Outra preocupação foi a de abordar vários tópicos tratados no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) com o objetivo de oferecer um texto que ajude o professor do Ensino Médio na preparação de suas aulas.

Num próximo volume, voltaremos a abordar outros tópicos da matemática básica com os mesmos objetivos.

Rio de Janeiro, fevereiro de 2014
O autor

Conversa ao pé do ouvido

Aprender matemática não costuma ser uma tarefa fácil para a grande maioria dos mortais e quando tentamos aprendê-la, precisamos saber como fazê-lo. Primeiramente, precisamos querer desvendar o mistério que temos diante de nós e depois, se não temos, precisamos adquirir uma postura de quem, sistematicamente, está questionando o que vê e o que não vê.

Por exemplo, quando você tenta entender uma definição (ou uma regra, um teorema, uma técnica, etc) você precisa, depois de lê-la com muita atenção, construir ou dar exemplos de objetos que satisfazem a tal definição; mais do que isso, também precisa construir ou dar exemplos de objetos que não satisfazem a definição estudada. Isso feito, você começou a entender a definição.

Quando estudamos matemática não devemos perder as oportunidades de criar alguma coisa, por mais elementar que ela seja: isso está por trás das linhas do que foi dito sobre a postura com relação a uma definição (ou uma regra, um teorema, uma técnica, etc). Outro exemplo é o seguinte: quando tentamos resolver um exercício e não conseguimos, talvez, antes de abandoná-lo seria mais interessante tentar resolver um caso particular do que é pedido. Não quer dizer que resolvido o caso particular você vai conseguir resolver o problema. Mas também não é garantido que você não possa enxergar a solução do caso geral, estudando um caso particular ! E essa estratégia de abordagem do problema pode ser, em alguns casos, algo mágico.

Tentar resolver exercícios é uma atitude fundamental quando se quer aprender matemática. Eles são como um doce de festa, uma fonte onde se escondem diversas perguntas e é preciso saber degustá-los, descobrí-las, redescobrí-las sobre outras formas ! Quando você termina de resolver um exercício, a festa não terminou ai, entrou na segunda fase: existem algumas perguntas importantes que você precisa se sentir na obrigação moral de colocá-las com uma certa frequência. Será que essa solução não é muito complicada para o problema que tenho em mãos ? Além disso, resolvido um problema precisamos pensar nele com mais atenção para saber se ele nos fornece um resultado interessante que devemos incorporar ao nosso conhecimento. Mas, um problema resolvido também nos fornece a chance de vários outros questionamentos: usamos todas as hipóteses? o resultado não parece estar em contradição com alguma coisa já conhecida ? podemos generalizar o resultado obtido ? podemos recolocar esse problema num outro contexto ? ou seja, somos capazer de criar outros exercícios, a partir deste, e resolvê-los ?

São com pequenos questionamentos no início que vamos evoluir para questões mais sofisticadas, que vamos construir nosso amadurecimento, moldar nossa intuição e quem sabe no futuro, ser capaz de colocar um importante problema e quem sabe ainda, resolvê-lo !!

Rio de Janeiro, fevereiro de 2014
O autor

Conteúdo

1

Conjuntos

O que é um *conjunto* ?
É qualquer coleção de objetos.

- A coleção formada pelos *algarismos* *0* , *3* , *5* , *9* ;
- A coleção dos *planetas do nosso sistema solar* ;
- A coleção dos *livros da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro* ;
- A coleção formada pelos *números reais.*

Nesses exemplos os objetos que compõem os conjuntos estão escritos em itálico. Eles também são ditos *elementos* do conjunto.

Quando respondemos a pergunta acima dizendo que um conjunto é qualquer coleção de objetos nós não estamos definindo o que é um conjunto, nem o que é um elemento desse conjunto. Nós apenas apresentamos sinônimos para essas palavras: coleção e objeto, respectivamente. Sinônimos que nos são mais familiares, que fazem parte do nosso cotidiano. As noções de conjunto e de elemento de um conjunto são *primitivas*. Não as definimos em matemática.

1 Pertinência

Dados um objeto b e um conjunto A escrevemos:

$b \in A$ (lê-se: b *pertence* a A)

para indicar que o objeto b é elemento do conjunto A.

$b \notin A$ (lê-se: b *não pertence* a A)

para indicar que o objeto b não é elemento do conjunto A.

A barra inclinada "/" colocada sobre um símbolo matemático, regra geral, tem como objetivo negar o que o símbolo significa. Isso será feito com freqüência ao longo deste texto.

Exemplos

❄ Seja A o conjunto formado pelos números -4 ; 2 ; π e 5. Temos que:
$-4 \in A$; $2 \in A$; $3 \notin A$; $5 \in A$; $\pi \in A$; $0 \notin A$.

❄ Seja B o conjunto dos números ímpares. Então:
$2 \notin B$; $7 \in B$; $3 \in B$; $-2 \notin B$; $-8 \notin B$; $-5 \in B$.

2 Como descrever conjuntos

Conjuntos são formados por elementos, por isso, para *descrever* um conjunto precisamos declarar com precisão quais são os seus elementos. Faremos isso de duas maneiras:

1. *Listando entre chaves todos os elementos do conjunto*:

$$A = \{1\,,\,2\,,\,-3\,,\,5\,,\,8\,,\,7\,,\,-11\,,\,10\} \quad ; \quad B = \{\,a\,,\,e\,,\,i\,,\,o\,,\,u\,\}.$$

2. *Dando propriedades que caracterizam os elementos do conjunto*:

C é o conjunto dos *países da América do Sul* ;

D é o conjunto dos *números inteiros positivos.*

A propriedade $\mathcal{P}$ que caracteriza os elementos do conjunto C é:

$\mathcal{P}$: *ser país da América do Sul.*

Assim, $x \in C$ é o mesmo que

x *é país da América do Sul.*

A propriedade $\mathcal{P}$ que caracteriza os elementos do conjunto D é:

$\mathcal{P}$: *ser número inteiro e positivo.*

Logo, $x \in D$ é o mesmo que

x *é número inteiro e positivo.*

Nesse caso, usaremos a notação

$$\{\,x\ ;\ x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\,\}$$

lida como: conjunto dos x *tais que*[1] x tem a propriedade $\mathcal{P}$.

[1]Usamos ";" com o significado de *tal que*. Com o mesmo significado, também são usados "|" e ":".

Fazendo uso desta notação, podemos escrevemos:

$C = \{\, x \ ; \ x \ \textit{ é país da América do Sul} \,\}$; $D = \{\, x \ ; \ x \ \textit{ é número inteiro e positivo} \,\}$.

Exemplos

❄ Se X é o conjunto formado pelas *soluções da equação* $x^2(x-1)=0$ então podemos escrever:
$X = \{x \ ; \ x^2(x-1)=0\}$.

❄ Se X é o conjunto dos *números inteiros maiores do que* 1 *e menores do que* 9 podemos escrever:
$X = \{x \ ; \ x \textit{ é número inteiro maior do que } 1 \textit{ e menor do que } 9\}$ ou $X = \{2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,\}$.

3 Igualdade

Definição. Dois conjuntos são *iguais* quando têm exatamente os mesmos elementos.

Quando A e B são iguais escrevemos $A = B$. Caso contrário, escrevemos $A \neq B$.

Exemplos

❄ Sejam $A = \{\,0\,,-1\,,2\,,6\,,-3\,,4\,,3\}$ e $B = \{\,3\,,2\,,6\,,-1\,,4\,,0\,,-3\,,3\,\}$.
Os elementos dos conjuntos A e B estão listados em ordem diferente. Além disso, o elemento 3 foi listado duas vezes no conjunto B. No entanto, *de acordo com a definição de igualdade* esses conjuntos são iguais, pois têm exatamente os mesmos elementos, a saber: -3 , -1 , 0 , 2 , 3 , 4 e 6.

❄ Sejam A o conjunto dos *números ímpares maiores do que 1* e B o conjunto dos *números ímpares maiores ou iguais a 7*. Os conjuntos A e B não são iguais porque não possuem exatamente os mesmos elementos. De fato, $5 \in A$ porém $5 \notin B$. Portanto, $A \neq B$.

4 Conjuntos especiais

4.1 Conjunto universo

Considere o seguinte conjunto: $\{\, x \ ; \ x > 0\,\}$. Note que esse conjunto não está descrito de modo claro. Afinal de contas, de quais números maiores do que zero estamos falando?

– Dos números *pares* maiores do que zero?

– Dos números *racionais* maiores do que zero?

– Dos números *inteiros* maiores do que zero?

– Ou dos números *reais* maiores do que zero?

Para descrever o conjunto $\{\, x \ ; \ x > 0 \,\}$, sem ambiguidade, precisamos dizer onde vamos procurar os elementos x que são maiores do que zero.

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathcal{P}$ dos números pares, escrevemos:

$$\{x \in \mathcal{P} \ ; \ x > 0\}.$$

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, escreveremos:

$$\{x \in \mathbb{Q} \ ; \ x > 0\}.$$

- Se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, devemos escrever:

$$\{x \in \mathbb{Z} \ ; \ x > 0\}.$$

- E se vamos procurá-los no conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, será necessário escrever:

$$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0\}.$$

Agora sim, temos conjuntos descritos sem ambiguidade, pois dissemos em cada um deles onde vamos procurar os elementos que são maiores do que zero.

Mais geralmente, seja $\mathcal{U}$ um conjunto qualquer. O conjunto formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que têm a propriedade $\mathcal{P}$ será escrito na forma

$$\{x \in \mathcal{U} \ ; \ x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$$

e o conjunto $\mathcal{U}$ será dito um *conjunto universo*.

Nos exemplos acima os conjuntos universo são, respectivamente: $\mathcal{P}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Algumas vezes descreveremos conjuntos sem explicitar o conjunto universo de onde os seus elementos foram retirados mas, isso só será feito quando não houver ambiguidade na descrição do conjunto. Isso quer dizer que em algum momento da discussão o conjunto universo foi, ou será, informalmente fixado.

4.2 Conjunto vazio

O conjunto que não tem elementos é chamado *conjunto vazio* e é denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$. Por exemplo, o conjunto formado pelos *países que ganharam 7 vezes a Copa do Mundo de Futebol* é o conjunto vazio.

O conjunto vazio pode ser descrito através de propriedades que se contradizem. Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \neq x\} = \emptyset \qquad ; \qquad \{x \in \mathbb{Z} \ ; \ x > 0 \ \text{ e } \ x < 1\} = \emptyset.$$

4.3 Conjunto unitário

Os *conjuntos unitários* são aqueles formados por *um único elemento*. O conjunto dos *países que ganharam 5 vezes a Copa do Mundo de Futebol* é um conjunto unitário pois seu único elemento é o Brasil.

Exemplos

- Conjuntos unitários:

  $\{0\}$; $\{10\}$; $\{-4\}$; $\{-2\,,-2\}$; $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^3 = 1\}$; $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ 2 < n < 4\}$.

- Conjuntos não unitários:

  $\{2\,,-2\}$; $\{-1\,,2\,,3\}$; $\emptyset$; $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 = 1\}$; $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ 2 \leq n < 4\}$.

  Cada um dos conjuntos no exemplo acima possui mais do que um elemento, salvo o conjunto vazio que não possui elementos.

5 Conjuntos finitos

Os conjuntos

$$\underbrace{\{5\}}_{\text{1 elemento}} \quad ; \quad \underbrace{\{-1\,,0\,,2\}}_{\text{3 elementos}} \quad ; \quad \underbrace{\{3\,,2\,,0\,,-1\}}_{\text{4 elementos}} \quad ; \quad \underbrace{\{1\,,2\,,-1\,,4\,,15\,,-3\,,9\}}_{\text{7 elementos}}$$

têm uma importante propriedade em comum: podemos *contar* todos os seus elementos, *do primeiro, ao último*. Dizemos que tais conjuntos são *finitos*. Mais precisamente: um conjunto é *finito* quando podemos contar *todos* os seus elementos, *iniciando* a contagem em 1 (aliás, como sempre fazemos quando contamos objetos) e *terminando* a contagem em algum inteiro positivo n. Nesse caso, dizemos que o conjunto é um *conjunto finito com* n *elementos* ou, simplesmente, que o *conjunto tem* n *elementos*.

Evidentemente, devemos contar cada elemento *uma única vez*, para poder afirmar que n é o número exato de elementos do conjunto. O número de elementos de um conjunto finito A é denotado por $\#(A)$.

Exemplos

- $A = \{3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\}$ é um conjunto finito com 7 elementos e escrevemos $\#(A) = 7$.
- $B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq 0 \text{ e } x \leq 10\}$ é um conjunto finito com 11 elementos. Assim, $\#(B) = 11$.
- O conjunto de todas as estrelas do Universo em que vivemos é um conjunto com uma quantidade muito grande de elementos mas é *finito*, segundo os cientistas.

Observe que o conjunto vazio não se enquadra na noção de conjunto finito que acabamos de apresentar, pois ele *não tem elementos a serem contados*. No entanto, convencionamos que o *conjunto vazio é finito* e tem *zero elementos*.

Quando um conjunto A não é finito ele é dito um *conjunto infinito* ou um *conjunto com uma infinidade de elementos*. Nesse caso, escrevemos que $\#(A) = \infty$. Escrevemos $\#(A) < \infty$ para indicar que A é um conjunto finito.

Para finalizar, chamamos sua atenção para um fato importante: quando contamos os elementos de um conjunto finito, o resultado final da contagem independe da ordem em que os elementos do conjunto foram contados. Dito informalmente: *independe de quem os contou*. Esse é um resultado a ser demonstrado, mas não o faremos aqui.

De posse dos pré-requisitos necessários, não é difícil mostrar que a união, a interseção, o produto cartesiano e a diferença (conceitos que relembraremos mais adiante) de dois conjuntos finitos, são conjuntos finitos. Também não é difícil mostrar e tampouco foge da nossa intuição matemática, que *todo conjunto contido num conjunto finito é finito*; que *todo conjunto que contém um conjunto infinito é também um conjunto infinito*.

Você encontrará uma definição formal de conjunto finito e as propriedades aqui citadas, nas referência [5, 6].

Exemplos de conjuntos infinitos

- Conjunto dos números pares;
- Conjunto dos múltiplos positivos de 5;
- Conjunto dos números ímpares que são maiores do que 223;
- Conjunto dos números da forma $\frac{1}{n}$ onde n é um inteiro positivo;
- Conjunto dos números da forma $n\sqrt{2}$ onde n é um inteiro negativo.

Veja como demonstrar que o conjunto dos números pares não é finito no exercício 6 da página 17. Não será difícil adaptar aquela prova para mostrar que os conjuntos da lista acima são, de fato, conjuntos infinitos.

6 A notação "..."

Usamos a notação "..." no papel da expressão *e assim por diante*, que pressupõe: *o leitor sabe como prosseguir*. Por exemplo, escrevemos que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

para indicar que depois do 4 vem 5, depois 6, 7 e assim por diante; que antes do -4 vem -5, -6 e assim por diante. Escrevemos que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é o

conjunto $\mathbb{N} = \{1\,,2\,,3\,,4\,,\ldots\}$. Também escrevemos $\{-12\,,\,-10\,,\,-8\,,\,\ldots\,,\,206\,,\,208\,,\,210\}$ para evitar de escrever todos os números pares de -12 à 210 .

Exemplos

❄ Para indicar que n assume todos os valores inteiros não negativos, escrevemos, por exemplo,

$$n \in \{0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots\} \quad \text{ou então} \quad n = 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots$$

❄ Para indicar que m assume todos os valores inteiros, podemos escrever: $m = 0\,,\pm1\,,\pm2\,,\ldots$

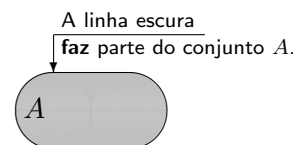
❄ A lista $1\,,\,5\,,\,5^2\,,\,5^4\,,\,5^6\,,\,5^8\,,\ldots\,,5^k$ possui 121 elementos. Qual o valor do inteiro k ?

Vejamos: a descrição a seguir, lista os 121 elementos acima referidos

$$1\;,\;5\;,\;\underbrace{5^{\mathbf{1}\times 2}\;,\;5^{\mathbf{2}\times 2}\;,\;5^{\mathbf{3}\times 2}\;,\;\ldots\;,\;5^{\mathbf{119}\times 2}}_{119\ elementos}. \qquad \text{Portanto,} \quad k = 119\times 2 = 238\,.$$

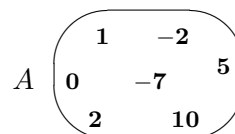
7 Diagrama de Venn

Como representar conjuntos graficamente ? Como vizualizá-los ?

Uma maneira de vizualizar conjuntos *infinitos* é pensar neles como se fossem *regiões do plano.* A figura ao lado mostra uma dessas representações. O conjunto A é formado pelos pontos da região hachurada. Do conjunto A também faz parte os pontos sobre a linha escura que delimita a região hachurada.

Essas representações gráficas são chamadas *diagramas de Venn.* Veremos que elas também servem para representar graficamente conceitos (como inclusão, união, interseção, etc) e *testar* a validade de afirmações matemáticas, como veremos no decorrer dessa lição .

Os diagramas de Venn também são usados para representar conjuntos *finitos.* Neste caso desenhamos regiões do plano e representamos no interior dessas regiões apenas os objetos que constituem os conjuntos em questão. Por exemplo, na figura ao lado representamos o conjunto

$$A = \{-7\,,\,-2\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,5\,,\,10\}.$$

A: **1** **−2** **0** **−7** **5** **2** **10**

8 Inclusão

Definição. Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é *subconjunto* de B quando todo elemento de A também é elemento de B.

Quando A é subconjunto de B dizemos que A está *contido* (ou *incluído*) em B e escrevemos $A \subset B$, ou que B *contém* A e escrevemos $B \supset A$. Quando A *não está contido* em B escrevemos $A \not\subset B$. Analogamente, quando B *não contém* A escreve-se: $B \not\supset A$. Quando A está contido em B e $A \neq B$ dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B e usamos a notação $A \subsetneq B$.

Exemplos

❄ Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Temos que $A \subset B$ pois todo elemento de A também é elemento de B.

❄ Sejam
$A =$ conjunto dos números inteiros maiores do que 5 ;
$B =$ conjunto dos números inteiros maiores do que 11 .
Nesse caso, $B \subset A$. De fato, se $x \in B$ então $x > 11$. Logo $x > 5$. Consequentemente, $x \in A$ provando, assim, o que pretendíamos.

❄ Sejam
$A =$ conjunto dos números pares ;
$B =$ conjunto dos múltiplos de 3 .
Aqui, A *não está contido em* B, pois nem todo par é múltiplo de 3. Por exemplo, $4 \in A$ mas $4 \notin B$. Podemos também concluir que B *não está contido em* A, pois nem todo múltiplo de 3 é par. É o que se passa, por exemplo, com o número 9: temos que $9 \in B$ mas $9 \notin A$.

Observação

$\emptyset \subset B$ qualquer que seja o conjunto B. A justificativa para essa afirmação será apresentada na página 15.

8.1 Propriedades

Propriedades da inclusão
1. $\boldsymbol{A \subset A}$
2. Se $\boldsymbol{A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset A}$ **então** $\boldsymbol{B = A}$
3. Se $\boldsymbol{A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset C}$ **então** $\boldsymbol{A \subset C}$

A afirmação *todo elemento de A também é elemento de A*, que é evidente, justifica a primeira propriedade da relação de inclusão.

A segunda propriedade fornece um critério para mostrar que dois conjuntos são iguais: *dois conjuntos são iguais quando cada um deles está contido no outro.*

A terceira propriedade é dita *propriedade transitiva da inclusão.*

9 Operações com conjuntos

9.1 União

Definição. A *união* dos conjuntos A e B é o conjunto

$$A \cup B := \{x \; ; \; x \in A \;\; \textbf{ou} \;\; x \in B\}.$$

Às vezes usaremos o símbolo " $:=$ " que tem o mesmo significado que " $=$ ". Ele só será usado para lembrar que estamos diante de uma definição.

Exemplos

❄ $\{1\,,3\,,4\,,7\,,8\} \cup \{1\,,2\,,7\,,18\} = \{1\,,2\,,3\,,4\,,7\,,8\,,18\}$.

❄ $\{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 5\} \cup \{-4\,,\,-2\,,\,-1\,,\,1\} = \{-4\,,-2\,,-1\,,1\,,\,6\,,7\,,8\,,\ldots\}$.

❄ Nos diagramas de Venn a seguir a união $A \cup B$ é representada pelas regiões hachuradas.

Observação

Em nosso cotidiano é comum usar a conjunção "**ou**" com sentido *exclusivo*. O mesmo não acontece em matemática: quando afirmamos "$x \in A$ **ou** $x \in B$" podem ocorrer três possibilidades:

☞ x pertence *exclusivamente* a A ; ☞ x pertence *exclusivamente* a B ;

☞ x pertence *simultaneamente* aos dois conjuntos A e B.

9.2 Interseção

Definição. A *interseção* dos conjuntos A e B é o conjunto

$$A \cap B := \{x \; ; \; x \in A \;\; \textbf{e} \;\; x \in B\}.$$

Os conjuntos A e B são ditos *disjuntos* quando não possuem elementos em comum; ou seja, quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplos

❄ $\{-1\,,0\,,1\,,3\,,4\,,7\,,8\} \cap \{-1\,,0\,,1\,,2\,,7\} = \{-1\,,0\,,1\,,7\}$.

❄ $\{-1\,,-2\,,5\,,7\,,8\,,9\} \cap \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x < 8\} = \{-1\,,-2\,,5\,,7\}$.

❄ Nos diagramas de Venn a seguir a interseção $A \cap B$ é representada pela região de cor cinza.

Observação

A conjunção "**e**" tem em matemática o mesmo significado que em nosso quotidiano: o de *simultaneidade*.

9.3 Diferença

Definição. A *diferença* $A - B$ dos conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B, isto é,

$$A - B := \{x\ ;\ x \in A \ \textbf{ e } \ x \notin B\}.$$

Também é comum a notação $A \setminus B$ para indicar a diferença $A - B$. Quando $B \subset A$ dizemos que $A - B$ é o *complementar* de B em relação a A e o denotamos por $\complement_A B$.

Exemplos

❄ $\{1\,,3\,,4\,,5\,,-1\,,-2\} - \{2\,,3\,,4\,,-1\,,0\} = \{1\,,5\,,-2\}$.

❄ Como $\mathbb{N} = \{1\,,2\,,\ldots\} \subset \mathbb{Z} = \{0\,,\pm1\,,\pm2\,,\ldots\}$ temos que $\complement_{\mathbb{Z}}\mathbb{N} = \{0\,,-1\,,-2\,,-3\,,\ldots\}$.

9.4 Produto Cartesiano

Definição. O *produto cartesiano* $A \times B$ dos conjuntos A e B, é o conjunto dos *pares ordenados* $(x\,,y)$ onde $x \in A$ e $y \in B$, isto é,

$$A \times B := \big\{(x\,,y)\ ;\ x \in A \ \textbf{ e } \ y \in B\big\}.$$

Lembre-se que dois pares ordenados $(x\,,y)$ e $(a\,,b)$ de $A\times B$ são *iguais* quando, e somente quando, $x=a$ e $y=b$. Dizemos que x e y são as *coordenadas* do par ordenado $(x\,,y)$: x é a *primeira coordenada* e y é a *segunda coordenada*.

Exemplos

- $\{1\,,5\,,-1\,,-2\}\times\{4\,,-1\,,0\}$ é o conjunto formado pelos pares ordenados: $(1\,,4)$, $(1\,,-1)$, $(1\,,0)$, $(5\,,4)$, $(5\,,-1)$, $(5\,,0)$, $(-1\,,4)$, $(-1\,,-1)$, $(-1\,,0)$, $(-2\,,4)$, $(-2\,,-1)$, $(-2\,,0)$.
- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é formado pelos pares ordenados da forma $(m\,,n)$ onde $m\,,n$ são inteiros quaisquer.
- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é formado pelos pares ordenados da forma $(x\,,y)$ onde $x\,,y$ são números reais quaisquer.

9.5 Propriedades das operações

Apresentamos no quadro a seguir algumas propriedades das operações de união e de interseção.

Propriedades da união e da interseção
1. Idempotência: $A\cup A=A=A\cap A$
2. Comutatividade: $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
3. Associatividade: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
4. Distributividade: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
5. $\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$ **se** $\#(A)<\infty$ **e** $\#(B)<\infty$

É a propriedade associativa que nos permite entender $A\cup B\cup C$ e $A\cap B\cap C$ sem ambiguidade. Note que a definição de união envolve apenas dois conjuntos. Assim, para dar um significado à $A\cup B\cup C$ respeitando a ordem em que $A\,,B\,,C$ aparecem na expressão, devemos interpretá-lo como $(A\cup B)\cup C$ ou, como $A\cup(B\cup C)$. A associatividade nos garante que tanto faz, e é isso que nos permite abandonar os parênteses ao escrever $A\cup B\cup C$.

10 Quantificadores

Em nossa linguagem matemática faremos uso de dois *quantificadores*:

☞ *quantificador de universalidade*:
denotado por "$\forall$" e significando *qualquer que seja* ou *para todo* ou *todo*.

☞ *quantificador de existência*:
denotado por "$\exists$" e significando *existe* ou *existem*.

Exemplos

A afirmação	pode ser escrita como:	
Existem números inteiros negativos	$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < 0$	$\exists\, n \in \mathbb{Z}\ ;\ n < 0$
Nem todo número inteiro é nulo	$\exists\, x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \neq 0$	$\exists\, x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \neq 0$
Existem números pares maiores que 2001	$\exists\, x \in \mathcal{P}$ tal que $x > 2001$	$\exists\, x \in \mathcal{P}\ ;\ x > 2001$
O quadrado de qualquer número inteiro é maior ou igual a zero	$x^2 \geq 0\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}$	
O dobro de qualquer número inteiro é um número par	$2y \in \mathcal{P}\ ,\ \forall\, y \in \mathbb{Z}$	
O produto de qualquer número real por zero vale zero	$b \times 0 = 0\ ,\ \forall\, b \in \mathbb{R}$	
A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro	$a - b \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\, a\,, b \in \mathbb{Z}$	
A diferença entre dois números inteiros pode não ser um número par	$\exists\, a\,, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b \notin \mathcal{P}$	$\exists\, a\,, b \in \mathbb{Z}\ ;\ a - b \notin \mathcal{P}$

11 O significado de "$\Longrightarrow$" e "$\Longleftrightarrow$"

Em matemática, o símbolo "$\Longrightarrow$" é usado para indicar que a afirmação à esquerda desse símbolo *implica* a afirmação à direita, como em:

$$\begin{array}{rcl} a = 2 & \Longrightarrow & a > 1\,; \\ x \geq 1 & \Longrightarrow & x^2 \geq 1\,; \\ a - b = 0 & \Longrightarrow & a = b\,; \end{array}$$

onde $a\,, b\,, x$ são números reais[2].

[2] Nesse caso também dizemos: a afirmação à direita da seta é *consequência* da afirmação à esquerda ou então, que a afirmação à direita *segue como consequência* da afirmação à esquerda.

Quando a afirmação à esquerda implica a afirmação à direita e vice-versa, dizemos que as afirmações são *equivalentes* e usamos o símbolo "$\Longleftrightarrow$" como nos exemplos a seguir.

$$3a = 12 \iff a = 4\,;$$
$$a - b > 0 \iff a > b\,;$$
$$a - b = 2 \iff a = b + 2\,;$$

onde $a\,, b\,, x$ são números reais.

Em cada um dos exemplos acima, a afirmação à esquerda e a afirmação à direita do símbolo "$\Longleftrightarrow$" têm exatamente o mesmo significado matemático; elas apenas estão escritas de forma diferente. O símbolo "$\Longleftrightarrow$" também é lido como: *quando, e somente quando* ou então *se, e somente se*.

Tanto a *implicação* quando a *equivalência* entre afirmações são transitivas, isto é:

- se $\mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{r}$ então $\mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{r}$;
- se $\mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{r}$ então $\mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{r}$.

Exemplos

❄ Dados números reais a e b temos que:

$$a < 0 \iff 2a < 0\,;$$
$$a > 0 \text{ e } b > 0 \implies a + b > 0\,;$$
$$a < 0 \text{ e } b \leq 0 \implies ab \geq 0\,.$$

❄ Sejam A e B dois conjuntos disjuntos.

Temos que: $x \in A \implies x \notin B$.

❄ $x \in \{1\} \implies x \in \{1\,, 2\}$.

❄ $x = 1 \implies x = 1 \text{ ou } x = 2\,.$

❄ Seja A um conjunto qualquer.

Então: $a \in A \iff \{a\} \subset A$.

12 Construindo novas afirmações

Dadas duas afirmações $\mathfrak{p}\,, \mathfrak{q}$ podemos construir com elas duas outras afirmações:

- a afirmação $(\mathfrak{p}\ \ e\ \ \mathfrak{q})$

  a qual só é **verdadeira** quando ambas as afirmações $\mathfrak{p}\,, \mathfrak{q}$ o são;

- a afirmação $(\mathfrak{p}\ \ ou\ \ \mathfrak{q})$

  a qual só é **falsa** quando ambas as afirmações $\mathfrak{p}\,, \mathfrak{q}$ o são.

Exemplos

❄ Considere os conjuntos $\{1\}$ e $\{1\,, \sqrt{2}\,\}$. Sobre as afirmações a seguir podemos concluir:

- **Afirmação:** $1 \in \{1\}$ **e** $\sqrt{2} \in \{1\}$.
  É uma afirmação FALSA, pois a segunda é falsa (apesar da primeira ser verdadeira);

- **Afirmação:** $1 \in \{1\}$ **ou** $\sqrt{2} \in \{1\}$.
  É uma afirmação VERDADEIRA, pois a primeira é verdadeira (apesar da segunda ser falsa);
- **Afirmação:** $1 \notin \{1\}$ **ou** $\sqrt{2} \in \{1, \sqrt{2}\}$.
  É uma afirmação VERDADEIRA, pois a segunda é verdadeira (não obstante a primeira seja falsa);
- **Afirmação:** $\sqrt{2} \notin \{1\}$ **e** $1 \in \{1, \sqrt{2}\}$;
  É uma afirmação VERDADEIRA, pois a primeira é verdadeira e a segunda também.
- **Afirmação:** $\sqrt{2} \in \{1\}$ **ou** $1 \notin \{1, \sqrt{2}\}$;
  É uma afirmação FALSA, pois a primeira é falsa e a segunda também.

Mais Exemplos

❄ Seja $x \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações são verdadeiras e quais são falsas ?

(i) $x = 2 \implies x \leq 2$ (isto é, $x < 2$ ou $x = 2$) ;
(ii) $x = \pi \implies x \geq \pi$ (isto é, $x > \pi$ ou $x = \pi$) ;
(iii) $x > 2 \implies x \geq 2$ (isto é, $x > 2$ ou $x = 2$) ;
(iv) $x < \pi \implies x \leq \pi$ (isto é, $x < \pi$ ou $x = \pi$) ;
(v) $x \leq 2 \implies x = 2$;
(vi) $x \leq 2 \implies x < 2$.

Para responder a essa pergunta, façamos:

(i) Sabemos que $x = 2$. Logo, segue como consequência que a afirmação "$x < 2$ ou $x = 2$" é VERDADEIRA, pois a segunda delas é verdadeira.

(ii) Sabemos que $x = \pi$. Logo, segue como consequência que a afirmação "$x > \pi$ ou $x = \pi$" é VERDADEIRA, pois a segunda delas é verdadeira.

(iii) Sabemos que $x > 2$. Logo, segue como consequência que a afirmação "$x > 2$ ou $x = 2$" é VERDADEIRA, pois a primeira delas é verdadeira.

(iv) Sabemos que $x < \pi$. Logo, segue como consequência que a afirmação "$x < \pi$ ou $x = \pi$" é VERDADEIRA, pois a primeira delas é verdadeira.

(v) Essa afirmação é FALSA, pois ao ser menor ou igual a 2 , o valor de x pode ser, exatamente, 1 e não 2 .

(vi) Essa afirmação é FALSA, pois ao ser menor ou igual a 2 , o valor de x pode ser, exatamente, 2 .

12.1 A negação de $A \subset B$

Outra forma de criar novas afirmações é negar uma afirmação dada. Aliás, compreender e redigir a negação de uma afirmação não é, em geral, uma tarefa elementar em matemática. Vejamos, passo à passo, um tal exemplo.

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, sabemos quando A está contido em B: *"quando todo elemento de A é elemento de B"*. Automaticamente, sabemos o que significa a afirmação

"A não está contido em B".

É a *negação* de *"A está contido em B"*,

ou seja, é a negação de

"todo elemento de A é elemento de B".

E a negação desta última afirmação é, evidentemente,

"nem todo elemento de A é elemento de B"

ou, dito de outra maneira,

"existe um elemento de A que não é elemento de B".

Finalizando, dizer que *"A não está contido em B"* é o mesmo que dizer

"existe $a \in A$ tal que $a \notin B$"

ou seja,

$$\exists\, a \in A \ ; \ a \notin B.$$

É por isso que para justificar que A não está contido em B, *exibimos* um elemento de A que não está em B.

Exemplos

❄ $\mathbb{Z} \not\subset \mathcal{P}$ porque *existem números inteiros que não são pares*. Por exemplo, o número 3 é inteiro mas não é par, ou seja : $3 \in \mathbb{Z}$ mas $3 \notin \mathcal{P}$.

❄ Se A é o conjunto dos múltiplos de 10 e B é o conjunto dos múltiplos de 4, então $A \not\subset B$ porque $30 \in A$ mas $30 \notin B$.

Depois de ter entendido o significado de $A \not\subset B$ podemos justificar o seguinte fato:

$$\emptyset \subset B \ \textit{qualquer que seja o conjunto } B.$$

De fato, se $\emptyset \not\subset B$ deveria existir $b \in \emptyset$ tal que $b \notin B$ o que é impossível, pois $\emptyset$ não tem elementos. Logo, $\emptyset \subset B$ qualquer que seja o conjunto B. Em particular, o complementar do conjunto vazio com relação a qualquer conjunto B está bem definido e vale: $\complement_B \emptyset = B - \emptyset = B$.

Exercícios resolvidos

1. **Verifique se o número x pertence ao conjunto A e justifique sua resposta.**

(a) A é o conjunto dos múltiplos de 3 ; $x = 1264$.

(b) A é o conjunto dos divisores de 60 ; $x = 3$.

Solução Precisamos verificar se os números dados satisfazem ou não às propriedades que caracterizam os elementos dos conjuntos em questão.

(a) A propriedade que caracteriza os elementos do conjunto A é: *ser múltiplo de 3*.
Dividindo 1264 por 3 obtemos resto 1. Logo, 1264 não é múltiplo de 3, ou seja, $1264 \notin A$.

(b) A propriedade que caracteriza os elementos do conjunto A é: *ser divisor de 60*.
Temos que $60 \div 3 = 20$. Portanto, o número 3 é um dos divisores de 60. Logo, $3 \in B$.

2. **Os números 0 , -1 , $7/3$ e 10^{10} pertencem ao conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ 3n - 5$ é par$\}$?**

Solução As propriedades que caracterizam os elementos n de A são:

- $n \in \mathbb{Z}$ e
- $3n - 5$ é par.

Precisamos então verificar se os números dados satisfazem ambas as condições.

(a) $0 \in \mathbb{Z}$ mas $3 \times 0 - 5 = -5$ não é par. Logo, $0 \notin A$;

(b) $-1 \in \mathbb{Z}$ e $3 \times (-1) - 5 = -8$ é par. Portanto, $-1 \in A$;

(c) $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$. Consequentemente, $\frac{7}{3} \notin A$;

(d) $10^{10} \in \mathbb{Z}$ mas $3 \times 10^{10} - 5$ não é par. Para ver que $3 \times 10^{10} - 5$ não é par observe que 3×10^{10} é um número inteiro cujo algarismo da unidade é *zero*. Segue que o algarismo da unidade de $3 \times 10^{10} - 5$ é 5 e portanto, $3 \times 10^{10} - 5$ não é um número par[3]. Logo $10^{10} \notin A$.

3. **Os conjuntos A e B são iguais ou distintos ? Justifique suas respostas.**

(a) A é o conjunto dos números pares ; B é o conjunto dos múltiplos de 4.

(b) $A = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ x^2 < 47\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ x \leq 6\}$.

Solução Temos que:

(a) Existem números pares que não são múltiplos de 4 como, por exemplo, o número 6. Assim $6 \in A$ mas $6 \notin B$. Consequentemente, $A \neq B$.

(b) Temos: $1^2 < 47$, $2^2 < 47$, $3^2 < 47$, $4^2 < 47$, $5^2 < 47$, $6^2 < 47$. Por outro lado, qualquer número natural maior que 6 tem quadrado *maior* do que 47 . Logo, $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ e consequentemente,

$$A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\} = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ x \leq 6\} = B.$$

4. **Quais dos conjuntos a seguir são vazios e quais são unitários ?**

[3] Como mostrar que o algarismo da unidade de um número par só pode ser $0, 2, 4, 6$ ou 8 ? Bem, comece lembrando que um número par é da forma $2n$ onde n é um inteiro. Agora, se o algarismo da unidade de n for *zero* então o de $2n$ será *zero* ; se o algarismo da unidade de n for 1 então o de $2n$ será 2 ; se o algarismo da unidade de n for 2 então o de $2n$ será 4 ; e agora, siga em frente !!

(a) $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 + 1 = 0\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{Z}\ ; 1 = x^2\}$
(c) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ 0 < x < 2\}$ **(d)** $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \frac{1}{n} > 1\}$.

Solução Para isso, vejamos quantos elementos possuem cada um dos conjuntos.

(a) Sendo x real, temos que $x^2 \geq 0$. Logo, $x^2+1 \geq 1$ e consequentemente, $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2+1 = 0\} = \emptyset$.

(b) Temos que: $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ 1 = x^2\} = \{-1\ ,\ 1\}$. Logo, este conjunto tem dois elementos e portanto não é nem vazio, nem unitário.

(c) O único número inteiro maior do que zero e menor do que 2 é o número 1. Concluímos então que $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > 0 \ \text{ e } \ x < 2\} = \{1\}$. Portanto, o conjunto em questão é um conjunto unitário.

(d) Se $n \in \mathbb{N}$ então $n \geq 1$. Logo, o denominador da fração $1/n$ é maior ou igual ao seu numerador. Consequentemente $\frac{1}{n} \leq 1$ e concluímos que o conjunto em questão é o conjunto vazio.

5. Determine o número de elementos dos conjuntos a seguir.
(a) Conjunto dos divisores de 50 ;
(b) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 que são menores do que 2317 .

Solução Analisemos cada um dos conjuntos.

(a) Fatorando, obtemos: $50 = 2 \times 5^2$. Logo, os divisores de 50 são: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , ± 25 , ± 50. Portanto, o conjunto formado pelos divisores de 50 tem exatamente 12 elementos.

(b) Dividindo 2317 por 3 obtemos 772 como quociente e 1 como resto. Além disso,

$$\mathbf{772} \times 3 = 2316 < 2317 \quad \text{e} \quad \mathbf{773} \times 3 = 2319 > 2317.$$

Logo, 772×3 é o maior múltiplo de 3 que é menor do que 2317. Portanto, os múltiplos[4] de 3 procurados são:

$$\mathbf{1} \times 3\ ,\ \mathbf{2} \times 3\ ,\ \mathbf{3} \times 3\ ,\ \mathbf{4} \times 3\ ,\ \mathbf{5} \times 3\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbf{772} \times 3.$$

Portanto, o conjunto em questão é finito e tem exatamente 772 elementos.

6. Como demonstrar que o conjunto dos números pares é um conjunto infinito ?

Solução Nós definimos o que é um conjunto finito. Dissemos também que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, mostrar que um conjunto é infinito, é o mesmo que mostrar que ele não pode ser finito. Como fazer isso ?

Bem, o conjunto dos números pares não é vazio. Logo, podemos iniciar a contagem dos seus elementos. Resta agora mostrar que essa contagem não pára. E para isso, basta mostrar, por exemplo, que para cada natural n podemos exibir n elementos distintos do conjunto dos números pares, o que é uma proeza fácil de ser realizada. Para tal, dado $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto $\{\,2 \times \mathbf{1}\ ,\ 2 \times \mathbf{2}\ ,\ldots,\ 2 \times \boldsymbol{n}\,\}$. Trata-se

[4] Os múltiplos de 3 são os números da forma $3n$ onde $n \in \mathbb{Z}$ ou seja, são os números:

$$\ldots\ ,\ -\mathbf{4} \times 3\ ,\ -\mathbf{3} \times 3\ ,\ -\mathbf{2} \times 3\ ,\ -\mathbf{1} \times 3\ ,\ \mathbf{0} \times 3\ ,\ \mathbf{1} \times 3\ ,\ \mathbf{2} \times 3\ ,\ \mathbf{3} \times 3\ ,\ \mathbf{4} \times 3\ ,\ \ldots$$

de um subconjunto do conjunto dos números pares, com exatamente n elementos. E mostramos assim que o conjunto dos números pares é infinito.

Esses mesmos argumentos servem para mostrar, por exemplo, que o conjunto dos múltiplos inteiros de um número real não nulo (positivo ou negativo) é um conjunto com uma infinidade de elementos.

7. **Qual dos conjuntos a seguir é finito e qual é infinito ?**

(a) $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x^3 < 630\}}$ **(b)** $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x^3 < 2\}}$.

Solução Para resolver essa questão damos os seguintes argumentos.

(a) Como $512 = 8^3 < 630 < 9^3 = 729$ segue que $A = \{1 \, , \, 2 \, , \, 3 \, , \, 4 \, , \, 5 \, , \, 6 \, , \, 7 \, , \, 8\}$. Portanto, A é um conjunto finito.

(b) Observe que todos os inteiros negativos são elementos de B, pois o cubo de um número negativo é também negativo e logo, menor do que 2. Portanto, $B = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ e, consequentemente, B é um conjunto infinito, pois contém o conjunto infinito $\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$.

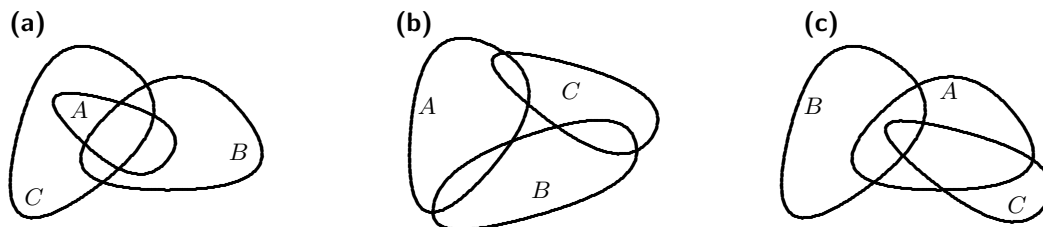
8. **Sejam A , B e C regiões do plano. Em cada item construa diagramas de Venn onde A , B e C satisfazem, simultaneamente, as condições do item.**

(a) $A - B \subset C$; $A \neq B$; $A \not\subset C$ e $A \cap B \neq \emptyset$;

(b) $A \cap B \neq \emptyset$; $A \cap B \cap C = \emptyset$; $C \cap A \neq \emptyset$ e $C \cap B \neq \emptyset$;

(c) $A \cap B \cap C \neq \emptyset$; $C - A \neq \emptyset$; $A \not\subset B$; $B \not\subset A$ e $B - A \subset B - C$.

Solução Para isso exibimos os seguintes diagramas:

(a) **(b)** **(c)**

9. **Determine quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.**

(a) $\boldsymbol{\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n > 300\} \subset \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n > 200\}}$;
(b) $\boldsymbol{\{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^2 > 20\} \subset \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^2 > 45\}}$;
(c) $\boldsymbol{\{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^3 < -10\} \subset \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^3 < 1\}}$.

Solução Passemos à análise das afirmações.

(a) Se $k \in \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n > 300\}$ então $k > 300$. Logo, k é um natural maior do que 200, ou seja, $k \in \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n > 200\}$. Finalizando, concluímos que $A \subset B$ e portanto, a afirmação é VERDADEIRA.

(b) Observe que $5 \in \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^2 > 20\}$ pois $5^2 > 20$. No entanto $5 \notin \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^2 > 45\}$ porque $5^2 \not> 45$. Logo a afirmação é FALSA.

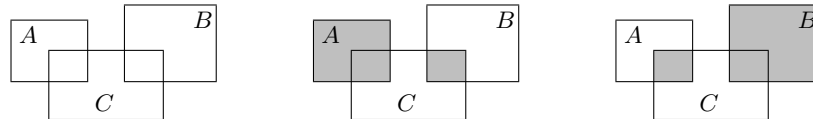
(c) Se $k \in \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^3 < -10\}$ então $k^3 < -10$. Logo, k é um inteiro negativo. Portanto, $k^3 < 0$ e, consequentemente, $k^3 < 1$, ou seja, $k \in \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n^3 < 1\}$. Portanto, a afirmação é VERDADEIRA.

10. Sejam $A\,,B\,,C$ conjuntos quaisquer. Mostre que

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap (B \cup C)$$

construindo diagramas de Venn onde os conjuntos $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ são distintos.

Solução Na figura a seguir exibimos os conjuntos $A\,,B\,,C$. Na figura do meio, a parte hachurada representa o conjunto $A \cup (B \cap C)$. Na figura que está à direita, a parte hachurada mostra o conjunto $(A \cup B) \cap (B \cup C)$. Essa construção garante que

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap (B \cup C).$$

11. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Mostre que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Solução Os elementos de A se dividem em dois grupos *distintos*:

- os elementos de A que *não estão* em B, ou seja, os elementos de $A - B$;
- os elementos de A que *estão* em B, ou seja, os elementos de $A \cap B$.

Consequentemente, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

12. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x \leq -5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x \geq -1\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 7\}$. Determine: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cap C$.

Solução Temos que:

(a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1\} = \{\ldots , -7 , -6 , -5 , -1 , 0 , 1 , 2 , \ldots\}$.

(b) $A \cup C = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x \leq -5 \text{ ou } x > 7\} = \{\ldots , -7 , -6 , -5 , 8 , 9 , 10 , 11 , \ldots\}$.

(c) $B \cap C = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x \geq -1 \text{ e } x > 7\} = \{8 , 9 , 10 , \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x > 7\}$.

13. Escreva as afirmações a seguir usando quantificadores.
(a) Existem números pares maiores do que 100^{100};
(b) O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro;
(c) Do produto de dois inteiros pode resultar um número não par;
(d) Da soma de dois inteiros pode resultar um número negativo.

Solução

(a) Existem números pares maiores do que 100^{100}: $\boxed{\exists\, a \in \mathcal{P}\ ;\ a > 100^{100}}$

(b) O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro: $\boxed{a\, b \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall\, a\, ,\, b \in \mathbb{Z}}$

(c) Do produto de dois inteiros pode resultar um número não par: $\boxed{\exists\, a\, ,b \in \mathbb{Z}\ ;\ ab \notin \mathcal{P}}$

(d) Da soma de dois inteiros pode resultar um número negativo: $\boxed{\exists\, a\, ,b \in \mathbb{Z}\ ;\ a + b < 0}$

14. Sejam $A\, ,B$ conjuntos quaisquer. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $x \in A \cup B \implies x \in A$ **(b)** $x \in A \cap B \implies x \notin A - B$.

Solução Vamos à análise de cada uma das afirmações.

(a) Se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$. No entanto, não podemos concluir que x pertence necessariamente ao conjunto A. Por exemplo, quando $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $x = 2$ temos que: $x \in A \cup B$ mas $x \notin A$. Esse exemplo mostra que a afirmação é FALSA.

(b) Seja $x \in A \cap B$. Ao retirar de A os elementos de B, certamente retiramos de A os elementos comuns a A e a B ou seja, $A \cap B$. Em particular, retiramos o elemento x . Consequentemente, $x \notin A - B$. Isso mostra que a afirmação do item (b) é VERDADEIRA.

15. Sejam $x\, ,y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras ?

(a) $x^2 > 0 \implies x > 0$ **(b)** $x^3 > 0 \implies x > 0$

(c) $y > 3 \implies y^2 > 8$ **(d)** $x + y = 0 \implies x^2 + y^2 = 0$.

Solução Analisemos cada uma das questões colocadas.

(a) FALSA , pois para $x = -1$ temos: $x^2 = (-1)^2 > 0$ mas, $x = -1$ não é positivo.

(b) VERDADEIRA , pois o número x não pode ser nulo (nesse caso $x^3 = 0$) nem pode ser negativo (nesse caso $x^3 < 0$ pela regra de sinais).

(c) Como $y > 3$ temos que $y^2 > 9$. Mas, se $y^2 > 9$ então $y^2 > 8$. Portanto a afirmação é VERDADEIRA.

(d) FALSA , pois para $x = 1$ e $y = -1$ temos: $x + y = 0$ mas, $x^2 + y^2 = 2 \neq 0$.

16. Mostre que $a^2 + b^2 + c^2$ é sempre ímpar quando $a\, ,b$ são inteiros consecutivos e $c = ab$.

Solução Como $a\, ,b$ são inteiros consecutivos e $c = ab$ então $a^2 + b^2 + c^2$ tem a forma:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 + n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &= 3n^2 + 2n + 2n^3 + n^4 + 1 = \underbrace{2(n + n^3)}_{par} + 3n^2 + n^4 + 1\,. \end{aligned}$$

Para mostrar que $2(n+n^3)+3n^2+n^4+1$ é ímpar basta mostrar que $3n^2+n^4+1$ é sempre ímpar, pois já sabemos que $2(n+n^3)$ é par.

Para isso temos que:

- se n é par então $3n^2$ e n^4 são números pares e, consequentemente, $3n^2+n^4+1$ será ímpar;
- se n é ímpar então $3n^2$ e n^4 são números ímpares e, consequentemente, $3n^2+n^4$ será par, donde concluímos que $3n^2+n^4+1$ será ímpar .

Concluímos então que $a^2+b^2+c^2$ será sempre ímpar .

Exercícios

1. Liste os elementos de cada um dos conjuntos:

(a) Conjunto dos múltiplos positivos de 5 que são menores do que 37 ;

(b) Conjunto dos 10 primeiros inteiros positivos que divididos por 4 deixam resto 3 ;

(c) Conjunto dos inteiros positivos que são divisores comuns de 60 e 100 ;

(d) Conjunto dos números inteiros positivos que são menores do que 50 e que são divisíveis por 7.

2. Diga se os conjuntos a seguir são iguais ou se são distintos. Redija uma justificativa para sua resposta.

(a) $\{1, 2, 4, 7, 5, 9, 10, 2\}$;
$\{2, 9, 5, 2, 10, 7, 9, 1, 4, 7\}$.

(b) Conjunto dos triângulos retângulos ;
Conjunto dos triângulos eqüiláteros.

(c) Conjunto dos números ímpares que são maiores ou iguais a 3 ;
Conjunto dos números ímpares que são maiores do que 2.

(d) Conjunto dos números primos que são divisores de 210 ;
Conjunto dos números primos que são divisores de 420.

Nota: Um número $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ é um *número primo* quando ele tem apenas dois divisores *positivos e distintos*, a saber, 1 e o próprio número. Segue da definição que o número 1 não é primo.

3. Um conjunto A é formado pelos dígitos da unidade dos números:

1232^{23} ; 267^{46} ; 139^{1203}.

Liste os elementos do conjunto A.

4. Quais dos conjuntos a seguir são unitários e quais deles são o conjunto vazio ?

(a) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^2 + 1 = 0\}$;

(b) $\{y \in \mathcal{P}\ ;\ y^3 = 8\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x = x^2\}$;

(d) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x + 1 = 2\ \ e\ \ x - 1 = 3\}$;

5. Seja A o conjunto formado por todos os inteiros n que têm a seguinte propriedade: o resto da divisão de $4n+7$ por 5 deixa resto 2. Pergunta-se:

(a) $0 \in A$? (b) $37 \in A$?
(c) $12 \in A$? (d) $100^{10} \in A$?
(e) $-5 \in A$? (f) $-7 \in A$?

6. Os conjuntos a seguir são finitos ?

(a) Conjunto dos números pares com dois algarísmos ;

(b) $\{y \in \mathbb{Z}\ ;\ (y-1)(y-2) = 0\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > -10\ \text{ ou }\ x < 25\}$;

(d) Conjunto dos números inteiros positivos com menos do que 5 algarismos ;

7. Determine o número de elementos de cada um dos conjuntos a seguir.

(a) $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 1567\}$;

(b) $\{-53, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8901\}$;

8. Seja $A_n = \{-3, -2, -1, \ldots, n-1\}$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq -2$.

(a) Descreva os conjuntos A_{-2}, A_0, A_2 e A_5 listando todos os seus elementos ;

(b) Determine o número de elementos de A_n.

9. Sejam
$A_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n+3\}$;
$B_n = \{-n, -n+1, \ldots, n+1, n+2\}$;
$C_n = \{10, 10+2, \ldots, 10+2n\}$;
onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Descreva cada um dos conjuntos:
A_0, B_1, C_2, A_3, B_4, C_5 listando todos os seus elementos.

10. Determine o número de elementos dos conjuntos A_n, B_n e C_n do exercício anterior. Esse número, claro, depende do inteiro $n \geq 0$.

11. Nas listas a seguir, diga qual é o elemento solicitado.

(a) Qual é o centésimo elemento na lista
$1\,,\,2^3\,,\,3^5\,,\,4^7\,,\,5^9\,,\,6^{11}\,,\,\dots$?

(b) Qual é o milésimo elemento na lista
$1\,,\,3\,,\,5^2\,,\,7^4\,,\,9^6\,,\,11^8\,,\,\dots$?

(c) Qual é o centésimo quinto elemento da lista
$1\,,\,2^3\,,\,4^5\,,\,6^7\,,\,8^9\,,\,10^{11}\,,\,\dots$?

12. Sabendo que a lista $1\,,2\,,4^2\,,6^5\,,8^8\,,10^{11},\dots,k$ possui 273 elementos, determine k e o penúltimo elemento da lista.

13. Quantos triângulos isósceles têm lados inteiros e perímetro igual a 20 ?

14. Quais dos conjuntos a seguir são finitos ? Determine o número de elementos daqueles que são finitos.

(a) Conjunto dos múltiplos positivos de 3 que são menores do que 2.317 ;

(b) Conjunto dos triângulos retângulos cujas medidas dos lados são números inteiros e cuja área vale 24 ;

(c) $\{n \in \mathbb{Z}^+\,;\, 102 < 2n+1 \leq 2.307\}$;

(d) Conjunto dos triângulos cuja base mede 2 e cuja altura relativa a essa base, mede 1 .

15. Construa diagramas de Venn que represente cada uma das situações a seguir:

(a) $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ mas A e B têm elementos em comum;

(b) $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset C$ e $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;

(c) $(B - A) \cap C \neq \emptyset$ e $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;

(d) A não contém B , B está contido em C e C contém A.

16. Determine todos os possíveis conjuntos X que satisfazem a igualdade $A \cup X = B$, onde A e B são dados a seguir:

$A = \{\,1\,,\,3\,,\,5\,\}$ e

$B = \{\,-1\,,\,1\,,\,-2\,,\,3\,,\,5\,,\,0\,\}$.

17. Sejam $A\,,\,B$ conjuntos quaisquer. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.

(a) Se $x \in A$ então $x \in A - B$;

(b) Se $x \notin A$ então $x \in B - A$;

(c) $x \in A \cup B \implies x \notin A - B$;

(d) Suponha que $A - B \neq \emptyset$.
Podemos então concluir que $A \cap B \neq \emptyset$.

18. Sejam $x\,,\,y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?

(a) $x^5 > 0 \iff x > 0$;

(b) $x^6 = 0 \iff x = 0$;

(c) $x > 2 \implies x \geq 3$;

(d) $x \in \{3\} \implies x \in \{3\,,\pi\}$;

(e) $x = 3 \implies x = 3$ ou $x = \pi$.

19. Diga quais das afirmações a seguir são falsas.

(1) Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$ tais que $a\,,b \leq 0$.
Segue daí que $a^3 b > 0$.

(2) Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $a^4 b \geq 0$.

(3) Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $(a^4 + 0{,}1)b > 0$.

(4) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq 0$ e $b > 0$.
Segue daí que $(a + 0{,}1)^4 b > 0$.

20. Escreva as afirmações a seguir como fizemos nos exemplos da seção 10.

(a) O produto de dois números inteiros é um número inteiro ;

(b) Existem números inteiros menores do que -101^{101} ;

(c) O quociente de dois inteiros não nulos é um número racional ;

(d) A diferença de dois inteiros positivos pode ser um inteiro negativo.

21. Sabendo que $\#(A) = n$ e $\#(B) = m$ pergunta-se: quantos elementos possui o conjunto $A \times B$?

2

Apresentação dos números reais

Vamos relembrar algumas notações, definições e fatos elementares sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e sua representação na reta. Nosso objetivo é desenvolver uma visão geométrica do conjunto dos números reais e de alguns conceitos que vamos tratar nessa lição.

1 Subconjuntos especiais

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. Inteiros

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Outros subconjuntos:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$.

O conjunto $\mathbb{Z}^+$ dos inteiros positivos é dito *conjunto dos números naturais*. Ele também é denotado por $\mathbb{N}$.

2. Racionais

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;;\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$.

Exemplos:

$\frac{1}{2}$; $1{,}5 = \frac{15}{10}$; $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$; $\frac{8}{0{,}5} = 8 \div \frac{5}{10} = 8 \times \frac{10}{5} = \frac{16}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$.

Note que todo inteiro p pode ser escrito na forma $p = \frac{p}{1}$. Portanto, todo número inteiro é também um número racional, isto é, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Veremos mais tarde que:

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q} \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0.$$

Uma expressão da forma $\frac{p}{q}$ com p, q inteiros e $q \neq 0$ também é dita *fração de números inteiros* ou, simplesmente, *fração*.

Note que todo número racional *não nulo* pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ ou $-\frac{p}{q}$ onde p, q são *inteiros positivos*. Além disso, decompondo p e q em fatores primos e cancelando fatores primos comuns ao numerador e ao denominador da fração, obtemos o que chamamos de *fração irredutível*. Assim, toda fração não nula tem a sua forma irredutível, aliás, única. Voltaremos a este assunto quando tratarmos do *Teorema da Decomposição em Fatores Primos* na Lição 8.

Nos exemplos a seguir, as frações à direita dos sinais de igual estão na forma irredutível, mas as da esquerda não estão nessa forma:

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad ; \quad -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \quad ; \quad \frac{126}{60} = \frac{21}{10} \quad ; \quad \frac{6}{3} = 2.$$

3. Irracionais

Aprendemos no Ensino Médio que além dos números racionais, fazem parte do conjunto dos números reais, os números chamados de *irracionais*. Não faremos aqui uma definição formal desses números, mas vamos aprender a operar com eles, relembrar algumas de suas propriedades, sua harmonia com os racionais e procurar desenvolver uma visão geométrica desse universo.

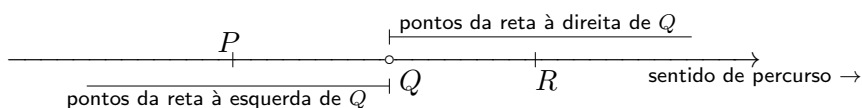
Exemplos de números irracionais: $\sqrt{5} \quad ; \quad -\sqrt{3} \quad ; \quad \pi \quad ; \quad -\sqrt[3]{5} \quad ; \quad \frac{2}{\sqrt[3]{5}}.$

Em geral, não é fácil demonstrar que tais números não são números racionais. Por exemplo, a não racionalidade do número π só foi demonstrada em 1761, pelo matemático francês J.H. Lambert. Na Lição 8 voltaremos a comentar sobre este assunto e mostraremos que $\sqrt{5}$ é, de fato, um número não racional. Isso significa que para medir a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 2 e 1 respectivamente, precisamos lançar mão de números não racionais, ou seja, precisamos criar outros números *em harmonia* com os racionais para associar uma medida a essa hipotenusa. Voltaremos a falar desta *harmonia* na página 89.

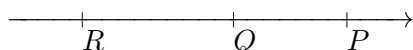
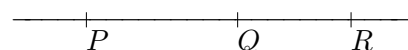
2 Representação na reta orientada

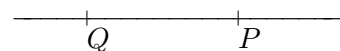
Fixar uma *orientação* na reta é fixar um *sentido de percurso*, como mostrado na figura a seguir. Feito isso, os pontos *à direita* de um ponto Q da reta são aqueles que podem ser acessados a

partir de Q, seguindo o sentido de percurso fixado, ou seja, seguindo a orientação fixada. Na figura a seguir, R está à direita de Q. Os pontos *à esquerda* de Q são aqueles que podem ser acessados a partir de Q, seguindo o sentido de percurso contrário ao fixado. Na figura a seguir, o ponto P está à esquerda de Q.

Reta orientada e as noções de direita e esquerda

O ponto Q não está nem à direita, nem à esquerda de Q.

Duas conseqüências imediatas dos conceitos de direita e esquerda são:

☞ *Se P está à direita de Q e se Q está à direita de R então P está à direita de R.*

☞ *Se P está à esquerda de Q e se Q está à esquerda de R então P está à esquerda de R.*

Essa é a *propriedade transitiva* das relações de direita e esquerda. Já nos deparamos com essa propriedade na inclusão de conjuntos. Outra propriedade imediata é a seguinte:

☞ *P está à direita de Q se, e somente se, Q está à esquerda de P.*

Além dessas propriedades temos também que:

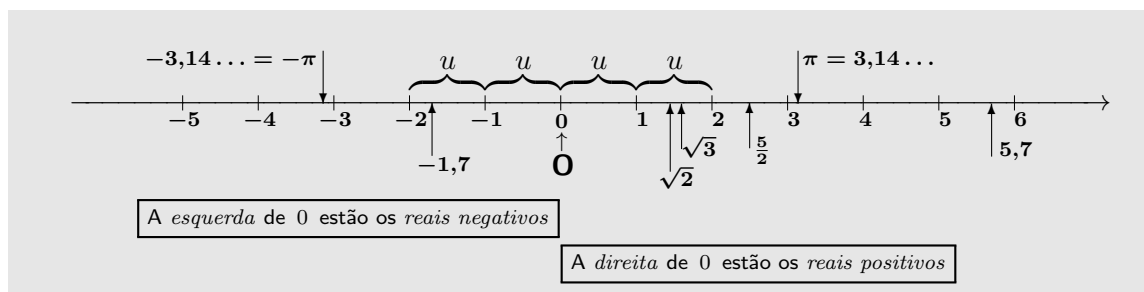
☞ *Dados dois pontos P, Q da reta, ocorre uma e apenas uma das três alternativas*:

- *P e Q coincidem*
- *P está à direita de Q*
- *P está à esquerda de Q.*

A reta munida de uma orientação é dita *reta orientada*.

Fixemos agora uma reta orientada (dita, simplesmente, *reta*), um ponto **O** sobre ela (chamado de *origem*) e um segmento de reta u (chamado de *unidade de comprimento*), como mostrados na figura a seguir. Com esses ingredientes a reta é dita *reta real* ou *eixo real*.

Com esses três objetos e algumas construções geométricas vamos localizar na reta os inteiros, os racionais e números irracionais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... etc. Vamos também utilizar *estimativas* para ter uma idéia da localização de outros números, racionais ou irracionais, na reta. No

momento, apesar de não termos ainda uma idéia precisa sobre a representação dos números reais como pontos da reta real, sabemos entender com clareza o diagrama a seguir.

O número real *zero* não é positivo, nem negativo.

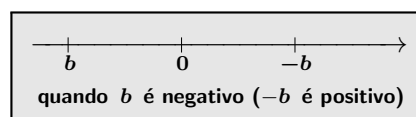
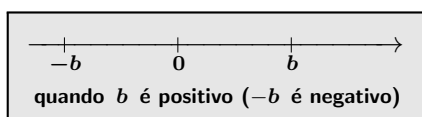
Parece *magia*, mas a escolha da orientação, da unidade u e da origem O determinam na reta, de forma precisa, a posição de cada um dos números reais, racionais e irracionais. Além disso, a cada ponto da reta corresponde um e apenas um número real. Isso significa que números reais e pontos da reta estão em *bijeção*. No entanto, registre-se, transformar essa *magia* em *realidade matemática* é algo nada elementar. Nesse sentido, a reta munida de orientação, origem e unidade de comprimento é uma *fotografia* do conjunto dos números reais.

Cada número real é entendido como a *coordenada* do ponto da reta que o representa.

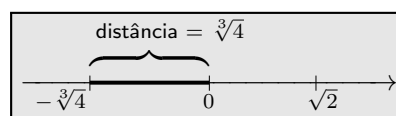
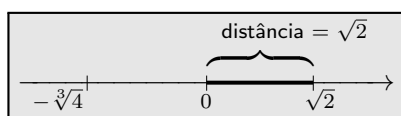
Uma propriedade importante, dita propriedade *arquimediana*, dos números reais é a seguinte:

na reta sempre existe um número inteiro à direita de um número real dado.

Repare, no diagrama acima, que 2 e -2 estão *eqüidistantes da origem*, isto é, estão à uma mesma *distância* da origem. Essa distância vale 2. Lembre-se que distância é sempre positiva ou nula.

Assim como 2 e -2, os números b e $-b$ estão eqüidistantes da origem **O** conforme mostrado nos diagramas a seguir. Dizemos que b e $-b$ são *simétricos* em relação a origem.

Aliás, quanto vale a distância de b à origem?

Atenção! Não podemos dizer que vale b pois b pode ser negativo. Não podemos dizer que vale $-b$ pois $-b$ pode ser negativo. No entanto, nossa intuição responderá :

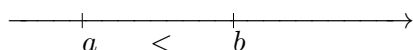
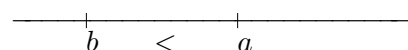
☞ a distância de $\sqrt{2}$ a origem vale $\sqrt{2}$; ☞ a distância de $-\sqrt[3]{4}$ a origem vale $\sqrt[3]{4}$.

Para apresentarmos a noção de distância entre números reais, passemos antes às noções de maior e menor, e sua relação com direita e esquerda.

3 Direita e esquerda × maior e menor

Agora que já identificamos números reais com pontos da reta, podemos traduzir as noções de direita e esquerda, como relações entre números reais.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ diremos:

☞ a é *menor* do que b quando a está à esquerda de b e escrevemos $a < b$;

$a \quad < \quad b$

☞ a é *maior* do que b quando a está à direita de b e escrevemos $a > b$.

As relações de menor e maior são ditas *relações de ordem* entre os números reais.
As propriedades de direita e esquerda, vistas anteriormente, tomam a seguinte forma:

☞ $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b < c \implies a < c}$ ☞ $\boldsymbol{a < b \iff b > a}$

☞ Dados $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, ocorre uma e apenas uma das três alternativas:
- $\boldsymbol{a = b}$
- $\boldsymbol{a < b}$
- $\boldsymbol{a > b}$

Escrevemos $a \leq b$ quando $a < b$ ou $a = b$, e $a \geq b$ quando $a > b$ ou $a = b$ e temos:

- $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{b \leq c \implies a \leq c}$
- $\boldsymbol{a \leq b \iff b \geq a}$

Quando $a < b$ e $b < c$ escrevemos $a < b < c$. Nesse caso dizemos que a e c são *estimativas* para b. Com significado análogo, escrevemos: $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$.

Note que:

- $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{b < c \implies a < c}$
- $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b \leq c \implies a < c}$

Podemos visualizar essas propriedades geometricamente. Isso é mostrado nas figuras a seguir.

Nas três representações geométricas mostradas anteriormente, o número c está sempre à direita do número a.

Também nos referimos a $a < b$, $a \leq b$, $a > b$ e $a \geq b$ como *desigualdades*.

Exemplos

Nos exemplos a seguir $x\,,y$ e z representam números reais.

- $2 < 3$; $-4 < -3$; $3 < \pi < 4$.
- $1 < \sqrt{2} \leq 2$; $\sqrt{3} \leq 2 < \sqrt{5}$.
- $3 \leq 3$; $3 \leq 4$.
- De $x < 3$ e $3 < \pi$ segue que $x < \pi$.
- $x < \sqrt{2} + y \iff \sqrt{2} + y > x$.
- De $x > y + 1$ e $y + 1 \geq \pi$ segue que $x > \pi$.
- Se $z \leq x$ e $x < \pi$ então $z < \pi$.
- De $x < 2$ segue que $x < \pi$ pois $2 < \pi$.
- Se $x \geq 0$ então $x \geq -1$ pois $0 \geq -1$.
- Se $2x \leq 5$ e $5 \leq y$ então $2x \leq y$.
- $x + 1 < z$ e $z < \sqrt{2} \implies x + 1 < \sqrt{2}$.
- Se $x < y$ e $y \leq 2$ então $x < 2$.
- $x \leq y$ e $y \leq -\sqrt{2} \implies x \leq -\sqrt{2}$.
- $z^2 \leq \sqrt{3} \iff \sqrt{3} \geq z^2$.

Atenção!

Volte à página 13 da Lição 1 para melhor entender o que vamos explicar agora.

A afirmação $3 \leq 3$ significa:

$$\underbrace{3 \text{ é menor do que } 3}_{p} \ \textit{ou} \ \underbrace{3 \text{ é igual a } 3}_{q}.$$

A afirmação p é falsa $(3 < 3)$ e a afirmação q é verdadeira $(3 = 3)$. Portanto a afirmação $(\,p$ ou $q\,)$ acima é verdadeira.

A afirmação $3 \leq 4$ significa:

$$\underbrace{3 \text{ é menor do que } 4}_{p} \ \textit{ou} \ \underbrace{3 \text{ é igual a } 4}_{q}.$$

A afirmação p é verdadeira $(3 < 4)$ e a afirmação q é falsa $(3 = 4)$. Portanto a afirmação $(\,p$ ou $q\,)$ acima é verdadeira.

Para finalizar esta seção recolocamos a propriedade arquimediana dos números reais:

dado $b \in \mathbb{R}$ *existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n > b$.

4 Módulo

A *distância* de um número real b a origem é denotada por $|b|$ e vale:

$$|b| := \begin{cases} b & \text{quando } b > 0 \\ 0 & \text{quando } b = 0 \\ -b & \text{quando } b < 0. \end{cases}$$

Dizemos que $|b|$ é o *módulo* ou *valor absoluto* do número real b. Entendemos também que $|b|$ mede o *comprimento* do segmento de reta de 0 a b quando $b \neq 0$. Note na definição acima que $|b|$ é sempre positivo, a menos que b seja nulo.

Exemplos

❄ Distância de 2 a origem $= |2| = 2$;

❄ Distância de $\frac{2}{3}$ a origem $= \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$;

❄ Distância de $\sqrt{2}$ a origem $= |\sqrt{2}\,| = \sqrt{2}$;

❄ Distância de -4 a origem $= |-4| = -(-4) = 4$;

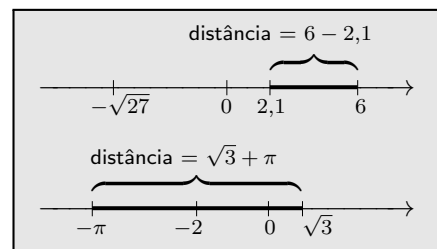
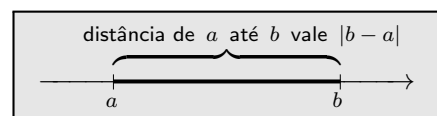
❄ Distância de $-\frac{7}{5}$ a origem $= \left| -\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$.

Da mesma forma como pensamos na distância de um número real a origem, podemos imaginar o que deve ser a distância entre dois números reais. Por exemplo, muito provavelmente nossa intuição dirá :

☞ A distância de $2{,}1$ a 6 deve ser $6 - 2{,}1$;

☞ A distância de $-\sqrt{27}$ a $2{,}1$ será $2{,}1 + \sqrt{27}$;

☞ A distância de $-\pi$ a $\sqrt{3}$ vale $\sqrt{3} + \pi$;

☞ A distância de $-\pi$ a -2 vale $\pi - 2$.

Assim, a distância entre dois pontos distintos da reta será: *número maior - número menor.* Ou seja:

$$\textit{Distância de } a \textit{ até } b := \begin{cases} b - a & \text{quando } b > a \\ 0 & \text{quando } b = a \\ a - b & \text{quando } a > b. \end{cases}$$

Comparando a definição acima com a definição de valor absoluto concluímos que a distância de a até b vale $|b - a|$. Voltando aos exemplos de distância entre dois pontos, dados acima, temos :

☞ A distância de $2{,}1$ até 6 vale $|6 - 2{,}1| = |3{,}9| = 3{,}9$;

☞ A distância de $-\sqrt{27}$ à $2{,}1$ vale $|2{,}1 - (-\sqrt{27})| = |2{,}1 + \sqrt{27}| = 2{,}1 + \sqrt{27}$;

☞ A distância de 2π à $-\sqrt{3}$ vale $|(-\sqrt{3}\,) - 2\pi| = |-(2\pi + \sqrt{3}\,)| = 2\pi + \sqrt{3}$;

☞ A distância de -2π à -2 vale $|-2 - (-2\pi)| = |2\pi - 2| = 2\pi - 2$ pois $2\pi > 2$.

☞ A distância de 3 à $-5{,}1$ vale $|-5{,}1 - 3| = |-8{,}1| = 8{,}1$.

Outra forma de apresentar $|b|$ e $|b-a|$ é a seguinte :

$$|b| = \begin{cases} b & \text{quando } b \geq 0 \\ -b & \text{quando } b \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad |b-a| = \begin{cases} b-a & \text{quando } b \geq a \\ a-b & \text{quando } a \geq b\,. \end{cases}$$

Entendemos que $|b-a|$ mede o comprimento do segmento de reta de a até b quando $a \neq b$.

4.1 Propriedades do módulo

Dentre as propriedades do módulo de números reais, destacamos as seguintes :

1. $|a| \geq 0$. Além disso: $|a| = 0 \iff a = 0$;

2. $|a| = |b| \iff a = \pm\, b$ (que significa : $a = b$ ou $a = -b$);

3. $|a \times b| = |a| \times |b|$;

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ quando $b \neq 0$.

A primeira e a segunda propriedades podem ser úteis na *resolução de equações elementares* (veja exemplos a seguir) enquanto que as outras podem nos ajudar na simplificação de expressões.

Observe que da propriedade (3) segue que:

$$|-b| = |(-1) \times b| = |-1| \times |b| = |b| \quad , \quad \text{para todo} \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

Conseqüentemente,

$$|b-a| = |-(a-b)| = |a-b| \quad , \quad \text{para todo} \quad a\,,b \in \mathbb{R}\,.$$

A igualdade acima nos diz que a distância de a até b é igual a distância de b até a. Fato este que, muito provavelmente, nossa intuição matemática já havia detectado.

Exemplos

Para $x \in \mathbb{R}$ temos :

❄ $|x-2| = 0 \iff x-2=0 \iff x=2.$

❄ $|1-x| = |2x| \iff 1-x = \pm 2x \iff 1-x = 2x$ ou $1-x=-2x \iff x = \frac{1}{3}$ ou $x=-1.$

❄ $|x^2+1| = x^2+1$, pois $x^2+1 \geq 0.$

❄ $\big||x|\big| = |x|$, pois $|x| \geq 0$.

❄ $|2\,x| = |2|\,|x| = 2\,|x|.$

❄ $\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{|x+1|}{|\sqrt{2}|} = \dfrac{|x+1|}{\sqrt{2}}.$

❄ $\left|\dfrac{x}{3}\right| = \dfrac{|x|}{|3|} = \dfrac{|x|}{3} = \dfrac{1}{3}\,|x|.$

❄ $\left|\dfrac{x-1}{x^2+1}\right| = \dfrac{|x-1|}{x^2+1}$, pois $x^2+1 > 0$.

5 Intervalos da reta

Sejam $a\,,\,b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. *Intervalos da reta* ou, simplesmente, *intervalos* são os subconjuntos da reta listados a seguir. Os números a e b são as *extremidades* dos intervalos.

Notação	Definição	Representações gráficas
$[\,a\,,b\,]$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x \leq b\}$	a b
$(a\,,b)$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x < b\}$	a b
$[\,a\,,b)$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x < b\}$	a b
$(a\,,b\,]$	$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x \leq b\}$	a b

Esses intervalos são *intervalos limitados de comprimento* $b-a$. O intervalo[1] $(\,a\,,b\,)$ é um *intervalo aberto* enquanto que $[\,a\,,b\,]$ é um *intervalo fechado.*

[1]Não confunda com o par ordenado $(\,a\,,b\,)$ para o qual usamos a mesma notação. É o contexto no qual estamos falando desses dois objetos (par ordenado ou intervalo aberto) que permitirá destinguir as notações.

Notação	Definição	Representações gráficas
$(-\infty\,,b\,]$	$\{x\in\mathbb{R}\,;\ x\leq b\}$	
$(-\infty\,,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,;\ x< b\}$	
$[\,a\,,\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,;\ x\geq a\}$	
$(a\,,\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,;\ x> a\}$	

Os intervalos da última tabela são intervalos *não limitados*. A reta também é entendida como um intervalo não limitado. Nesse caso usamos a notação $(-\infty\,,\infty)$ para representá-la.

Os símbolos[2] ∞ e $-\infty$ não representam números reais. Por isso, quando descrevemos um intervalo não limitado os símbolos ∞ e $-\infty$ sempre aparecem acompanhados de um parênteses e nunca de um colchete. Como vimos, nas definições de intervalos, a presença de um colchete na extremidade do intervalo indica que essa extremidade *pertence ao intervalo*. A presença de um parênteses indica que a extremidade *não pertence ao intervalo*.

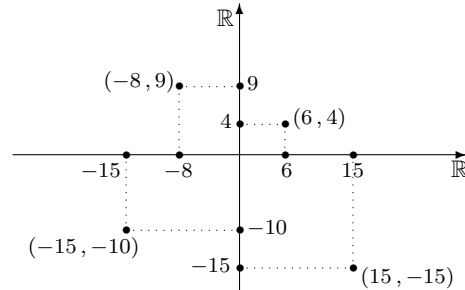
Da forma como definido, um intervalo pode ser vazio, por exemplo, o intervalo aberto $(\,0\,,0\,)$. Também pode se reduzir a um ponto, como por exemplo, o intervalo fechado $[\,0\,,0\,]$.

Um intervalo é *não degenerado* quando contém mais de um ponto. Conseqüentemente, intervalos não degenerados contêm intervalos abertos não vazios !!! Prove isso.

6 O plano cartesiano

Sabendo localizar pontos na reta $\mathbb{R}$ podemos localizar pontos no produto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Para isso, fixemos em ambas as cópias de $\mathbb{R}$ uma mesma origem, uma mesma unidade de comprimento e orientações como indicado na figura a seguir. Com esses ingredientes, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é dito *plano cartesiano*. Sua representação gráfica é mostrada na figura a seguir, onde marcamos alguns pontos. O conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ também é denotado por $\mathbb{R}^2$. Quando $(\,a\,,b\,)\in\mathbb{R}^2$ dizemos que a é a sua *abcissa* e que b é a sua *ordenada*. O ponto $(\,0\,,0\,)$ é dito *origem* de $\mathbb{R}^2$.

[2] Também é usado o símbolo $+\infty$ no lugar de ∞.

Para não sobrecarregar a figura o ponto $(6\,,0) \in \mathbb{R}^2$ é representado apenas pelo número 6 que é sua abcissa. Pela mesma razão o ponto $(0\,,4) \in \mathbb{R}^2$ é representado pelo número 4 que é sua ordenada. Isso é uma convenção: regra geral, ponto que está sobre o eixo das abcissas é representado apenas pelo valor da sua abcissa e o que está sobre o eixo das ordenadas é representado pelo valor da sua ordenada.

Exercícios resolvidos

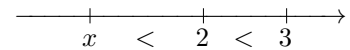
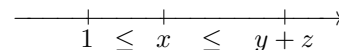
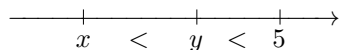
1. **Quanto valem as distâncias dos números reais 3 , $-\sqrt{5}$, $-4{,}01$ e 0 a origem ?**

Solução Por definição de distância de um número real a origem temos que:

- a distância de 3 a origem vale $|3| = 3$;
- a distância de $-\sqrt{5}$ a origem vale $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$;
- a distância de $-4{,}01$ a origem vale $|-4{,}01| = 4{,}01$;
- a distância de 0 a origem vale $|0| = 0$.

2. **Se $x\,,y\,,z \in \mathbb{R}$, quais das afirmações a seguir são verdadeiras ? Use as propriedades enunciadas na seção 3 para justificar suas respostas.**

(a) $x < 2 \implies x < 3$;
(b) $x < y$ e $y < 5 \implies x < 5$;
(c) $1 \leq x$ e $x \leq y + z \implies 1 \leq y + z$;
(d) $x \leq -1$, $-1 \leq z$ e $z \leq y - 1 \implies x \leq y - 1$;
(e) $x \leq y$ e $y < 5 \implies x \leq 4$.

Solução De $x < 2$ e $2 < 3$ segue da propriedade transitiva que $x < 3$. Isso mostra que a afirmação do item (a) é VERDADEIRA.

Nos itens (b) e (c) as afirmações são VERDADEIRAS. Elas são aplicações imediatas da propriedade de transitividade da relação de menor e da relação de menor ou igual.

A afirmação do item (d) também é VERDADEIRA. É a transitividade usada duas vêzes. Vejamos:

- De $x \leq -1$ e $-1 \leq z$ segue que $x \leq z$.

- Por outro lado, de $x \le z$ e $z \le y-1$ segue que $x \le y-1$,

como queríamos demonstrar. Para vizualizar a solução, vide o diagrama a seguir.

$$x \le -1 \le z \le y-1$$

No último item, de $x \le y$ e $y < 5$ podemos concluir que $x < 5$. No entanto, o exercício pede uma outra conclusão. Vamos mostrar que a afirmação no item (e) é FALSA. Para isso, precisamos exibir valores de $x \in \mathbb{R}$ e de $y \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições $x \le y$ e $y < 5$ mas não satisfazendo a condição $x \le 4$. Um tal exemplo pode ser: $x = 4{,}5$ e $y = 4{,}7$. Assim, temos:

$$x = 4{,}5 \le 4{,}7 = y \;\text{ e }\; y = 4{,}7 < 5 \;\text{ mas, no entanto, }\; x = 4{,}5 \not\le 4\,.$$

Um tal exemplo é dito um *contra-exemplo* para a afirmação do item (e).

☛ **Pergunta-se:** E se dissséssemos, no item (e), que x e y são números inteiros ? Nessa nova condição a afirmação do item (e) seria FALSA ?

☛ **Atenção:** Note que escrevemos um pouco acima $4{,}5 \not\le 4$ para indicar que a afirmação "$4{,}5$ *é menor ou igual a* 4" é falsa. Ou seja, $4{,}5 \not\le 4 \iff 4{,}5 > 4$. Aproveitando a oportunidade, pergunta-se: qual é a negação da afirmação "$a < b$", ou seja, como escrever a afirmação "a *não é menor do que* b" em termos das desigualdades que estudamos ? Vejamos: se a não é menor do que b então nos restam duas alternativas: $a > b$ ou $a = b$. Portanto: $a \not< b \iff a \ge b$.

3. Calcule:

(a) $|2-\pi|$ **(b)** $|2-3{,}01|$ **(c)** $|-1{,}1-3{,}2|$
(d) $|-0{,}3+2{,}1|$ **(e)** $|\sqrt{3}-\sqrt{2}+1|$ **(f)** $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

Solução Temos que:

(a) $|2-\pi| = \pi - 2$; pois $\pi > 2$

(b) $|2-3{,}01| = 3{,}01-2 = 1{,}01$;

(c) $|-1{,}1-3{,}2| = |-4{,}3| = 4{,}3$;

(d) $|-0{,}3+2{,}1| = 2{,}1-0{,}3 = 1{,}8$;

(e) $|\sqrt{3}-\sqrt{2}+1| = \sqrt{3}-\sqrt{2}+1$ pois $\sqrt{3} > \sqrt{2}$;

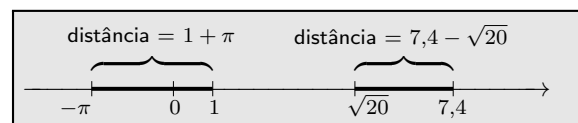
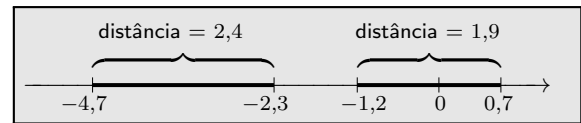
(f) $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}| = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ pois $1+\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

4. Calcule a distância entre os números dados e represente graficamente essa distância.

(a) $\sqrt{20}$ **e** $7{,}4$ **(b)** $-\pi$ **e** 1 **(c)** $0{,}7$ **e** $-1{,}2$ **(d)** $-2{,}3$ **e** $-4{,}7$.

Solução Façamos os cálculos:

(a) A distância de $\sqrt{20}$ a $7{,}4$ é dada por:
$|\sqrt{20}-7{,}4| = 7{,}4-\sqrt{20}$, pois $7{,}4 > \sqrt{20}$.

(b) A distância de $-\pi$ a 1 vale:
$|-\pi-1| = 1+\pi$.

(c) A distância de $0{,}7$ a $-1{,}2$ é dada por: $|0{,}7-(-1{,}2)| = |0{,}7+1{,}2| = 1{,}9$.
(d) A distância de $-2{,}3$ a $-4{,}7$ é dada por: $|-2{,}3-(-4{,}7)| = |4{,}7-2{,}3| = 4{,}7-2{,}3 = 2{,}4$.

5. **Determine as soluções reais das equações:**
(a) $|x+1| = 0$ **(b)** $|2x-3| = 0$ **(c)** $|\pi - x| = 0$ **(d)** $|3-x^2| = 0$ **.**

Solução Da propriedade (1) do módulo, segue que:

(a) $|x+1| = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$

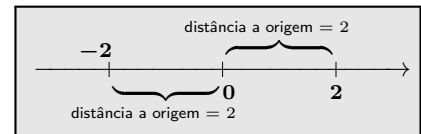
(b) $|2x-3| = 0 \iff 2x-3 = 0 \iff x = 3/2.$

(c) $|\pi - x| = 0 \iff \pi - x = 0 \iff x = \pi.$

(d) $|3-x^2| = 0 \iff 3-x^2 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}\,.$

6. **Quais são os números reais cuja distância a origem vale 2? Dito de outra forma, resolva a equação $|x| = 2$.**

Solução Os pontos da reta cuja distância a origem vale 2 são os pontos 2 e -2. Ou seja,

$$|x| = 2 \iff x = \pm 2\,.$$

7. **Resolva as equações, sabendo que $x \in \mathbb{R}$:**
(a) $|x+1| = 2$ **(b)** $|2x+3| = 4$ **(c)** $|\pi - x| = 1$
(d) $|3-x^2| = 2$ **(e)** $|2-3x| = |x|$ **(f)** $|x+2| = |2x-1|$ **.**

Solução Usando a propriedade (2) do módulo, obtemos:

(a) $|x+1| = 2 \iff |x+1| = |2| \iff x+1 = \pm 2 \iff x = -1 \pm 2$
$\iff x = 1$ ou $x = -3$.

(b) $|2x+3| = 4\ (= |4|) \iff 2x+3 = \pm 4 \iff 2x = -3 \pm 4 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{7}{2}$.

(c) $|\pi - x| = 1\ (= |1|) \iff \pi - x = \pm 1 \iff \pi \mp 1 = x \iff x = \pi - 1$ ou $x = \pi + 1$.

(d) $|3-x^2| = 2 \iff 3-x^2 = \pm 2 \iff x^2 = 3 \mp 2 \iff x^2 = 1$ ou $x^2 = 5$.

Portanto: $|3-x^2| = 2 \iff x \in \{1\,, -1\,, \sqrt{5}\,, -\sqrt{5}\,\}$.

(e) $|2-3x| = |x| \iff 2-3x = \pm x \iff 2 = 3x \pm x \iff 4x = 2$ ou $2x = 2$.

Logo: $|2-3x| = |x| \iff x = 1/2$ ou $x = 1$.

(f) $|x+2| = |2x-1| \iff x+2 = \pm(2x-1) \iff x+2 = 2x-1$ ou $x+2 = -2x+1$.

Conseqüentemente $x = 3$ ou $x = -1/3$.

8. **Dê uma equação cujas soluções são os pontos da reta cuja distância à 2 vale 5. Resolva tal equação.**

Solução Seja x um tal ponto. Sua distância à 2 vale $|x-2|$ conseqüentemente, uma equação que descreve os pontos em questão é $|x-2| = 5$. Para resolver tal equação, usamos a propriedade (2) do módulo e obtemos:

$$|x-2| = 5 = (|5|) \iff x-2 = \pm 5 \iff x = 2 \pm 5 \iff x = 7 \text{ ou } x = -3.$$

Assim, as soluções da equação são -3 e 7.

9. **Dê uma equação que tem como soluções apenas os pontos da reta cuja distância a -2 é o triplo da distância a 8. Resolva tal equação.**

Solução Seja x um tal ponto. Temos que:

- A distância de x ao ponto -2 vale: $|x-(-2)| = |x+2|$;
- A distância de x ao ponto 8 vale: $|x-8|$.

Logo, a equação $|x+2| = 3\,|x-8|$ descreve os pontos em questão. Resolvendo-a, temos:

$$\begin{aligned}
|x+2| = 3\,|x-8| &\iff |x+2| = |3x-24| \iff x+2 = \pm(3x-24) \\
&\iff x+2 = 3x-24 \text{ ou } x+2 = -(3x-24) \\
&\iff 2x = 26 \text{ ou } x+2 = 24-3x \\
&\iff x = 13 \text{ ou } 4x = 22 \\
&\iff x = 13 \text{ ou } x = 11/2.
\end{aligned}$$

Assim, as soluções da equação em estudo são 13 e $11/2$.

10. **Dê uma equação que tenha como soluções reais apenas os números reais cuja distância ao seu quadrado vale 20.**

Solução Denotemos por x um tal número. A distância de x ao seu quadrado x^2 vale $|x-x^2|$. Conseqüentemente os números procurados são, exatamente, as soluções da equação $|x-x^2| = 20$.

11. **Determine uma inequação que tenha como soluções reais apenas os pontos da reta com a seguinte propriedade: a distância do ponto ao dobro do seu quadrado é maior do que a distância desse ponto a origem.**

Solução Denotemos por y um tal ponto. Temos que:

- o dobro do quadrado de y vale $2y^2$;
- a distância de y ao dobro do seu quadrado vale $|y-2y^2|$;
- a distância de y a origem vale $|y|$.

Conseqüentemente, se a distância de y ao dobro do seu quadrado deve ser maior do que a distância de y a origem, então devemos ter

$$|y - 2y^2| > |y| .$$

12. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ? Justifique suas respostas.

(a) $|x| = 2 \implies x = 2$;
(b) $x > y \implies |x| > |y|$;
(c) $x < 0 \implies |x| + x = 0$.

Solução Vamos usar as propriedades do módulo e das desigualdades estudadas nesta Lição.

(a) A afirmação é FALSA , pois x pode ser igual a -2. Isto é, de $|x| = 2$ não podemos concluir que $x = 2$, ou seja, de $|x| = 2$ não segue como consequência que $x = 2$.

(b) Essa afirmação é FALSA , pois $0 > -1$ mas, no entanto, $|0|$ *não é maior do que* $|-1| = 1$.

(c) De $x < 0$ segue que $|x| = -x$. Conseqüentemente $|x| + x = 0$. Logo, a afirmação é VERDADEIRA.

13. Mostre que $|b|^2 = b^2 = |b^2|$ para todo b real.

Solução Sabemos que $b^2 \geq 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, $|b^2| = b^2$. Agora, usando a terceira propriedade do módulo obtemos:

$$b^2 = |b^2| = |b \times b| = |b| \times |b| = |b|^2 \text{ para todo } b \in \mathbb{R} ,$$

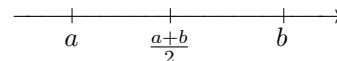
demonstrando assim, o que pretendíamos.

$$\boxed{|b^2| = |b|^2 = b^2}$$

14. Sejam a e b números reais distintos. Determine o *ponto médio* desses dois pontos.

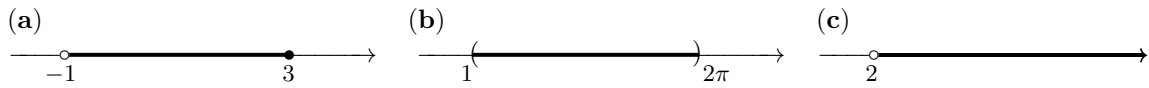
Solução Seja λ esse ponto médio. O que caracteriza λ é o fato dele estar a uma mesma distância de a e de b . Logo, ele é solução da equação:

$$|\lambda - a| = |\lambda - b| \iff \lambda - a = \pm(\lambda - b) \iff \lambda - a = \lambda - b \text{ ou } \lambda - a = -\lambda + b$$
$$\iff a = b \text{ ou } 2\lambda = a + b .$$

Como $a \neq b$ resta então $\lambda = (a + b)/2$ como solução da equação inicial. Portanto, o ponto médio λ definido por a e b é $\lambda = (a + b)/2$. Ou seja, o ponto médio é a *média aritmética* dos números a , b .

15. Represente graficamente os intervalos listados abaixo e verifique se os números 3 , π , $\sqrt{2}$, $3/2$, $-11/7$ pertencem a tais intervalos.

(a) $(-1 , 3]$ **(b)** $(1 , 2\pi)$ **(c)** $(2 , \infty)$.

Solução Graficamente, temos:

(a) -1 3 (b) 1 2π (c) 2

Para completar a solução afirmamos que:

(a) $3 \in (-1\,,3\,]$; $\pi \notin (-1\,,3\,]$; $\sqrt{2} \in (-1\,,3\,]$; $3/2 \in (-1\,,3\,]$; $-11/7 \notin (-1\,,3\,]$.
(b) $3 \in (1\,,2\pi)$; $\pi \in (1\,,2\pi)$; $\sqrt{2} \in (1\,,2\pi)$; $3/2 \in (1\,,2\pi)$; $-11/7 \notin (1\,,2\pi)$.
(c) $3 \in (2\,,\infty)$; $\pi \in (2\,,\infty)$; $\sqrt{2} \notin (2\,,\infty)$; $3/2 \notin (2\,,\infty)$; $-11/7 \notin (2\,,\infty)$.

16. Determine os números reais x , y , z indicados pelas setas dos diagramas a seguir.

Nos diagramas acima os intervalos foram divididos em partes iguais.

Solução No primeiro diagrama o intervalo $[\,0\,,1\,]$ foi dividido em 4 partes iguais. Idem para os outros intervalos nessa figura. Assim, cada subintervalo mede $\frac{1}{4}$. Consequentemente:

$$y = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \quad ; \quad x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad z = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

No segundo diagrama, o intervalo $[\,8{,}6\,,8{,}7\,]$ (cujo comprimento é $0{,}1$) foi dividido em 5 partes iguais. Idem para $[\,8{,}5\,,8{,}6\,]$ e $[\,8{,}7\,,8{,}8\,]$. Portanto, cada subintervalo tem comprimento igual a $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$.

Concluímos então que:

$y = 8{,}5 + 2 \times 0{,}02 = 8{,}54$; $x = 8{,}6 + 3 \times 0{,}02 = 8{,}6 + 0{,}06 = 8{,}66$; $z = 8{,}8 - 0{,}02 = 8{,}78$.

17. Faça estimativas para os números x , y , z indicados pelas setas dos diagramas a seguir.

0 1 — y x z 8,6 8,7 8,8 — y x z

Nos diagramas acima os intervalos foram divididos em partes iguais.

Solução Como no exercício anterior, o intervalo $[\,0\,,1\,]$ foi dividido em 4 partes iguais. Cada subintervalo mede $\frac{1}{4}$. Conseqüentemente podemos estabelecer as seguintes estimativas:

$$-\frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{4} < y < -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} < x < 1 \quad ; \quad \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} < z < 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}\,.$$

Ou seja,

$$-\frac{3}{4} < y < -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{4} < x < 1 \quad ; \quad \frac{5}{4} < z < \frac{3}{2}\,.$$

Novamente, como vimos no exercício anterior, o intervalo $[\,8{,}6\,,8{,}7\,]$ foi dividido em 5 partes iguais. Assim, cada subintervalo tem comprimento $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$.

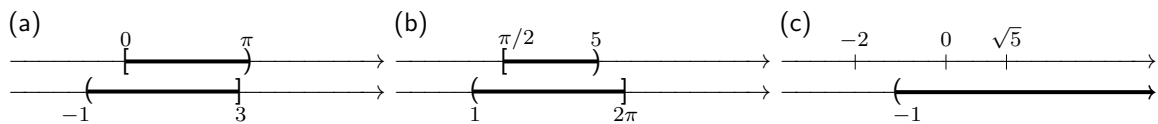
Podemos então concluir as seguintes estimativas para x , y , z:

$$\begin{aligned} 8{,}54 = 8{,}5 + 2 \times 0{,}02 &< y < 8{,}5 + 3 \times 0{,}02 = 8{,}56 \\ 8{,}64 = 8{,}6 + 2 \times 0{,}02 &< x < 8{,}6 + 3 \times 0{,}02 = 8{,}66 \\ 8{,}76 = 8{,}7 + 3 \times 0{,}02 &< z < 8{,}8 - 0{,}02 = 8{,}78. \end{aligned}$$

☛ **Nota:** Quando apresentamos uma estimativa do tipo $a < x < b$ para x, estamos afirmando que $x \in (a , b)$. No exercício acima, concluímos que $x \in (8{,}64\, , 8{,}66)$, que $y \in (8{,}54\, , 8{,}56)$ e que $z \in (8{,}76\, , 8{,}78)$.

18. Escreva os conjuntos a seguir como uma união de intervalos disjuntos. Faça isso de tal maneira que os intervalos tenham o maior comprimento possível.

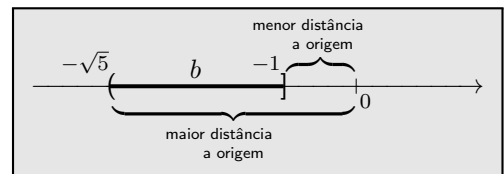
(a) $(-1 , 3\,] \cap [\,0 , \pi)$ **(b)** $(1\, , 2\pi] - [\frac{\pi}{2} , 5\,)$ **(c)** $(-1\, , \infty) - \left\{-2 , 0 , \sqrt{5}\right\}$.

Solução Graficamente temos as seguintes situações.

Com essas representações gráficas, fica fácil escrever os conjuntos como união de intervalos possuindo o maior comprimento possível. Assim, temos:

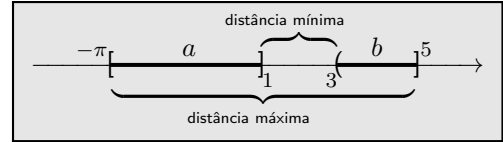
$$(-1 , 3\,] \cap [\,0 , \pi) = [\,0 , 3\,] \quad ; \quad (1 , 2\pi\,] - [\pi/2 , 5\,) = (1 , \pi/2\,) \cup [\,5 , 2\pi\,] \quad \text{e}$$

$$(-1\, , \infty) - \left\{-2 , 0 , \sqrt{5}\right\} = (-1 , 0) \cup \left(0 , \sqrt{5}\right) \cup (\sqrt{5} , \infty)\,.$$

19. Sabendo que $b \in (-\sqrt{5} , -1\,]$ determine o menor[3] intervalo da reta que contém $|b|$. Faça uma figura que represente claramente sua solução.

Solução O módulo de um número real é a distância desse número a origem. A distância de qualquer ponto b do intervalo $(-\sqrt{5} , -1\,]$ a origem é *maior ou igual* a distância de -1 a origem, pois $-1 \in (-\sqrt{5} , -1\,]$, e é *menor* do que a distância de $-\sqrt{5}$ a origem, já que $-\sqrt{5} \notin (-\sqrt{5} , -1\,]$. Conseqüentemente concluímos que $1 \leq |b| < \sqrt{5}$, ou seja, o menor intervalo procurado é o intervalo $[\,1 , \sqrt{5}\,)$.

20. Sabendo que $a \in [\,-\pi\, , 1\,]$ e $b \in (3\, , 5\,]$ faça uma estimativa para $|a - b|$. Faça uma figura que represente sua solução de forma clara.

[3] Sem fugir da nossa intuição, dizemos que um conjunto A é *menor* que um conjunto B quando $A \subsetneq B$. Dito de outra forma: um conjunto B é *maior* que um conjunto A quando $B \supsetneq A$.

Solução Façamos a representação gráfica dos intervalos em questão, como mostrado na figura ao lado. Sabemos que $|a-b|$ é a distância de a até b. A distância entre a e b é sempre *maior* do que a distância de 3 a 1, pois, $3 \notin (3,5]$, e é *menor ou igual* que a distância de 5 a $-\pi$ pois $-\pi \in [-\pi,1]$ e $5 \in (3,5]$. Logo, $2 < |b-a| \leq 5+\pi$.

21. Para cada par $a\,,b$ de números reais não nulos, forme o número $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$. Quais números podem ser assim formados ?

Solução Para saber o valor da expressão basta conhecer os sinais de a e de b. Temos as seguintes possibilidades:

- Ambos são positivos:
  nesse caso o valor da expressão será $3\ (=1+1+1)$;
- Um é positivo e o outro é negativo:
  nesse caso o valor da expressão será $-1\ (=-1+1-1 \quad \text{ou} \quad =1-1-1)$;
- Ambos são negativos:
  nesse caso o valor da expressão será $-1\ (=-1-1+1)$.

Portanto, os valores assumidos pela expressão são: 3 e -1 .

22. Sejam $a\,,b$ números reais. Sabendo que $|a-2|=b$ e $a<2$ pergunta-se: quanto vale $a-b$?

Solução Como $a<2$ temos que $|a-2|=-(a-2)=2-a$. Logo, $2-a=b$ e concluímos que $a=2-b$ ou seja $a-b=(2-b)-b=2-2b$. Portanto, $a-b=2-2b$.

23. Para quais valores não nulos de $x\in\mathbb{R}$ teremos que $\big|x-|x|\big|/x$ é um inteiro negativo ?

Solução Para que $\big|x-|x|\big|/x$ seja negativo devemos ter $x<0$ e nesse caso:

$$\frac{\big|x-|x|\big|}{x}=\frac{|x+x|}{x}=\frac{2\,|x|}{x}=\frac{2\,(-x)}{x}=-2\,.$$

Portanto, a expressão em estudo assume um valor negativo quando, e somente quando, $x<0$ e nesse caso, o valor da expressão será -2 .

24. Quanto vale $\Big|x-|x-1|\Big|$ quando $x\in(-\infty\,,0\,]$?

Solução Para $x\leq 0$ temos que $x-|x-1|\leq 0$. Logo,

$$\Big|x-|x-1|\Big|=-\big(x-|x-1|\big)=-x+|x-1|=-x-(x-1)=-x-x+1=1-2x\,.$$

25. Seja x um número real. Mostre que :

(a) $x > 2 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 2$ **;**

(b) $x < \pi \quad \Longrightarrow \quad x \leq \pi$ **.**

Solução Já abordamos esta questão no capítulo anterior. Aqui vamos retomá-la usando os novos conceitos que aprendemos nesta lição.

(a) De $x > 2$ segue que $x \in (2,\infty)$. Consequentemente, $x \in [2,\infty)$, pois $(2,\infty) \subset [2,\infty)$. Portanto, $x \geq 2$.

(b) De $x < \pi$ segue que $x \in (-\infty,\pi)$. Consequentemente, $x \in (-\infty,\pi]$, pois $(-\infty,\pi) \subset (-\infty,\pi]$. Portanto, $x \leq \pi$.

26. Para cada número real x defina

$$< x > := \begin{cases} 1 - x & \textbf{quando } x \geq 2 \\ 2 + |x| & \textbf{quando } x < 2. \end{cases}$$

(a) Calcule $< -2 >$, $< 2 >$ e $< 5 >$;

(b) Pergunta-se: $< 4x > = 4 < x >$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

Solução

(a) Da definição de $< x >$ segue que:

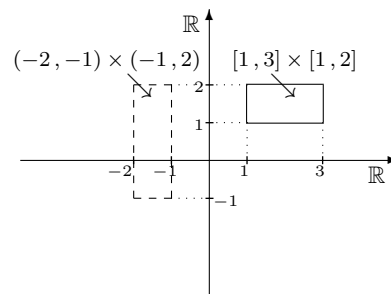
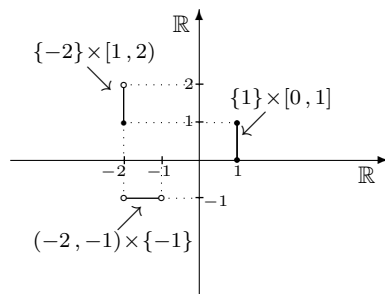
- $< -2 > = 2 + |-2| = 4$ pois $-2 < 2$;
- $< 2 > = 1 - 2 = -1$ pois $2 \geq 2$;
- $< 5 > = 1 - 5 = -4$ pois $5 \geq 2$.

(b) A resposta a essa pergunta é não, pois para $x = 1$ temos que:

- $< 4x > = < 4 \times 1 > = < 4 > = 1 - 4 = -3$ pois $4 \geq 2$;
- mas, no entanto, $4 < x > = 4 < 1 > = 4 \times (2 + |1|) = 12$.

27. Esboce no plano cartesiano os conjuntos

(a) $\{1\} \times [0,1]$ **(b)** $\{-2\} \times [1,2)$ **(c)** $(-2,-1) \times \{-1\}$
(d) $[1,3] \times [1,2]$ **(e)** $(-2,-1) \times (-1,2)$ **.**

Solução Observe que o ponto $(-2,2)$ não faz parte do conjunto $\{-2\} \times [1,2)$ pois $-2 \notin [1,2)$. Além disso, os pontos $(-2,-1)$ e $(-1,-1)$ não fazem parte do conjunto $(-2,-1) \times \{-1\}$ pois -2 e -1 não pertencem ao intervalo $(-2,-1)$.

Note que do conjunto $[1,3]\times[1,2]$ fazem parte os pontos do retângulo desenhado em linha contínua e todos os pontos em seu interior. Do conjunto $(-2,-1)\times(-1,2)$ fazem parte apenas os pontos interiores ao retângulo desenhado em linha tracejada. Os pontos sobre esse retângulo não fazem parte do conjunto $(-2,-1)\times(-1,2)$.

Exercícios

1. Quais das frações a seguir estão na forma irredutível?

(a) $15/28$ (b) $90/147$
(c) $-675/968$ (d) $10.332/495.398$.

2. Calcule a distância à origem dos seguintes números reais:

(a) 3 (b) $\sqrt{3}-2{,}1$
(c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (d) $-4{,}2$
(e) $-\sqrt{5}$ (f) $2-\pi$.

3. Sejam $x\,,y\,,z\in\mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

(a) $x<2 \implies x\leq 2$;
(b) $x<1 \implies x\leq 0{,}99$;
(c) $x<-2 \implies x<-1{,}9$;
(d) $1<x$ e $x<y-2 \implies 1<y-2$;
(e) $3\leq x$ e $x<2y \implies 3<2y$.

4. Calcule:

(a) $|2-2{,}01|$ (b) $|1{,}1-\sqrt{2}|$
(c) $|\sqrt{3}-2|$ (d) $|-\sqrt{5}+1|$
(e) $|5{,}2-6{,}1|$ (f) $|\frac{1}{3}-\frac{2}{5}|$.

5. Calcule a distância entre os números dados.

(a) 2 e $3{,}4$ (b) π e $\sqrt{2}$
(c) -2 e $3{,}4$ (d) $-\pi$ e $-\sqrt{2}$
(e) -2 e $-3{,}4$ (f) $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{3}$.

6. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

(a) $|2x-1|=0$ (b) $|4-x^2|=0$
(c) $|3x+7|=0$ (d) $|5x^2+1|=0$
(e) $|\pi-2y|=0$ (f) $|3z+1|=0$.

7. Dê uma equação cujas soluções são os pontos da reta que são iguais ao seu próprio quadrado. Resolva tal equação.

8. Dê uma equação que tem como soluções apenas os pontos da reta cuja distância ao dobro do seu quadrado vale 5.

9. Resolva as seguintes equações, onde $x\in\mathbb{R}$:

(a) $|2x-1|=|x|$,
(b) $|4-x^2|=6$;
(c) $|3x+7|=|2x-1|$,
(d) $|2x-1|+|1-3x|=0$.

10. Quais das afirmações a seguir são falsas?

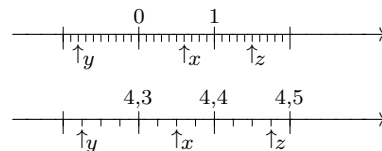
(a) $x\leq|x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(b) $x\geq-|x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(c) $x>x-2$ para todo $x\in\mathbb{R}$;
(d) $x+\pi\leq x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

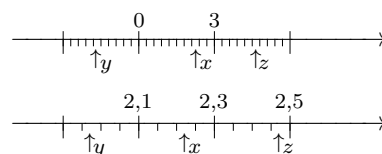
11. Sejam $x\,,y\in\mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

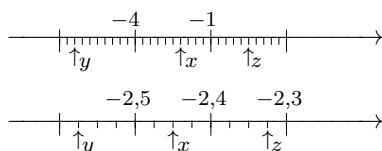
(a) $|x+y|=|x|+|y|$;
(b) $|2x|=x|2|$;
(c) $|x-y|=|x|-|y|$;
(d) $|x+2|=|x|+2$.

12. Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números 2 , π , $\frac{3}{7}$, $-\sqrt{5}$ pertencem a tais intervalos.

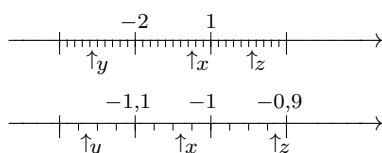
(a) $(-2\,,4)$ (b) $[\,1\,,5\,]$
(c) $[\,-3\,,3)$ (d) $(-\infty\,,2\,]$.

13. Determine os números reais $x\,,y\,,z$ indicados pelas setas dos diagramas a seguir.

Os intervalos que foram subdivididos o foram em partes iguais.

14. Em cada diagrama a seguir, faça estimativas para os números reais $x\,,y\,,z$ indicados pelas setas.

Os intervalos que foram subdivididos o foram em partes iguais.

15. Determine os números reais x, y, z indicados pelas setas dos diagramas a seguir. Dê a resposta na forma de uma fração irredutível.

Os intervalos que foram subdivididos o foram em partes iguais.

16. Em cada diagrama a seguir, faça estimativas para os números reais x, y, z indicados pelas setas. Dê a resposta na forma de frações irredutíveis.

−2 1
↑y ↑x ↑z
−1,1 −1 −0,9
↑y ↑x ↑z

Os intervalos que foram subdivididos o foram em partes iguais.

17. Escreva os conjuntos a seguir como uma união de intervalos disjuntos. Faça isso de tal forma que os intervalos tenham o maior comprimento possível.
(a) $(-2,3)\cap[\sqrt{2},4]$;
(b) $(1,4)\cup(2,5]$;
(c) $(2,\sqrt{5}]-\{2,3,\sqrt{5}\}$;
(d) $\big\{(-2,3)\cup(5,8]\big\}\cap[2,6]$.

18. Esboce os conjuntos:
(a) $[0,1]\times[0,1]$;
(b) $(0,1)\times(0,1)$;
(c) $[0,1)\times[0,1)$;
(d) $[0,1)\times(0,1]$.

19. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $[a,b]\times\{1\}$;
(2) $(a,b)\times\{1\}$;
(3) $[a,b)\times\{1\}$;
(4) $(a,b]\times\{1\}$.

20. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $\{1\}\times[a,b]$;
(2) $\{1\}\times(a,b)$;
(3) $\{1\}\times[a,b)$;
(4) $\{1\}\times(a,b]$.

21. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Esboce os conjuntos:
(1) $(a,b)\times(a,b)$;
(2) $[a,b)\times[a,b)$;
(3) $[a,b)\times(a,b]$;
(4) $\{c\}\times(a,b]$.

22. Dê uma equação cujas soluções sejam os pontos da reta cuja distância do seu quadrado a unidade, vale 5. Resolva essa equação.

23. Determine os pontos da reta cujo cubo de sua distância a origem vale 8.

24. Dê uma inequação cujas soluções são os pontos da reta cuja distância a 2 é menor que $\sqrt{3}$.

25. Dê uma inequação cujas soluções são os pontos da reta cuja distância a π é menor que o dobro de sua distância a 5.

26. Dê uma inequação cujas soluções são os pontos da reta cuja distância a $\sqrt{2}$ é maior ou igual ao quadrado de sua distância a 5.

27. Qual é a negação de "$>$", de "$\leq$" e de "$\geq$"?

28. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $|x| = b$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

29. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x| = b^2$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

30. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x| = |b| + 1$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

31. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|bx| = 1$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

32. Seja $b \in \mathbb{R}$. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|bx| = b$ e diga quantas são suas soluções, caso tais soluções existam.

33. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Sabendo que m/n é irredutível podemos concluir que n/m também é irredutível ?

34. Sejam a, b, c números reais. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|ax + b| = |c|$. Diga quantas soluções tal equação possui.

35. Dado $a \in \mathbb{R}$ pergunta-se: os conjuntos $\{a, -a\}$ e $\{a, -a, |a|, -|a|\}$ são iguais ou distintos ?

36. Determine uma equação que tenha como soluções somente os pontos da reta cujo cubo da distância ao ponto $\mathbf{-2}$ vale $\mathbf{8}$.

37. Sejam I e J intervalos da reta. Pergunta-se: $I \cup J$; $I \cap J$; $I - J$ são intervalos da reta ?

38. Determine os pontos da reta cuja distância ao ponto 2 é o triplo da distância ao ponto 8.

39. Dê uma equação que descreva os pontos da reta eqüidistantes dos pontos 1 e π. Resolva tal equação.

40. Mostre que todo intervalo da reta que é não degenerado contém um intervalo aberto não vazio.

41. Quanto vale a expressão $\Big|1 - |1 + x|\Big|$ quando $x \in (-\infty, -2]$?

42. Para cada terna a, b, c de números reais não nulos, forme o número $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$. Quais números podem ser assim formados ?

3

Operações

Iniciamos essa lição relembrando duas operações elementares sobre o conjunto dos números reais. São elas:

Adição: $a + b$ **Multiplicação:** $a \times b$ ou ab ou $a \cdot b$

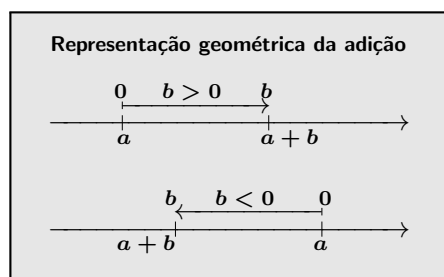
cujas notações usuais estão acima indicadas. Na próxima lição vamos relembrar as propriedades dessas operações. Agora, vamos nos ocupar da interpretação geométrica da soma e iniciar o estudo de simetrias.

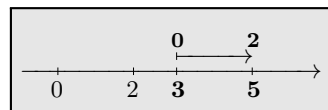
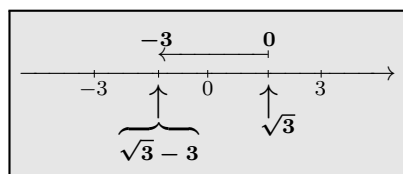
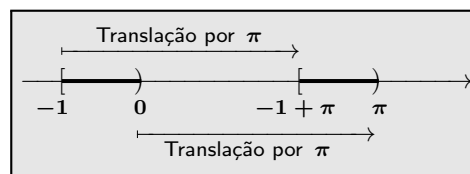
1 Interpretando geometricamente a soma

Temos uma maneira bastante geométrica de interpretar a soma de dois números reais a, b quaisquer, a saber:

$a + b$ é obtido transladando a de b.

Tal translação,

- ☞ será à *direita* quando b for *positivo*;
- ☞ será à *esquerda* quando b for *negativo*;
- ☞ será dita *translação nula* quando $b = 0$.

Exemplos

❄ Geometricamente, o número real $5\ (=3+2)$ é obtido transladando 3 de 2 como mostrado na figura à direita.

❄ Geometricamente, $\sqrt{3}-3$ é obtido transladando $\sqrt{3}$ de -3, pois $\sqrt{3}-3=\sqrt{3}+(-3)$.

❄ O intervalo $[-1+\pi\,,\pi)$ é obtido transladando o intervalo $[-1\,,0)$ de π.

Sabemos, por exemplo, que $-\frac{1}{2}\in[-1\,,0)$. Conseqüentemente, $-\frac{1}{2}+\pi\in[-1+\pi\,,\pi)$.

Também temos uma interpretação geométrica para o produto de dois números reais. Você encontra essa interpretação em [7].

Dado um conjunto $A\subset\mathbb{R}$ chamamos de *transladado de* A *por* $b\in\mathbb{R}$ ao conjunto obtido transladando-se de b todos os elementos de A.

Também podemos levar ao plano cartesiano esses conceitos:

☞ O par ordenado $(a+\lambda\,,b)$ é obtido transladando-se a primeira coordenada do par ordenado $(a\,,b)$ de λ.

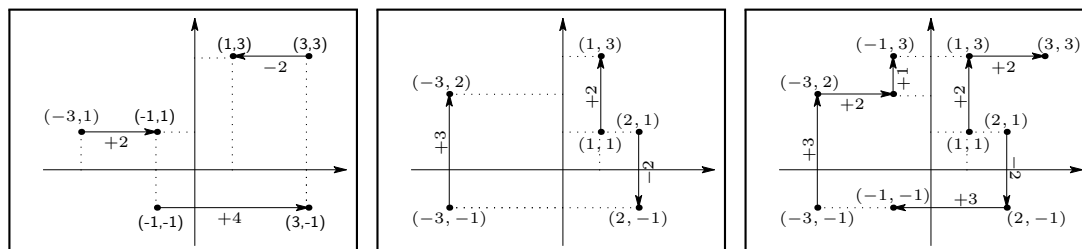
Também dizemos:

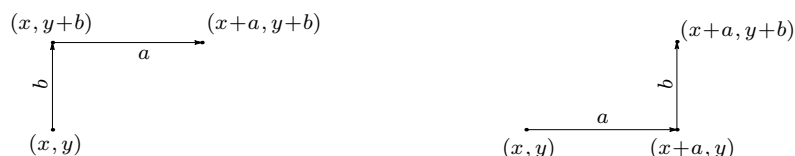
$(a+\lambda\,,b)$ é obtido *transladando-se horizontalmente* $(a\,,b)$ de λ.

☞ O par ordenado $(a\,,b+\lambda)$ é obtido transladando-se a segunda coordenada do par ordenado $(a\,,b)$ de λ.

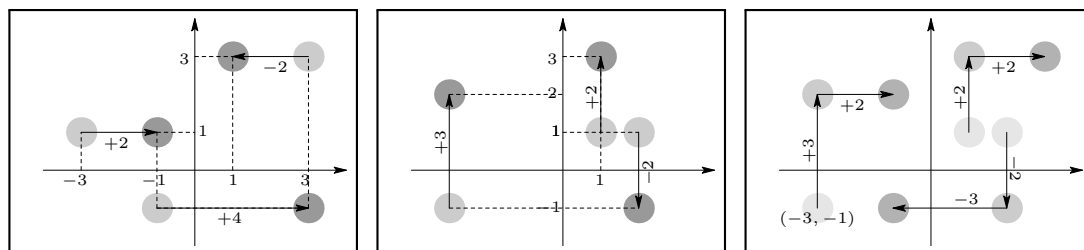
Também dizemos:

$(a\,,b+\lambda)$ é obtido *transladando-se verticalmente* $(a\,,b)$ de λ.

Nos quadros a seguir mostramos os transladados de alguns pares ordenados.

- No primeiro quadro temos:
  - ❄ $(3,-1)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(-1,-1)$ de $+4$;
  - ❄ $(-1,1)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(-3,1)$ de $+2$;
  - ❄ $(1,3)$ é obtido transladando-se horizontalmente $(3,3)$ de -2.
- No segundo quadro:
  - ❄ $(-3,2)$ é obtido transladando-se verticalmente $(-3,-1)$ de $+3$;
  - ❄ $(1,3)$ é obtido transladando-se verticalmente $(1,1)$ de $+2$;
  - ❄ $(2,-1)$ é obtido transladando-se verticalmente $(2,1)$ de -2.
- No terceiro quadro fazemos translações verticais, seguidas de translações horizontais.

Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $a,b \in \mathbb{R}$ temos que: $(x+a, y+b)$ é obtido de (x,y) por uma translação vertical de b (figura abaixo, à esquerda), seguida de uma translação horizontal de a (figura abaixo, à esquerda); ou então, $(x+a, y+b)$ é obtido de (x,y) por uma translação horizontal de a (figura abaixo, à direita), seguida de uma translação vertical de b (figura abaixo, à direita).

Repare que nas figuras acima os parâmetros a e b foram tomados positivos.

Se podemos transladar pontos do plano cartesiano, também podemos transladar subconjuntos do plano, como fizemos na reta. Transladar $A \subset \mathbb{R}^2$ horizontalmente de $a \in \mathbb{R}$ significa transladar horizontalmente de a todos os pontos do conjunto A. Analogamente, transladar A verticalmente de b significa transladar verticalmente de b todos os elementos de A.

Nas figuras a seguir transladamos alguns conjuntos horizontalmente e verticalmente.

As bolas mais escuras foram obtidas transladando as bolas mais claras. No primeiro quadro temos translações horizontais e no segundo exibimos translações verticais. No terceiro quadro repetimos as translações verticais do segundo e fazemos, em seguida, translações horizontais.

2 Simetrias

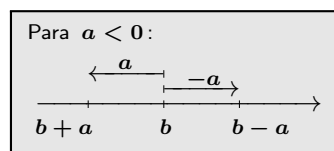
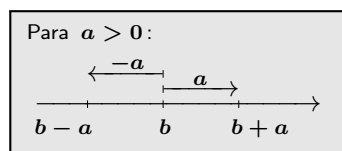
Vamos agora desenvolver o conceito de simetria numa de suas formas mais elementares e geométrica.

2.1 Simetria na reta

Na seção 3 da Lição 2 falamos em eqüidistância e em simetria de pontos em relação a origem da reta orientada: dissemos que a e $-a$ estão eqüidistantes da origem, dissemos que eles são simétricos em relação a essa origem.

Dados $a\,,b \in \mathbb{R}$ dizemos que $b-a$ e $b+a$ são *simétricos em relação a* b: eles foram obtidos transladando b de a e de $-a$ respectivamente. O ponto b é o *centro de simetria*. Em resumo, dizemos que $b \pm a$ são simétricos em relação a b. Dizemos também que $b-a$ (resp. $b+a$) é o simétrico de $b+a$ (resp. $b-a$) em relação a b. Também dizemos que $b-a$ (resp. $b+a$) é o *refletido* de $b+a$ (resp. $b-a$) em relação a b.

Volte ao exercício 14 da página 38 e repare que $b+a$ e $b-a$ têm b como seu ponto médio pois

$$\frac{(b+a)+(b-a)}{2} = \frac{2b}{2} = b\,.$$

Também segue da definição acima que $b-a$ e $b+a$ estão *eqüidistantes* de b. Essa distância vale, como visto:

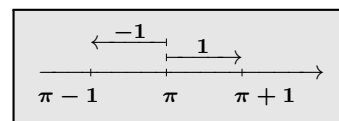
$$|(b+a)-b| = |a| = |(b-a)-b|\,.$$

Por outro lado, a distância entre $b+a$ e $b-a$ vale:

$$|b+a-(b-a)| = |b+a-b+a| = |2a| = 2|a|$$

o que já era de se esperar, depois de feito o cálculo anterior.

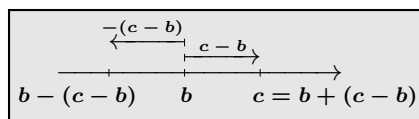
Exemplo

❄ Os pontos $\pi-1$ e $\pi+1$ são simétricos em relação a π. O número π é o centro dessa simetria. A distância de $\pi-1$ e de $\pi+1$ ao centro de simetria π vale 1. Além disso, transladando o intervalo $[\,\pi-1\,,\pi\,]$ de 1 obtemos o intervalo $[\,\pi\,,\pi+1\,]$.

Dado um centro de simetria b e um ponto c da reta, podemos determinar o simétrico (ou refletido) de c em relação a b. De fato, escrevendo

$$c = b + (c - b)$$

concluímos que o simétrico de c em relação a b é $b - (c - b)$. A figura a seguir mostra isso no caso em que $c > b$. Você pode fazer uma figura semelhante a essa quando $c < b$.

$-(c-b)$ $\quad c-b$

$b-(c-b) \qquad b \qquad c = b + (c-b)$

Sejam dados $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. O *simétrico* (ou *refletido*) de A em relação a b é o subconjunto da reta formado pelos simétricos (ou refletidos) em relação a b, de todos os pontos de A.

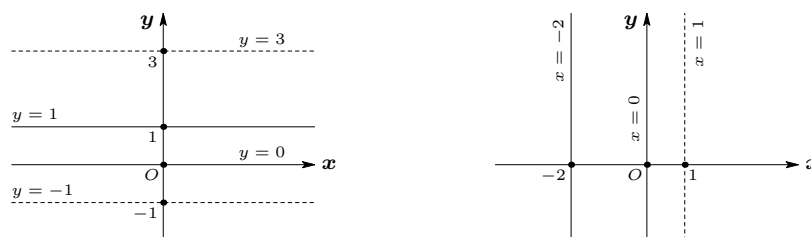
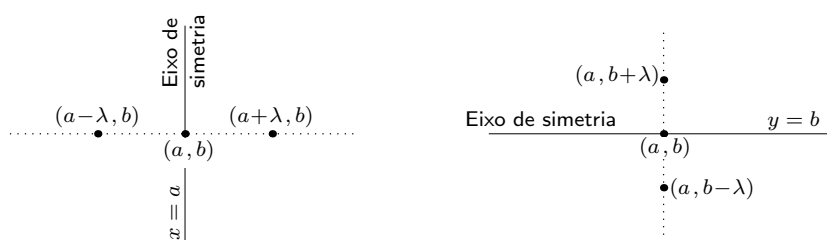
Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ tem *simetria em relação a um ponto* $b \in \mathbb{R}$ quando A possui a seguinte propriedade: o simétrico em relação a b de todo ponto de A, também pertence ao conjunto A. No exemplo anterior, o intervalo $[\pi - 1, \pi + 1]$ é simétrico em relação a π. O conjunto $[-2, 1) \cup (1, 4]$ é simétrico em relação a 1. Faça uma figura que ilustre com clareza esse último fato.

2.2 Simetrias no plano cartesiano

No plano cartesiano, vamos construir simetrias através de translações horizontais e verticais.

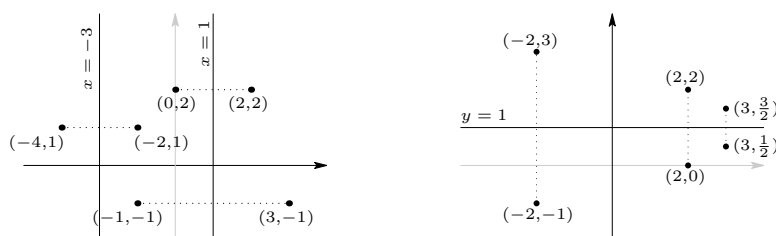
Para isso, primeiramente observe que o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano cuja abcissa vale a é a reta vertical que passa por $(a, 0)$. Dizemos que $x = a$ é a sua equação cartesiana.

Por sua vez, o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano cuja ordenada vale b constitui uma reta horizontal: é a reta horizontal que passa pelo ponto $(0, b)$. Dizemos que $y = b$ é a sua equação cartesiana.

Nas figuras a seguir mostramos algumas dessas retas e suas respectivas equações cartesianas.

Sejam $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que $(a + \lambda, b)$ e $(a - \lambda, b)$ são *simétricos em relação à reta vertical* de equação $x = a$ a qual é chamada *eixo de simetria*. Dizemos que $(a, b - \lambda)$ e $(a, b + \lambda)$ são *simétricos em relação à reta horizontal* de equação $y = b$ que é o *eixo de simetria*. Exibimos essas simetrias nas figuras a seguir.

Também dizemos que $(a+\lambda, b)$ (resp. $(a-\lambda, b)$) é o *refletido* de $(a-\lambda, b)$ (resp. $(a+\lambda, b)$) em relação ao eixo vertical de equação $x = a$. De forma análoga, dizemos que $(a, b+\lambda)$ (resp. $(a, b-\lambda)$) é o *refletido* de $(a, b-\lambda)$ (resp. $(a, b+\lambda)$) em relação ao eixo horizontal de equação $y = b$.

Repare que na figura anterior, à esquerda, os pontos simétricos em relação ao eixo de simetria de equação cartesiana $x = a$ possuem as mesma ordenadas e a simetria é definida pela simetria nas primeiras coordenadas. Note que $a+\lambda$ e $a-\lambda$ são simétricos em relação ao ponto a, ou seja, a é o ponto médio entre $a+\lambda$ e $a-\lambda$.

Já na figura da direita os pontos simétricos em relação ao eixo de simetria de equação cartesiana $y = b$ têm a mesma abcissa e a simetria fica determinada pela simetria nas segundas coordenadas dos pontos. Note que $b+\lambda$ e $b-\lambda$ são simétricos em relação a b.

Nas próximas duas figuras mostramos exemplos de simetrias em relação a eixos verticais e a eixos horizontais.

Na figura da esquerda temos:

- $(-4, 1)$ e $(-2, 1)$ são simétricos em relação ao eixo de simetria de equação $x = -3$;
- $(-1, -1)$ e $(3, -1)$ são simétricos em relação ao eixo de simetria de equação $x = 1$;
- idem para os pontos $(0, 2)$ e $(2, 2)$.

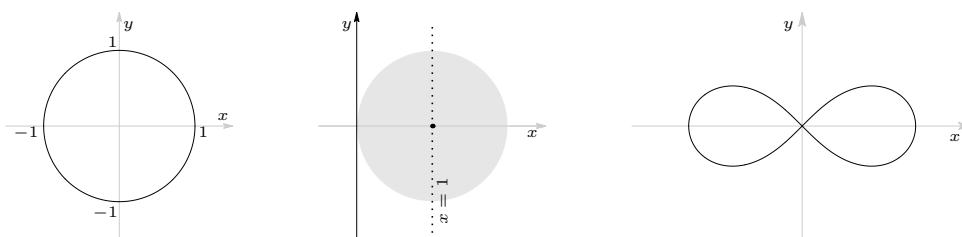
Na figura da direita temos:

- $(-2, -1)$ e $(-2, 3)$ são simétricos em relação a reta horizontal de equação $y = 1$;
- o mesmo ocorre com os pares de pontos $(2, 0)$; $(2, 2)$ e $(3, 1/2)$; $(3, 3/2)$.

Dados um eixo de simetria e um ponto (a, b) do plano cartesiano, podemos determinar o simétrico (ou refletido) de (a, b) em relação a esse eixo.

Mais geralmente, sejam dados no plano cartesiano um subconjunto A e um eixo de simetria. O conjunto formado pelos simétricos (ou refletidos) de todos os pontos de A, em relação a esse eixo, é dito *simétrico* (ou *refletido*) do conjunto A em relação a tal eixo.

Dizemos que A tem *simetria em relação a* tal eixo quando A possui a seguinte propriedade: o simétrico de todo elemento de A em relação ao eixo de simetria, também pertence ao conjunto A.

Nas figuras a seguir mostramos subconjuntos do plano, simétricos em relação a eixos horizontais e a eixos verticais.

Na primeira figura temos um círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano. Sua equação cartesiana é : $x^2 + y^2 = 1$. Tal círculo tem simetria tanto em relação ao eixo das abcissas, quanto em relação ao eixo das ordenadas. No entanto, não tem simetria, por exemplo, em relação ao eixo de equação $x = 1$. E como podemos provar isso ?

Para provar que este círculo tem simetria em relação ao eixo horizontal devemos mostrar que se $(a\,,b)$ é um ponto do círculo, então o seu simétrico em relação ao eixo horizontal, isto é, $(a\,,-b)$ também o é. Ou seja, precisamos provar que se $(a\,,b)$ satisfaz a equação $x^2+y^2 = 1$ então $(a\,,-b)$ também satisfaz. É o que exige a definição.

Vejamos !!

Se $(a\,,b)$ é um ponto do círculo, então ele satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$. Ou seja, $a^2+b^2 = 1$. Por outro lado, com relação ao ponto $(a\,,-b)$ temos que: $a^2+(-b)^2 = a^2+b^2 = 1$. Consequentemente, se $(a\,,b)$ satisfaz a equação do círculo então $(a\,,-b)$ também satisfaz, mostrando assim que o círculo em questão tem simetria com relação ao eixo horizontal.

A simetria em relação ao eixo vertical se prova de forma análoga. E como provar que o círculo $x^2 + y^2 = 1$ não tem simetria em relação ao eixo $x = 1$?

Vejamos !!

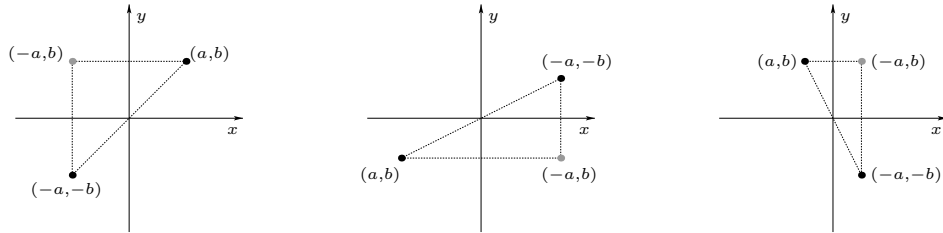
O ponto $(\,1\,,0\,)$ está sobre o referido círculo pois $1^2 + 0^2 = 1$. Por outro lado, o simétrico do ponto $(\,1\,,0\,)$ em relação ao eixo $x = 1$ é o ponto $(\,1\,,2)$ o qual não está sobre o círculo, pois $1^2 + 2^2 \neq 1$.

Na segunda figura temos a região do plano delimitada pelo círculo de raio unitário centrado no ponto $(\,1\,,0\,)$. Esse conjunto[1] tem simetria em relação ao eixo das abcissas mas não tem simetria em relação ao eixo das ordenadas. No entanto, tem simetria em relação ao eixo de equação $x = 1$.

Na terceira figura temos a famosa curva chamada de *figura oito*[2]. Ela também tem simetria tanto em relação ao eixo das abcissas, quanto em relação ao eixo das ordenadas.

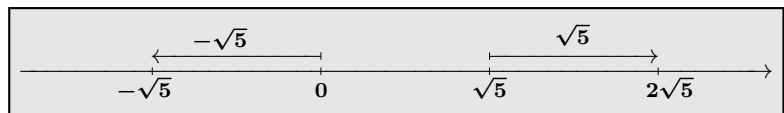
[1] A inequação cartesiana que descreve esse conjunto é: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

[2] A equação cartesiana dessa curva é: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

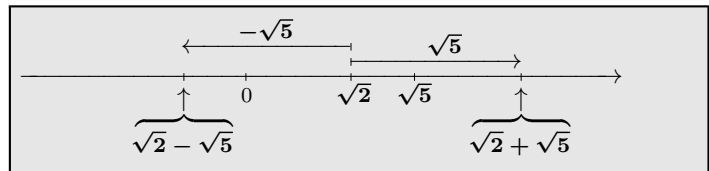
No plano, além de simetrias em relação a eixos podemos falar em simetria com relação a origem do sistema de coordenadas. Dizemos que os pontos $(a\,,b)$ e $(-a\,,-b)$ são simétricos em relação à origem. Note que podemos obter qualquer um deles a partir do outro fazendo uma reflexão em relação ao eixo das abcissas, seguido de uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas; ou então, uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas, seguido de uma reflexão em relação ao eixo das abcissas.

Exibimos essa simetria nas figuras que acabamos de apresentar. Os pontos mais claros são pontos intermediários pelos quais passamos, ao fazer a primeira reflexão.

Exercícios resolvidos

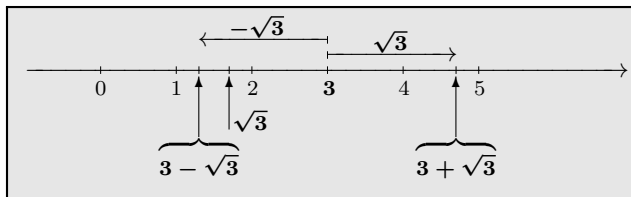
1. **Conhecendo na reta orientada as localizações da origem e de $\sqrt{5}$ faça as representações gráficas de $-\sqrt{5}$ e de $2\sqrt{5}$.**

Solução Sabemos que $-\sqrt{5}$ é o simétrico de $\sqrt{5}$ em relação a origem. Com um compasso, medimos a distância de 0 a $\sqrt{5}$.

Com o compasso fixo em 0 marcamos $-\sqrt{5}$ à esquerda de 0. Agora, fixando o compasso em $\sqrt{5}$ transladamos $\sqrt{5}$ de $\sqrt{5}$, obtendo $2\sqrt{5}$.

2. **Conhecendo na reta orientada as localizações da origem, de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, faça as representações gráficas de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ e de $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.**

Solução Com um compasso, medimos a distância de 0 a $\sqrt{5}$. Agora, com o compasso fixo em $\sqrt{2}$, transladamos $\sqrt{2}$ de $\sqrt{5}$ e de $-\sqrt{5}$ obtendo, respectivamente, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

3. **Conhecidas as localizações da origem, de 3 e de $\sqrt{3}$, dê as localizações dos números reais cuja distância ao número 3 vale $\sqrt{3}$.**

Solução Tais números são obtidos[3] transladando 3 de $\sqrt{3}$ e de $-\sqrt{3}$, respectivamente, no que obtemos os números $3+\sqrt{3}$ e $3-\sqrt{3}$. Suas localizações na reta podem ser obtidas da seguinte forma. Com um compasso medimos a distância da origem a $\sqrt{3}$. Com o compasso centrado em 3 marcamos $3+\sqrt{3}$ à direita de 3 e $3-\sqrt{3}$ à esquerda de 3.

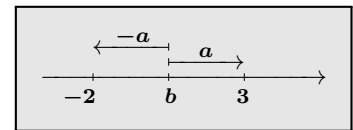
Graficamente, temos:

Assim, $3-\sqrt{3}$ e $3+\sqrt{3}$ são *simétricos em relação* à 3 e o número 3 é o *centro de simetria*.

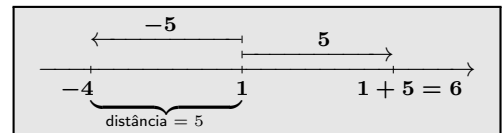
4. **Determine $b \in \mathbb{R}$ tal que -2 e 3 sejam simétricos em relação a b.**

Solução Podemos abordar esse problema da seguinte maneira[4].

Os transladados de b por $\pm a$ valem $b \pm a$. Como -2 e 3 devem ser simétricos em relação a b, devemos ter: $b+a=-2$ e $b-a=3$. Somando, obtemos:

$$(b+a)+(b-a)=1 \iff 2b=1 \iff b=1/2.$$

Isso mostra que -2 e 3 são simétricos em relação a $1/2$.

5. **Determine o simétrico de -4 em relação ao ponto 1.**

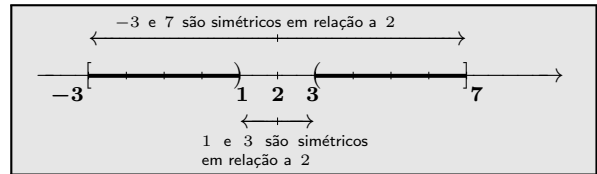
Solução A melhor maneira de iniciar a solução de um problema como este é começar com uma figura !! O simétrico procurado é obtido transladando-se o ponto 1 (que é o centro de simetria) de $|1-(-4)|=5$ (que é a distância de -4 à 1). Assim, o ponto procurado é o ponto $1+5=6$.

6. **Determine o simétrico do intervalo $[-3\,,1)$ em relação a 2.**

Solução Aqui também, iniciar com uma figura é uma boa maneira de encontrar a solução !!

Para isso basta determinar os simétricos em relação a 2 das extremidades do intervalo.

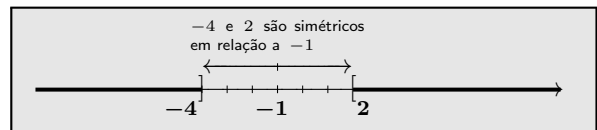
[3] Também podemos obtê-los resolvendo a equação $|x-3|=\sqrt{3}$ como aprendemos na lição anterior.

[4] Outra forma de abordar o problema é a seguinte: o ponto b é o ponto médio do segmento de reta de -2 à 3. Logo, b é a média aritmética de -2 e 3, a qual vale $1/2$.
Outra alternativa: o ponto b está eqüidistante de -2 e 3. Logo, ele é solução da equação $|b-(-2)|=|b-3|$. Resolvendo tal equação determinamos o valor de b.

- o simétrico em relação a 2 da extremidade 1 é: $2+|2-1|=3$;
- o simétrico em relação a 2 da extremidade -3 é: $2+|2-(-3)|=7$.

Logo, os simétricos em relação a 2 dos pontos compreendidos entre -3 e 1 são os pontos compreendidos entre 3 e 7. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $(3\,,7\,]$.

7. Determine o simétrico de $[\,2\,,\infty)$ em relação a -1 .

Solução Nesse caso, basta determinar o simétrico em relação a -1 da extremidade 2 . Tal simétrico vale:

$$-1-|2-(-1)|=-1-3=-4\,.$$

Consequentemente, o simétrico em relação a -1 do intervalo $[\,2\,,\infty)$ é o intervalo $(-\infty\,,-4\,]$.

8. Qual é o número real que transladado de $2{,}3$ produz o número $-4{,}71$?

Solução Denotemos por x o número a ser determinado. Transladando x de $2{,}3$ obtemos: $x+2{,}3$. Consequentemente: $x+2{,}3=-4{,}71 \iff x=-2{,}3-4{,}71 \iff x=-7{,}01$.

9. Qual é o número real que transladado de seu triplo produz o número $\sqrt[3]{4}$?

Solução Seja x o número a ser determinado. Nesse caso, temos: transladando x de $3x$ obtemos $\sqrt[3]{4}$. Consequentemente,

$$x+3x=\sqrt[3]{4} \iff 4x=\sqrt[3]{4} \iff x=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\,.$$

10. Determine o número real que possui a seguinte propriedade: transladando esse número de 3 obtemos o dobro do seu transladado por 5 .

Solução Seja x o número a ser determinado.

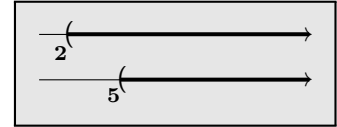
Temos que:

- O translado de x por 3 vale: $x+3$;
- O dobro do transladado de x por 5 vale: $2(x+5)$.

Assim, resulta que:

$$x+3=2(x+5) \iff x+3=2x+10 \iff -7=x \iff x=-7.$$

11. Qual intervalo obtemos quando transladamos o intervalo $(2\,,\infty)$ de 3 ?

Solução Transladando os pontos do intervalo $(2\,,\infty)$ de 3 obtemos os pontos da reta que estão à direita de $2+3$, isto é, obtemos o intervalo $(5\,,\infty)$.

12. Seja x um ponto de um dos conjuntos

(a) $[\,2\,,4\,)$ **(b)** $(-5\,,2\,)$

Pergunta-se: em qual subconjunto da reta estará o transladado de x por -5 ? Determine o menor subconjunto possível.

Solução Transladando de -5 os subconjuntos acima, obtemos : $[-3\,,-1)$ e $(-10\,,-3)$. Assim,

(a) se $x\in[\,2\,,4)$ então $x-5\in[-3\,,-1)$; **(b)** se $x\in(-5\,,2)$ então $x-5\in(-10\,,-3)$.

13. Se x é um número real que não pertence a $[\,2\,,\pi)$, a qual conjunto deverá pertencer o transladado de x por 3 ? Determine o menor subconjunto possível.

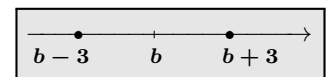
Solução Se $x\notin[\,2\,,\pi)$ então o transladado de x por 3 não vai pertencer ao transladado de $[\,2\,,\pi)$ por 3. Isso significa que $x+3\notin[\,2+3\,,\pi+3)=[\,5\,,\pi+3)$ ou seja, $x+3\in(-\infty\,,5)\cup[\,\pi+3\,,\infty)$.

14. O transladado de um número real por $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo $[\,3\,,\pi\,]$. Determine o menor subconjunto da reta ao qual esse número deve pertencer.

Solução Seja x tal número. Sabemos que o transladado de x por $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo $[\,3\,,\pi\,]$, isto é, $x+\sqrt{2}\in[\,3\,,\pi\,]$. Consequentemente, $\big(x+\sqrt{2}\,\big)-\sqrt{2}\in\big[\,3-\sqrt{2}\,,\pi-\sqrt{2}\,\big]$, ou seja, $x\in\big[\,3-\sqrt{2}\,,\pi-\sqrt{2}\,\big]$. Logo, o intervalo procurado é o intervalo $\big[\,3-\sqrt{2}\,,\pi-\sqrt{2}\,\big]$.

15. Seja $b\in\mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b vale 3 ? Dê uma solução geométrica e apresente uma equação cujas soluções são tais pontos.

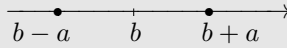
Solução Já vimos que os pontos cuja distância ao ponto b vale 3 são obtidos transladando[5] b de 3 e de -3. Ou seja, são os pontos $x=b\pm3$.

A distância de um ponto x à b é dada por $|x-b|$. Se tal distância vale 3, devemos ter $|x-b|=3$. Assim, a equação $|x-b|=3$ descreve exatamente os pontos da reta cuja distância à b vale 3.

☛ **Nota:** Esse exercício mostra como entender e resolver geometricamente a equação $|x-b|=3$. Aliás, ele nos ensina a entender e resolver geometricamente a equação $|x-b|=a$ quando $a\geq0$. Quando $a<0$ a equação $|x-b|=a$ não tem soluções pois $|x-b|$ nunca é negativo.

[5]Vimos na lição anterior quais são as soluções da equação $|x-b|=3$. O objetivo desse exercício é apresentar uma maneira geométrica de resolver tal equação.

Dados $\boldsymbol{a \geq 0}$ e $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ temos:

$$|x-b| = a \iff x - b = \pm a \iff x = b \pm a$$

$b-a$ $\quad b \quad$ $b+a$

16. Use o exercício anterior para resolver as equações em $\mathbb{R}$:

(a) $|x-2| = 5$ **(b)** $\left|\frac{x}{3} - 1\right| = 1$ **(c)** $\left|\frac{1-2x}{3}\right| = 2$ **(d)** $|x-2| = -1$.

Solução Do exercício anterior segue que:

(a) $|x-2| = 5 \iff x - 2 = \pm 5 \iff x = 2 \pm 5 \iff x = 7$ ou $x = -3$.

(b) $\left|\frac{x}{3} - 1\right| = 1 \iff \frac{x}{3} - 1 = \pm 1 \iff \frac{x}{3} = 1 \pm 1 \iff x = 3 \pm 3$
$\iff x = 6$ ou $x = 0$.

(c) $\left|\frac{1-2x}{3}\right| = 2 \iff \frac{1-2x}{3} = \pm 2 \iff 1 - 2x = \pm 6 \iff 2x = 1 \mp 6$
$\iff 2x = 7$ ou $2x = -5 \iff x = 7/2$ ou $x = -5/2$.

(d) Essa equação não tem solução pois $|x-2| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Resolvendo a equação $|x| = 2x + 1$ onde $x \in \mathbb{R}$:

Temos que:

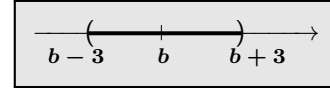
$$|x| = 2x+1 \iff x = \pm(2x+1) \iff \begin{cases} x = 2x+1 \\ \quad ou \\ x = -2x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2x+1 \\ \quad ou \\ x = -2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \quad ou \\ x = -1/3 \end{cases}$$

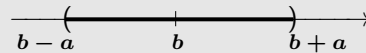
mostrando que a equação tem duas soluções: -1 e $-1/3$. No entanto, -1 não é solução da equação !! Onde está o erro ?

Solução Todas as equivalências estão corretas, salvo a primeira delas que está errada. Não podemos dizer que $|x| = 2x+1 \Leftrightarrow x = \pm(2x+1)$, pois $2x+1$ pode ser negativo. E isso, de fato, ocorre quando $x = -1$. Acabamos de ver no exercício 15 que a equivalência $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$ só é verdadeira quando $a \geq 0$.

18. Seja $b \in \mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b é menor do que 3 ? Dê uma solução geométrica e apresente uma inequação cujas soluções são tais pontos.

Solução Vimos que os pontos da reta cuja distância ao ponto b vale 3 são os pontos $b+3$ e $b-3$. Os pontos cuja distância à b é menor do que 3 são os pontos compreendidos entre $b-3$ e $b+3$, isto é, são os pontos do intervalo $(b-3\,,b+3)$.

A inequação $|x-b|<3$ descreve os pontos da reta cuja distância ao ponto b é menor do que 3.

☛ **Nota:** Como no exercício 15, esse exercício mostra como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|<3$. De fato, ele nos ensina a entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|<a$ quando $a>0$. Novamente, quando $a\leq 0$ a inequação $|x-b|<a$ não tem soluções pois $|x-b|$ nunca é negativo.

Dados $\boldsymbol{a>0}$ e $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ temos:

$$|x-b|<a \iff x-b\in(-a\,,a) \iff x\in(b-a\,,b+a)$$

Note também que combinando os exercícios 18 e 15 que acabamos de resolver, obtemos:

$$|x-b|\leq a \iff x-b\in[-a\,,a\,] \iff x\in[\,b-a\,,b+a\,]$$

onde $a\geq 0$ e $x\in\mathbb{R}$.

19. Use o exercício anterior para resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

(a) $|x-2|<4$ **(b)** $|x+1|\leq 2$ **(c)** $|\pi-x|<4$ **(d)** $|2x-4|\leq 6$.

Solução Do exercício anterior podemos garantir que:

(a) $|x-2|<4 \iff x-2\in(-4\,,4) \iff x\in(\,2-4\,,2+4\,) \iff x\in(-2\,,6\,)$.

(b) $|x+1|\leq 2 \iff x+1\in[-2\,,2\,] \iff x\in[-1-2\,,-1+2\,] \iff x\in[-3\,,1\,]$.

(c) $|\pi-x|<4 \iff |x-\pi|<4 \iff x-\pi\in(-4\,,4\,) \iff x\in(\,\pi-4\,,\pi+4\,)$.

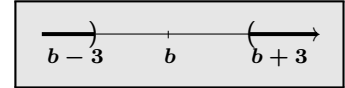
(d) $|2x-4|\leq 6 \iff |2(x-2)|\leq 6 \iff 2|x-2|\leq 6 \iff |x-2|\leq 3$.
$\iff x-2\in[\,-3\,,3\,] \iff x\in[\,-1\,,5\,]$.

20. Sabendo que $|2-3x|\leq 5$ faça uma estimativa para o número real $3x$.

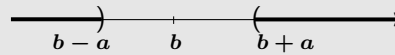
Solução Temos que:

$|2-3x|<5 \iff |3x-2|<5 \iff 3x-2\in(-5\,,5\,)$
$\iff 3x\in(\,2-5\,,2+5) \iff -3<3x<7.$

21. Seja $b\in\mathbb{R}$. Quais são os pontos da reta cuja distância ao ponto b é maior do que 3? Dê uma solução geométrica e apresente uma inequação cujas soluções são tais pontos.

Solução Os pontos cuja distância ao ponto b vale 3 são os pontos $b+3$ e $b-3$. Os pontos cuja distância à b é maior do que 3 são os pontos que estão fora do intervalo $[\,b-3\,,b+3\,]$, isto é, são os pontos do conjunto $(-\infty\,,b-3)\cup(b+3\,,\infty)$ mostrado na figura ao lado.

A inequação $|x-b|>3$ descreve os pontos da reta cuja distância ao ponto b é maior do que 3.

☛ **Nota:** Mostramos aqui como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|>3$. De fato, mostramos como entender e resolver geometricamente a inequação $|x-b|>a$. Repare que quando $a<0$, todo ponto da reta é solução da inequação $|x-b|>a$.

> Dados $\boldsymbol{a\geq 0}$ e $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ temos:
>
> $$|x-b|>a \iff x-b\in(-\infty\,,-a)\cup(\,a\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,b-a)\cup(b+a\,,\infty)$$
>
> b − a   b   b + a

Note também que combinando os exercícios 21 e 15 dessa lição, obtemos:

$$|x-b|\geq a \iff x-b\in(-\infty\,,-a\,]\cup[\,a\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,b-a\,]\cup[\,b+a\,,\infty)$$

quando $a\geq 0$ e $x\in\mathbb{R}$.

22. **Use o exercício anterior para resolver as inequações em $\mathbb{R}$:**

(a) $|x-1|>3$ **(b)** $|x+2|\geq 1$ **(c)** $|3-x|>2$ **(d)** $|2x-4|>6$

Solução Do exercício anterior podemos garantir que:

(a) $|x-1|>3 \iff x-1\in(-\infty\,,-3\,)\cup(\,3\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,1-3\,)\cup(\,1+3\,,\infty)$
$\iff x\in(-\infty\,,-2\,)\cup(\,4\,,\infty)\,.$

(b) $|x+2|\geq 1 \iff x+2\in(-\infty\,,-1\,]\cup[\,1\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,-2-1\,]\cup[-2+1\,,\infty)$
$\iff x\in(-\infty\,,-3\,]\cup[-1\,,\infty).$

(c) $|3-x|>2 \iff |x-3|>2 \iff x-3\in(-\infty\,,-2\,)\cup(\,2\,,\infty)$
$\iff x\in(-\infty\,,3-2\,)\cup(\,3+2\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,1\,)\cup(\,5\,,\infty).$

(d) $|2x-4|>6 \iff 2|x-2|>6 \iff |x-2|>3$
$\iff x-2\in(-\infty\,,-3\,)\cup(\,3\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,5\,,\infty).$

23. **Faça uma estimativa para $b\in\mathbb{R}$ sabendo que ele é negativo e que $|1-2b|\geq 3$.**

Solução Temos que:

$$|1-2b| \geq 3 \iff |2b-1| \geq 3 \iff 2b-1 \in (-\infty\,,-3\,] \cup [\,3\,,\infty) \iff 2b \in (-\infty\,,1-3\,] \cup [\,1+3\,,\infty) \iff 2b \in (-\infty\,,-2\,] \cup [\,4\,,\infty)\,.$$

Como $b<0$ concluímos que $2b \leq -2$, ou seja, $b \leq -1$.

24. **Sabendo que $b \in [\,1\,,3\,)$ determine:**
(1) O menor intervalo que contém $b+2$
(2) O menor intervalo que contém $3-b$.

Solução Tomemos $b \in [\,1\,,3\,)$.

(1) Como $b \in [\,1\,,3\,)$, o seu transladado por 2 pertence ao transladado de $[\,1\,,3\,)$ por 2. Portanto, $b+2 \in [\,1+2\,,3+2\,) = [\,3\,,5\,)$. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $[\,3\,,5\,)$.

(2) De $b \in [\,1\,,3\,)$ segue que $-b$ pertence ao simétrico do intervalo $[\,1\,,3\,)$ em relação à origem, que é o intervalo $(-3\,,-1\,]$. Assim, $-b \in (-3\,,-1\,]$ e, consequentemente, $3-b \in (-3+3\,,-1+3\,] = (\,0\,,2\,]$. Assim, o intervalo procurado é o intervalo $(\,0\,,2\,]$.

25. **Sabendo que $b \in (-\infty\,,1\,]$ determine o menor intervalo que contém $2-b$.**

Solução De $b \in (-\infty\,,1\,]$ segue que $-b$ pertence ao simétrico do intervalo $(-\infty\,,1\,]$ em relação a origem, que é o intervalo $[-1\,,\infty)$. Assim, $-b \in [-1\,,\infty)$ e, consequentemente, $-b+3 \in [-1+3\,,\infty)$. Portanto, o intervalo procurado é o intervalo $[\,2\,,\infty)$.

26. **Dê uma equação que tem como soluções, exatamente, os pontos da reta cujo quadrado de seu transladado por 2 vale 5. Resolva tal equação.**

Solução Seja z um tal ponto. O seu transladado por 2 vale $z+2$. O quadrado desse transladado vale 5, ou seja, $(z+2)^2 = 5$. Logo, os números procurados são aqueles que satisfazem a equação $(z+2)^2 = 5$.

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$(z+2)^2 = 5 \iff z+2 = \pm\sqrt{5} \iff z = -2 \pm \sqrt{5}\,.$$

27. **Em cada um dos itens a seguir são dados dois pontos do plano cartesiano. Determine, em cada caso, a equação cartesiana do eixo de simetria desses pontos.**

(a) $(-1\,,0\,)$ e $(-1\,,2\,)$ **(b) $(\,\sqrt{2}\,,-2\,)$ e $(\,\sqrt{2}\,,1\,)$**
(c) $(-1\,,1\,)$ e $(\,3\,,1\,)$ **(d) $(-1-\sqrt{2}\,,-1)$ e $(\sqrt{2}-1\,,-1\,)$.**

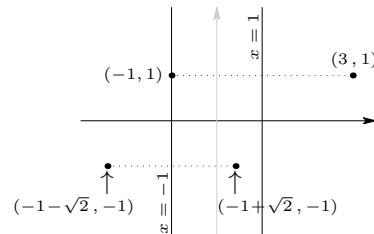
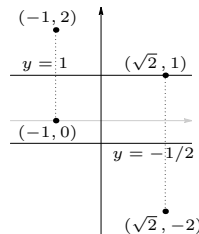
Solução

(a) Nesse item os pontos possuem as mesmas abcissas. Logo, o eixo de simetria é a reta horizontal passando pelo ponto médio p_m entre 0 e 2 o qual vale: $p_m = 1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $y = 1$.

(b) Nesse caso os pontos também têm a mesma abcissas. Portanto, o eixo de simetria é a reta horizontal passando pelo ponto médio p_m entre -2 e 1 o qual vale: $p_m = (-2+1)/2 = -1/2$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $y = -1/2$.

(c) Nesse item os pontos possuem a mesma ordenada. Portanto, o eixo de simetria é a reta vertical passando pelo ponto médio p_m entre -1 e 3 o qual vale: $p_m = (-1+3)/2 = 1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$.

(d) Nesse item os pontos também possuem a mesma ordenada. Logo, o eixo de simetria é a reta vertical passando pelo ponto médio p_m entre $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$ o qual vale: $p_m = (-1-\sqrt{2}+-1+\sqrt{2})/2 = -1$. Logo, o eixo de simetria é a reta de equação $x = -1$.

Nas figuras abaixo exibimos essas simetrias.

28. **Dê uma inequação que tem como soluções, exatamente, os pontos da reta cujo cubo do seu transladado por -3 é menor do que o transladado do seu quadrado por 1 .**

Solução Denotemos um tal ponto por x . Temos que:

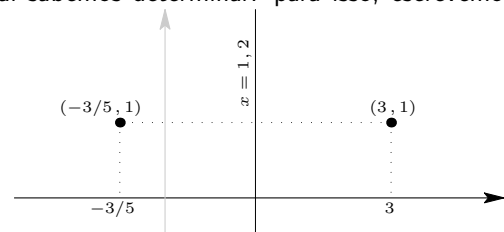
- o cubo do seu transladado por -3 vale $(x-3)^3$;
- o transladado do seu quadrado por 1 vale x^2+1 .

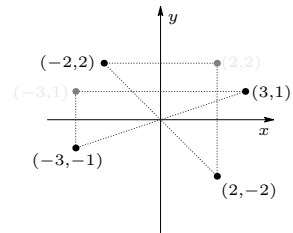
Portanto, a inequação procurada é: $(x-3)^3 < x^2+1$.

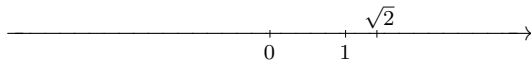
29. **Determine o simétrico do ponto $(3\,,1)$ em relação ao eixo de simetria de equação $x = 1{,}2$.**

Solução Sabemos que o simétrico procurado tem ordenada igual a 1 . Resta determinar sua abcissa. E ela é o simétrico de 3 em relação a $1{,}2$ o qual sabemos determinar: para isso, escrevemos

$$3 = 1{,}2 + (3 - 1{,}2)\,.$$

Portanto, o simétrico de 3 em relação a $1{,}2$ vale: $1{,}2-(3-1{,}2) = 2{,}4-3 = -0{,}6 = -3/5$. Conseqüentemente, o simétrico de $(3\,,1)$ procurado é $(-3/5\,,1)$.

30. **Determine os simétricos dos pontos $(3\,,1)$, $(-2\,,2)$ em relação à origem do plano cartesiano. Faça uma figura exibindo tais pontos e seus simétricos.**

Solução Os simétricos procurados são $(-3\,,-1)$ e $(2\,,-2)$ respectivamente. Eles são mostrados na figura a seguir. Os pontos mais claros são os pontos intermediários obtidos quando fizemos, como primeira reflexão, a reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

Exercícios

1. Conhecendo na reta orientada as localizações da origem, da unidade e de $\sqrt{2}$, use um compasso e faça as representações gráficas de -1 , $2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 2 , $1-\sqrt{2}$ e de $1+\sqrt{2}$.

2. Determine os números reais que satisfazem a condição de cada item a seguir.
(a) O seu transladado por 4 vale -3;
(b) O dobro do seu transladado por 1 vale 5;
(c) O seu transladado por $1{,}2$ vale 3;
(d) A distância a -1 do dobro do seu transladado por 7, vale 3.

3. Determine os simétricos de $1, 4, -\sqrt{3}, -2$ e de π em relação à -1.

4. Quais dos pares de números a seguir são simétricos em relação a -3:
-5 e 7 ; 1 e -7 ; -13 e 4 ; 0 e -4 ; -103 e 97?

5. Determine $b \in \mathbb{R}$ de tal forma que -3 e 7 sejam simétricos em relação a b.

6. Determine:
(a) o simétrico em relação a -1 do intervalo $[-1, 3)$;
(b) o simétrico em relação a 1 do intervalo $(-\infty, 2)$;
(c) o simétrico em relação a $-\pi$ do intervalo $(-4, \infty)$;
(d) o simétrico em relação a origem do intervalo $(-3, \pi]$.

Em cada item faça figuras que represente sua solução.

7. Determine os números reais cuja distância à -3 vale $\sqrt{5}$.

8. Qual é o número real que transladado de 5 produz o número $2{,}01$.

9. Qual é o número real que transladado do seu dobro produz o número $\sqrt{3}$?

10. Determine uma equação cujas soluções são os pontos da reta que transladados por -2 são iguais aos quádruplos dos seus transladados por 1. Resolva tal equação.

11. Exiba uma equação cujas soluções são os pontos da reta que estão equidistantes do seu quadrado e do seu cubo.

12. Dê uma equação que descreva os números reais cujos transladados por 1 coindicidem com o quadrado do seu transladado por -1.

13. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:
(a) $|2x-1| = 2$ (b) $|1+3x| = 3$
(c) $|\frac{x}{2} - 3| = 1$ (d) $|2 + \frac{x}{2}| = 3$.

14. Dê uma inequação que descreva os pontos da reta cujo dobro do seu transladado por -2 é maior que a sua distância a 2.

15. Seja x um número real. Qual é a expressão do seu simétrico em relação a 2?

16. O simétrico em relação a 2 de um certo número real coincide com o transladado desse número por 7. Determine tal número.

17. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
(a) $|x-3| < 2$ (b) $|x+1| < 3$
(c) $|x-1| < 3$ (d) $|3-x| < 1$.

18. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
(a) $|x-3| > 1$ (b) $|2+x| > 5$
(c) $|3+x| > 2$ (d) $|1-x| > 0$.

19. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
(a) $|x-1| \geq 3$ (b) $|5+x| \leq 3$
(c) $|2-x| \leq 0$ (d) $|2x-1| \geq 3$.

20. Determine o intervalo obtido quando:
(a) transladamos $[1, 3)$ por 4;
(b) transladamos $[1, 5]$ por $2{,}3$;
(c) transladamos $[1, \infty)$ por -5;
(d) transladamos $(-\infty, -2]$ por $-1{,}4$.

Em cada item, faça figuras que indiquem sua solução.

21. Se um número real não pertence a $(-2,3]$, a qual subconjunto da reta deverá pertencer o seu transladado por 4? Determine o menor subconjunto possível.

Faça uma figura que indique com clareza sua solução.

22. Se um número real não pertence a $(-\infty,1)$, a qual subconjunto da reta deverá pertencer o simétrico em relação a origem do seu transladado por -2? Determine o menor subconjunto possível.

Faça uma figura que indique com clareza sua solução.

23. Sabendo que $b \in (2,4]$ determine:
(1) o menor intervalo que contém $b-2$;
(2) o menor intervalo que contém $b+3$;
(3) o menor intervalo que contém $-b$;
(4) o menor intervalo que contém $2-b$.

24. Repita o exercício anterior, trocando $(2,4]$ por:
(a) $(-\infty,-1]$ (b) $(0,\infty)$
(c) $[-2,2)\cap(1,3]$ (d) $(-1,2)-[0,1)$.

25. Sabendo que $a \in [-1,2)$ e $b \in (1,3]$ determine, para cada item a seguir, o menor subconjunto da reta que contém:
(1) $a+b$ (2) $a-b$
(3) $|a|+b$ (4) $b-|a|$
(5) $|a|-1$ (6) $|a|-|b|$.

26. A qual subconjunto da reta deve pertence o ponto x quando:
(a) o seu transladado por 4 pertence ao intervalo $[1,2)$;
(b) o seu transladado por -1 pertence ao intervalo $(-3,2]$;
(c) o dobro do seu transladado por 3 pertence ao intervalo $(-\infty,2]$;
(d) o triplo do seu transladado por 2 pertence ao intervalo $(3,\infty)$.

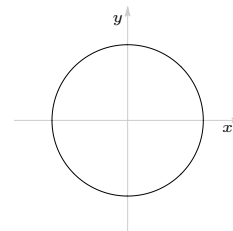
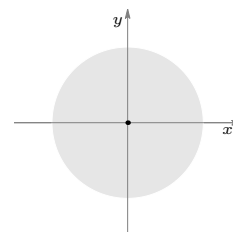
Determine em cada caso, o menor subconjunto possível.

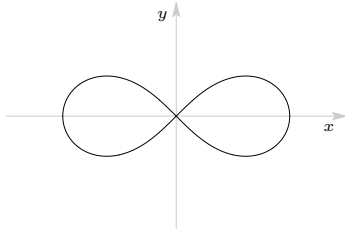
27. Determine a equação cartesiana do eixo de simetria para cada par de pontos dados a seguir. Para cada item, faça a representação gráfica no plano cartesiano dos pontos e do eixo de simetria.
(a) $(-2,3)$ e $(-2,5)$
(b) $(1,-3)$ e $(1,5)$
(c) $(1,-3)$ e $(5,-3)$
(d) $(\pi,-1)$ e $(\pi-2,-1)$.

28. Em cada item são dados um ponto do plano e a equação cartesiana de um eixo de simetria. Determine o simétrico do ponto em relação ao eixo.
(a) $(-2,3)$ e $x=2$
(b) $(1,-3)$ e $x=-1$
(c) $(1,-3)$ e $y=\pi$
(d) $(\pi,-1)$ e $y=1$.

29. Dados um ponto (a,b) do plano e um eixo de simetria de equação $x=c$, determine o simétrico de (a,b) em relação a tal eixo.

30. Repita o exercício acima para o eixo de equação $y=c$.

31. Faça um esboço do simétrico do círculo, centrado na origem, de raio 1 mostrado abaixo, em relação aos eixos de equação:
(a) $x=1$ (b) $x=-1$
(c) $x=1/2$ (d) $y=1$.

32. Repita o exercício anterior para o disco de raio 1, centrado na origem e mostrado na figura abaixo. Esse disco é descrito pela inequação $x^2+y^2 \le 1$.

Mostre também que esse disco não é simétrico em relação ao eixo $y=1$.

33. A figura a seguir é a chamada *figura oito* , já mostrada anteriormente. Sua equação cartesiana é $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Faça um esboço do simétrico (ou refletido) dessa curva em relação aos eixos de equação:

(a) $x = 1$ (b) $x = -1$
(c) $x = 1/2$ (d) $y = 1$.

Mostre também que:

- a figura oito é, de fato, simétrica em relação ao eixo vertical $x = 0$;
- a figura oito não é simétrica em relação ao eixo vertical $x = 1$.

34. Calcule o simétrico em relação a origem do plano cartesiano dos seguintes pontos: $(1\,,4)$, $(4\,,3)$, $(-2\,,4)$ e $(-3\,,3)$. Represente graficamente esses pontos e seus simétricos, fazendo as reflexões necessárias.

4

Propriedades das operações

1 Propriedades

Propriedades da adição e da multiplicação de números reais	
1. Comutatividade:	$a+b=b+a$ $a\times b=b\times a$
2. Associatividade:	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
3. Elemento neutro:	$\exists\, 0$ **tal que:** $a+0=a=0+a$ $\exists\, 1$ **tal que:** $a\times 1=a=1\times a$
4. Simétrico:	**para cada** a **existe um real denotado por** $-a$ **tal que** $a+(-a)=0=(-a)+a$
5. Inverso:	**para cada** $b\neq 0$ **existe um real denotado por** b^{-1} **tal que** $b\times b^{-1}=b^{-1}\times b=1$
6. Distributividade:	$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

Dois fatos muito importantes e que não estão explícitos nas seis propriedades acima listadas

são os seguintes:

- *o simétrico de um número real é único*, isto é, o único número real que somado à b produz zero como resultado é o seu simétrico $-b$;
- *o inverso de um real não nulo é único*, isto é, o único número real que multiplicado pelo real não nulo b produz 1 como resultado é o seu inverso b^{-1} que também é denotado por $\frac{1}{b}$ ou $1/b$.

Não é difícil demonstrar essas duas propriedades usando as propriedades listadas anteriormente. Não menos importante que as duas propriedades acima é a unicidade dos elementos neutros para a soma (zero) e para a multiplicação (um).

Exemplos

❄ Comutatividade $\begin{cases} 7+8=8+7 \\ 4\times 5=5\times 4\,. \end{cases}$

❄ Associatividade $\begin{cases} (7+2)+3=7+(2+3) \\ (2\times 8)\times 5=2\times(8\times 5)\,. \end{cases}$

❄ Elemento neutro $\begin{cases} 6+0=6=0+6 \\ 2\times 1=2=1\times 2\,. \end{cases}$

❄ O *simétrico* de 5 é -5 e o de -3 é 3.

❄ O *inverso* de 8 é $\frac{1}{8}$ pois $8\times\frac{1}{8}=1$.

❄ O *inverso* de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$ pois $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.

❄ O *inverso* de $-\frac{5}{7}$ é $-\frac{7}{5}$ pois $\left(-\frac{5}{7}\right)\left(-\frac{7}{5}\right)=1$.

❄ Distributividade: $3\times(5+7)=3\times 5+3\times 7$.

1.1 Utilidade prática das propriedades

As propriedades da adição e da multiplicação também servem para simplificar e facilitar cálculos.

1. *Comutatividade e associatividade*: às vezes, mudar a ordem das parcelas ou dos fatores facilita o cálculo, de modo que ele pode ser feito até mentalmente.
   - $50+1239+50=\underbrace{50+50}_{100}+1.239=100+1.239=1.339$.
   - $2\times 342\times 5=\underbrace{2\times 5}_{10}\times 342=10\times 342=3.420$.
   - $20+6+28+2=\underbrace{(20+6)}_{26}+\underbrace{(28+2)}_{30}=26+30=56$.
2. *Distributividade*: também pode facilitar os cálculos mentais.
   - $13\times 101=13\times(100+1)=13\times 100+13\times 1=1.300+13=1.313$.

1.2 Subtração e Divisão

Subtração: definimos e denotamos a *subtração* de a por b da seguinte forma:

$$a - b := a + (-b).$$

Divisão: quando $b \neq 0$ definimos e denotamos a *divisão* de a por b da seguinte forma:

$$a \div b := a \times b^{-1}.$$

Para $a \div b$ também usamos as notações: $\frac{a}{b}$ ou a/b. Dizemos que a/b é uma *fração* com *numerador* a e *denominador* b.

Algumas conseqüências das propriedades das operações

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ temos:

- $a \times 0 = 0$
- $0 \div b = 0$ quando $b \neq 0$
- $(-1) \times a = -a$
- $a - b = -(b - a)$
- $a \div b = (b \div a)^{-1}$ quando $a, b \neq 0$
- $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$
- $-(-a) = a$
- $-(a + b) = -a - b$
- $(a - b) - c = a - (b + c)$
- $(a \div b) \div c = a \div (bc)$ quando $b, c \neq 0$

Esses resultados podem ser demonstrados usando as propriedades do quadro da página 67.
Note que a primeira conseqüência nos garante que zero não possui inverso já que não existe um número real b tal que $b \times 0 = 1$.
Os dois últimos itens à esquerda nos mostram que a subtração e a divisão não são operações comutativas enquanto que os dois últimos itens à direita nos mostram que tais operações não são associativas.

Exemplos

- ❄ $1.088.967 \times 0 = 0$.
- ❄ O simétrico de -4 é $-(-4) = 4$.
- ❄ $(-1) \times 5 = -5$ e $(-1) \times (-7) = -(-7) = 7$.
- ❄ $3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$.
- ❄ $-(a + 5) = -a - 5$.
- ❄ $-(a - b + 8) = -a + b - 8$.
- ❄ $(2/3)/4 = 2/(3 \times 4) = 2/12 = 1/6$.
- ❄ $\big((3/5)/2\big)/7 = \big(3/(5 \times 2)\big)/7 = 3/(2 \times 5 \times 7)$.
- ❄ $\pi \times (-1) = -\pi$;
- ❄ $10.993,674 \times (-0,2198) \times 0 = 0$.

1.3 Regras de sinais

Adição

- A soma de dois números positivos é positiva e a soma de dois números negativos é negativa.

  $(+) + (+) = (+)$ ☛ $3+5=8$
  $(-) + (-) = (-)$ ☛ $-2-3=-(2+3)=-5$

- Ao somar números com sinais contrários, podemos obter como resultado um número positivo, nulo ou negativo.

  ☛ $9-5=4$ ☛ $3-3=0$ ☛ $3-10=-(10-3)=-7$

Multiplicação e Divisão
Multiplicando-se ou dividindo-se números com um mesmo sinal o resultado é positivo, e números com sinais diferentes o resultado é negativo.

$(+) \times (+) = (+)$ ☛ $3\times 5=15$ $(+) \div (+) = (+)$ ☛ $10\div 5=2$
$(-) \times (-) = (+)$ ☛ $(-2)\times(-3)=6$ $(-) \div (-) = (+)$ ☛ $(-9)\div(-3)=3$
$(+) \times (-) = (-)$ ☛ $(-2)\times 4=-8$ $(+) \div (-) = (-)$ ☛ $6\div(-2)=-3$
$(-) \times (+) = (-)$ ☛ $3\times(-4)=-12$ $(-) \div (+) = (-)$ ☛ $(-8)\div 2=-4$

2 Fatoração

Fatorar a expressão $\boldsymbol{a\times b+a\times c}$ é escrevê-la na forma $\boldsymbol{a\times(b+c)}$, isto é:

$$a\times b+a\times c=a\times(b+c)\,.$$

Nesse caso, dizemos que o fator $\boldsymbol{a}$ foi colocado em *evidência*. Mais geralmente, fatorar uma expressão é escrevê-la como um produto de fatores.

Exemplos

❄ $2x-4y=2\,(x-2y)\quad,\quad\forall\, x\,,y\in\mathbb{R}$

❄ $x^2-2x=x\,(x-2)\quad,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$

❄ $2-y=2-2\times\frac{y}{2}=2\left(1-\frac{y}{2}\right)\quad,\quad\forall\, y\in\mathbb{R}$

❄ $x^2-2x^4=x^2(1-2x^2)\quad,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$

❄ $x-x^2=x\,(1-x)\quad,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$

❄ $z-\pi z^2=\pi z\left(\frac{1}{\pi}-z\right)\quad,\quad\forall\, z\in\mathbb{R}\,.$

❄ $x^3 + 2x^2 - x - 1 = x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ quando $x \in \mathbb{R} - \{0\}$;

❄ $2 - x = \frac{2x}{x} - x = x\left(\frac{2}{x} - 1\right)$ quando $x \in \mathbb{R} - \{0\}$;

❄ $\frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} - \frac{2x^2}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1 - 2x^2\right)$ quando $0 \neq x \in \mathbb{R}$;

❄ $\frac{x}{2-x} - x = x\left(\frac{1}{2-x} - 1\right)$ quando $2 \neq x \in \mathbb{R}$.

No quadro a seguir apresentamos algumas igualdades conhecidas como *produtos notáveis*. Elas são obtidas da propriedade de distributividade da multiplicação em relação a adição.

2.1 Produtos notáveis

Igualdade	Exemplo
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos:	**Dado $x \in \mathbb{R}$ temos:**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

3 Operando com frações

Relembramos que uma *fração* é uma expressão da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números reais e $b \neq 0$. Exemplos de frações:

$$\frac{5}{2} \quad ; \quad \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7} \quad ; \quad \frac{3}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{5}}{-3} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad ; \quad \frac{\pi}{8} \quad ; \quad \frac{1{,}257}{6{,}7} \,.$$

3.1 Igualdade

Sejam $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{c}\,,\,\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}$ **com** $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ **e** $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$ **:**

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\,.$$

Essa propriedade pode ser demonstrada usando as propriedades das operações de adição e multiplicação, vistas no início desta lição.

Exemplos

❄ $\dfrac{4}{5}=\dfrac{20}{25}$ pois $4\times 25=5\times 20\,;$

❄ $\dfrac{1{,}3}{2}=\dfrac{5{,}2}{8}$ pois $1{,}3\times 8=2\times 5{,}2\,;$

❄ $\dfrac{72}{108}=\dfrac{2}{3}$ pois $72\times 3=108\times 2\,;$

❄ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2}{3\sqrt{2}}$ pois $3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3\times 2\,.$

Para $x\in\mathbb{R}$ temos:

❄ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{3}\iff 3(x+1)=2\iff 3x+3=2\iff x=-\dfrac{1}{3}\,;$

❄ $\dfrac{2x}{3}=\dfrac{x-1}{2}\iff 4x=3(x-1)\iff 4x=3x-3\iff x=-3\,;$

❄ $\dfrac{|x|}{3}=\dfrac{1-|2x|}{2}\iff 2|x|=3-3|2x|\iff 2|x|=3-6|x|\iff 8|x|=3$

$\iff |x|=3/8\iff x=\pm 3/8\,.$

Agora, voltando a igualdade da página 25 podemos concluir que, de fato, $\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}$ quando $q\neq 0$ pois $(-p)(-q)=pq\,.$

3.2 Simplificação

Sejam $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}$ **com** $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ **e** $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ **:**

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}}\,.$$

Note que a igualdade acima segue da igualdade de frações. Para ver isso, basta observar que: $a\times c\times b=b\times c\times a$.

Exemplos

❄ $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,;$

❄ $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}\,;$

❄ $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,;$

❄ $\dfrac{6x+1}{2} = \dfrac{6(x+1/6)}{2} = 3(x+1/6) = 3x+\dfrac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$;

❄ $\dfrac{3-8z}{4} = \dfrac{4(3/4-2z)}{4} = \dfrac{3}{4}-2z = 2\Big(\dfrac{3}{8}-z\Big)$ para todo z real.

3.3 Operações elementares com frações

Regras de cálculo para frações
Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b, d \neq 0$ temos:

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd}-\dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ • $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$
- $\Big(\dfrac{c}{d}\Big)^{-1} = \dfrac{d}{c}$ **quando** $c \neq 0$.
- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ **quando** $c \neq 0$.

Importante: Lembre-se sempre dos seguintes fatos:

☞ Para somar ou subtrair frações, devemos *reduzí-las a um mesmo denominador*. É o que fazemos na tabela ao lado.

☞ Para inverter uma fração precisamos que o numerador e o denominador sejam, ambos, não nulos.

☞ Na divisão de frações, é essencial que a fração divisora seja não nula. Isto é, se estamos dividindo um número real pela fração c/d devemos ter $d \neq 0$ para que a fração esteja bem definida e, evidentemente, também devemos ter $c \neq 0$ para que a fração em questão não se anule.

Essas propriedades podem ser demonstradas sem dificuldades a partir das propriedades já estudadas.

A divisão de $\dfrac{a}{b}$ por $\dfrac{c}{d}$ também é denotada por $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ou $\dfrac{a/b}{c/d}$.

Exemplos

- $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} + \frac{5 \times 1}{5 \times 3} = \frac{9+5}{15} = \frac{14}{15}$;
- $\frac{5}{4} - \frac{1}{7} = \frac{5 \times 7}{4 \times 7} - \frac{4 \times 1}{4 \times 7} = \frac{35-4}{28} = \frac{31}{28}$;
- $\frac{2}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} - \frac{5 \times \pi}{5 \times 6} = \frac{12 - 5\pi}{30}$;
- $\frac{2{,}2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2{,}2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{11}{21}$;
- $\frac{2}{5} \times \frac{(-3)}{4} = \frac{2 \times (-3)}{5 \times 4} = \frac{-6}{20} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$;
- $\frac{3}{5} \div \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{5 \times 2} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$;
- $\frac{3{,}2}{4} \div 3 = \frac{3{,}2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3{,}2}{4 \times 3} = \frac{0{,}8}{3} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$;
- $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{\pi}$;
- $\frac{x-2}{4} \times \frac{x+2}{3} = \frac{x^2-4}{12}$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} = \frac{7x}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De volta à igualdade da página 25, note que de fato $\frac{-p}{q}$ (com $q \neq 0$) é o simétrico de $\frac{p}{q}$, isto é, $\frac{-p}{q} = -\frac{p}{q}$ pois:

$$\frac{-p}{q} + \frac{p}{q} = \frac{-p+p}{q} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{p-p}{q} = 0\,.$$

4 Leis de cancelamento

Na adição de números reais temos :

$$a + b = a + c \iff b = c\,.$$

Na multiplicação de números reais, quando $c \neq 0$, temos:

$$a \times b = a \times c \iff b = c\,.$$

Estas propriedades desempenham um papel importante na resolução de equações.

Exemplos

Para $x\,, y \in \mathbb{R}$ temos :

- $2x + 5 = 5 \iff 2x = 0 \iff x = 0$;
- $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \iff x = y$;

❄ Cancelando x na equação $3x = 2x$ obtemos $3 = 2 \ldots$ **o que é absurdo**.

Conseguimos esse absurdo porque cancelamos o que não podia ser cancelado. Repare que da igualdade $3x = 2x$ (ou seja, $3x - 2x = 0$) concluímos que $x = 0$. Assim, ao fazer o cancelamento, estávamos cancelando o fator *zero* em cada membro da equação, o que não é permitido pela lei do cancelamento na multiplicação.

4.1 $\mathrm{a} \times \mathrm{b} = 0 \iff \mathrm{a} = 0$ ou $\mathrm{b} = 0$

Essa propriedade é uma conseqüência da lei de cancelamento na multiplicação de números reais. Ela nos garante que: *um produto de fatores se anula quando, e somente quando, pelo menos um dos fatores se anula*. Assim, dados $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ temos :

$$\boldsymbol{a \times b \times c = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } c = 0}\,.$$

Da mesma forma, dados $a\,,b\,,c\,,d \in \mathbb{R}$ temos :

$$\boldsymbol{a \times b \times c \times d = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } c = 0 \text{ ou } d = 0}\,.$$

Como no caso da primeira propriedade do módulo, essa propriedade nos ensina resolver um tipo especial de equação.

Exemplos

Para $x \in \mathbb{R}$ temos :

❄ $x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$;

❄ $x(5+x)(3-2x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -5$ ou $x = 3/2$;

❄ $2(x-1) = 0 \iff x = 1$ já que $2 \neq 0$;

❄ $2(2+x)(2+x^2) = 0 \iff 2 + x = 0 \iff x = -2$.
Repare que $2 + x^2$ nunca se anula. Mais precisamente, $2 + x^2 \geq 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

❄ $(2x+3)^3(1+2x^2) = 0 \iff (2x+3)^3 = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff x = -3/2$.
Repare, novamente, que $1 + 2x^2$ nunca se anula. De fato, temos que $1 + 2x^2 \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

❄ $x(x+2)(4-x^2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$ ou $x^2 = 4$. Assim,
$x(x+2)(4-x^2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = \pm 2 \iff x = 0$ ou $x = \pm 2$.

Exercícios resolvidos

1. **Dado que $x \in \mathbb{R}$, efetue:**

(a) $\boldsymbol{x(2-3x)}$ **(b)** $\boldsymbol{3x(x^3-2x^2+1)}$ **(c)** $\boldsymbol{(x+2)(x+3)}$
(d) $\boldsymbol{x(x^2+2)}$ **(e)** $\boldsymbol{(1-x)(1+2x)}$ **(f)** $\boldsymbol{(x^3-x+2)(3-x^2)}$ **.**

Solução Usando a distributividade da multiplicação em relação à soma e à subtração obtemos:

(a) $x(2-3x) = 2x - 3x^2$.

(b) $3x(x^3-2x^2+1) = 3x^4 - 6x^3 + 3x$.

(c) $(x+2)(x+3) = x(x+3) + 2(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$.

(d) $x(x^2+2) = x^3 + 2x$.

(e) $(1-x)(1+2x) = 1 + 2x - x(1+2x) = 1 + 2x - x - 2x^2 = 1 + x - 2x^2$.

(f) $(x^3-x+2)(3-x^2) = x^3(3-x^2) - x(3-x^2) + 2(3-x^2) = 3x^3 - x^5 - 3x + x^3 + 6 - 2x^2$
$= -x^5 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + 6$.

2. **Determine o sinal sem efetuar os cálculos:**

(a) $\boldsymbol{(-39) \times 1298}$ **(b)** $\boldsymbol{(-45) \times (-24) \times (-1)}$
(c) $\boldsymbol{(-3)^3 \times (-5)^6}$ **(d)** $\boldsymbol{\dfrac{1,5^5 \times (-2)^3 \times (-1)^5}{(-2)^4 \times (-6)^7}}$

Solução Analizando o sinal de cada fator, concluímos que:

(a) $(-39) \times 1.298 = -(39 \times 1.298)$ que é um número negativo.

(b) $(-45) \times (-24) \times (-1)$: aqui temos três fatores com sinais negativos logo, o número em questão é negativo, isto é, $(-45) \times (-24) \times (-1) < 0$.

(c) $(-3)^3 \times (-5)^6$: aqui temos $(-3)^3 < 0$ e $(-5)^6 > 0$. Conseqüentemente, $(-3)^3 \times (-5)^6 < 0$.

(d) $\dfrac{1,5^5 \times (-2)^3 \times (-1)^5}{(-2)^4 \times (-6)^7}$: aqui temos $(-2)^3 < 0$ e $(-1)^5 < 0$. Logo, o numerador da fração é positivo. Por outro lado, $(-2)^4 > 0$ e $(-6)^7 < 0$. Portanto, o denominador é negativo. Concluímos daí que a fração em questão é negativa.

3. **Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$. Determine quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.**
(1) $\boldsymbol{(-a)^3}$ **é um número negativo.**
(2) Se ab é um número positivo então $a+b$ é positivo.
(3) Se $a+b$ é um número positivo então a e b são positivos.
(4) $a + 1.000$ é um número não negativo.

Solução Temos que:

(1) Essa afirmação é **falsa** pois quando $a = -1$ temos que $(-a)^3 = (-(-1))^3 = 1^3 = 1 > 0$.

Você poderia colocar outra justificativa:

Essa afirmação é **falsa** pois quando $a = 0$ resulta que $(-a)^3 = 0$ e, portanto, não negativo.

(2) Essa afirmação também é **falsa** pois para $a = -1 = b$ temos que: $ab = (-1)(-1) = 1 > 0$ mas, no entanto, $a + b = (-1) + (-1) = -2 < 0$.

(3) Essa também é **falsa** pois fazendo $a = 1$ e $b = 0$ resulta que $a + b = 1 + 0 = 1 > 0$ e, no entanto, a e b não são ambos positivos, já que $b = 0$.

(4) Estamos, novamente, diante de uma afirmação **falsa**. Para ver isso, basta tomar $a = -2.000$. Nesse caso, teremos: $a + 1.000 = -2.000 + 1.000 = -1.000$ que é um número negativo.

4. Sejam $a\,, b > 0$ tais que $a^3 = 5$ e $a^5 = 12b^2$. Determine a razão de a para b.

Solução É dado que $a\,, b$ são positivos. Para determinar a/b é suficiente determinar uma potência de a/b. Para isso, calculemos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 \times 12}{a^5} = \frac{12}{a^3} = \frac{12}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{12}{5}}$$

pois a e b são positivos.

5. Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $7(2x-5) = 21$ calcule $2x+3$.

Solução Para calcular o valor de $2x + 3$ não precisamos passar, necessariamente, pela determinação do valor de x. Vejamos:

$$7(2x-5) = 21 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 5 = \frac{21}{7} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 5 + 8 = 11 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 3 = 11\,.$$

6. Dado que $x\,, \lambda \in \mathbb{R}$, fatore as expressões:

(a) $x^3 - 3x$ **(b)** $\lambda^2 - 4x^2$ **(c)** $1 - 2x^2$ **(d)** $x^4 - 16$
(e) $4x - x^5$ **(f)** $x^3 - 8$ **(g)** $8 - x^6$ **(h)** $(1/\pi^3) - x^3$.

Solução Para fatorar essas expressões vamos lançar mão dos produtos notáveis.

(a) $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x\big(x - \sqrt{3}\big)\big(x + \sqrt{3}\big)$.

(b) $\lambda^2 - 4x^2 = (\lambda - 2x)(\lambda + 2x)$.

(c) $1 - 2x^2 = (1 - \sqrt{2}\,x)(1 + \sqrt{2}\,x)$.

(d) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.

(e) $4x - x^5 = x(4 - x^4) = x(2 - x^2)(2 + x^2) = x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(2 + x^2)$.

(f) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

(g) $8 - x^6 = (2 - x^2)(4 + 2x^2 + x^4) = (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(4 + 2x^2 + x^4)$.

(h) $\dfrac{1}{\pi^3} - x^3 = \left(\dfrac{1}{\pi} - x\right)\left(\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{x}{\pi} + x^2\right)$.

7. **Dado que $x \, , \lambda \in \mathbb{R}$, identifique os produtos notáveis:**

(a) $\mathbf{2x^2 - 2}$ **(b)** $\mathbf{x^3 - 2}$ **(c)** $\mathbf{2 + x^3}$ **(d)** $\mathbf{x^3 + \lambda}$ **.**

Solução Temos que:

(a) $2x^2 - 3 = \left(\sqrt{2}\, x\right)^2 - \left(\sqrt{3}\,\right)^2 = \left(\sqrt{2}\, x - \sqrt{3}\,\right)\left(\sqrt{2}\, x + \sqrt{3}\,\right)$.

(b) $x^3 - 2 = x^3 - \left(\sqrt[3]{2}\,\right)^3 = \left(x - \sqrt[3]{2}\,\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{2}\, x + \sqrt[3]{4}\,\right)$.

(c) $2 + x^3 = \left(\sqrt[3]{2}\,\right)^3 + x^3 = \left(\sqrt[3]{2} + x\right)\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\, x + x^2\right)$.

(d) $x^3 + \lambda = x^3 + \left(\sqrt[3]{\lambda}\,\right)^3 = \left(x + \sqrt[3]{\lambda}\,\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{\lambda}\, x + \sqrt[3]{\lambda^2}\,\right)$.

8. **Sejam $a \, , b \in \mathbb{R}$. Mostre que as igualdades a seguir são verdadeiras.**

(1) $\mathbf{(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab}$ **(2)** $\mathbf{a^2 + ab + b^2 = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4}}$**.**

Solução Para mostrar as igualdades acima, vamos desenvolver um dos membros da igualdade a fim de obter o outro.

(1) Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos:

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$ demonstrando a primeira igualdade.

(2) Desenvolvendo o segundo membro, obtemos:

$\left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} = a^2 + ab + \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2$ como queríamos demonstrar.

9. **Calcule:**

(a) $\mathbf{\left(\dfrac{3}{5} - 2\right) \times \dfrac{2}{3}}$ **(b)** $\mathbf{\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}\right) \div \dfrac{2{,}2}{3}}$ **(c)** $\mathbf{\dfrac{0{,}5}{2} \div \left(\dfrac{3}{5} - 2 \times \dfrac{1}{3}\right)}$ **(d)** $\mathbf{1{,}2 \times \dfrac{10}{3} - \dfrac{2}{7}}$ **.**

Solução Usando as regras que acabamos de estudar, temos:

(a) $\left(\dfrac{3}{5} - 2\right) \times \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{10}{5}\right) \times \dfrac{2}{3} = -\dfrac{7}{5} \times \dfrac{2}{3} = -\dfrac{14}{15}$.

(b) $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}\right) \div \dfrac{2{,}2}{3} = \left(\dfrac{5}{15} + \dfrac{6}{15}\right) \times \dfrac{3}{2{,}2} = \dfrac{11}{15} \times \dfrac{30}{22} = \dfrac{11 \times 3 \times 5 \times 2}{3 \times 5 \times 2 \times 11} = 1.$

(c) $\dfrac{0{,}5}{2} \div \left(\dfrac{3}{5} - 2 \times \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{10 \times 2} \div \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{4} \div \left(\dfrac{9}{15} - \dfrac{10}{15}\right) = -\dfrac{1}{4} \div \dfrac{1}{15} = -\dfrac{1}{4} \times 15 = -\dfrac{15}{4}$.

(d) $1{,}2 \times \frac{10}{3} - \frac{2}{7} = \frac{12}{10} \times \frac{10}{3} - \frac{2}{7} = 4 - \frac{2}{7} = \frac{28}{7} - \frac{2}{7} = \frac{26}{7}$.

10. Escreva as expressões a seguir na forma de uma fração com denominador inteiro.

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ **(b)** $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **(c)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ **(d)** $\frac{2}{10+3\sqrt{6}}$.

Solução A operação que vamos executar sobre as frações a seguir é dita *racionalização do denominador*.

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2+\sqrt{2}$.

(b) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-3+\sqrt{6}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}-3+\sqrt{6}$.

(c) Usando a identidade $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ obtemos:

$$2 - 1 = (\sqrt[3]{2}\,)^3 - 1 = (\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)\,.$$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.

(d) $\frac{2}{10+3\sqrt{6}} = \frac{2(10-3\sqrt{6})}{(10+3\sqrt{6})(10-3\sqrt{6})} = \frac{2(10-3\sqrt{6})}{100-54} = \frac{10-3\sqrt{6}}{23}$.

11. Simplifique a expressão $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}$ sabendo que $a\,,b \in \mathbb{R}$ e $|a| \neq |b|$.

Solução Como $|a| \neq |b|$, cada parcela da expressão acima tem denominador não nulo e, portanto, está bem definida e temos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} &= \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a(a-b)+b(a+b)-a^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-ab+ab+b^2-a^2}{a^2-b^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2}\,.\end{aligned}$$

12. Sejam a e b dois números reais distintos e seja $c = a - b$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade $c = a - b$ por $a - b$
obtemos: $c(a-b) = (a-b)^2$.
Logo: $ac - bc = a^2 - 2ab + b^2$.
Assim: $ac - a^2 = bc - 2ab + b^2$.
Portanto: $ac + ab - a^2 = bc - ab + b^2$.
Conseqüentemente: $a(c+b-a) = b(c+b-a)$.
Cancelando, resulta: $a = b$.

☞ **Começamos com a hipótese $a \neq b$ e terminamos concluíndo que $a = b$. Onde está o erro?**

Solução Todas as passagens estão corretas, exceto a última quando cancelamos o termo $c + b - a$. Sendo $c = a - b$ segue que $c + b - a = 0$ e a lei de cancelamento na multiplicação nos diz: o fator a ser cancelado *não pode ser nulo*.

13. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:
(a) $x(x+1) = 0$ **(b)** $(1 - x^2)x = 0$
(c) $(x^2 + 2)(x - 1) = 0$ **(d)** $(2 + \sqrt{x})(x^2 + 1) = 0$
(e) $(2 - x)(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$ **(f)** $(2x - x^2)(x^3 - 3x)(2 - 3x) = 0$.

Solução Temos que:

(a) $x(x+1) = 0 \iff x = 0$ ou $x + 1 = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.
Logo, as soluções da equação são: 0 e -1.

(b) $(1 - x^2)x = 0 \iff 1 - x^2 = 0$ ou $x = 0 \iff x^2 = 1$ ou $x = 0$.
Conseqüentemente, as soluções da equação são: $0, -1$ e 1.

(c) $(x^2 + 2)(x - 1) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$, já que $x^2 + 2$ nunca se anula.
Portanto, a equação tem uma única solução, a saber: 1.

(d) A equação $(2 + \sqrt{x})(x^2 + 1) = 0$ não tem soluções pois:

- Para $x < 0$ sabemos que $\sqrt{x}$ não está definida;
- Para $x \geq 0$ temos que $2 + \sqrt{x}$ e $x^2 + 1$ nunca se anulam. Mais precisamente, temos que $2 + \sqrt{x} \geq 2$ e $x^2 + 1 \geq 1$.

(e) $(2 - x)(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \iff 2 - x = 0$ ou $x^2 - 9 = 0 \iff x = 2$ ou $x^2 = 9$, já que $x^2 + 1$ não se anula. Conseqüentemente, o conjunto solução da equação é $\mathcal{S} = \{2, 3, -3\}$.

(f) $(2x - x^2)(x^3 - 3x)(2 - 3x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0$ ou $x^3 - 3x = 0$ ou $2 - 3x = 0$.

Por sua vez:

- $2x - x^2 = 0 \iff x(2 - x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
- $x^3 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
- $2 - 3x = 0 \iff x = 2/3$.

Portanto, o conjunto solução da equação em questão é $\mathcal{S} = \{0, 2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2/3\}$.

14. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $a^2 = 1$ quando, e somente quando, $a = 1$ ou $a = -1$.

Solução Temos que: $\boxed{x^2 = 1 \iff x = \pm 1}$

$$a^2 = 1 \iff a^2 - 1 = 0 \iff (a-1)(a+1) = 0 \iff a = 1 \text{ ou } a = -1.$$

15. **Sejam $a\,,b\in\mathbb{R}$. Mostre que $a^2=b^2$ quando, e somente quando, $a=b$ ou $a=-b$.**

Solução Como no exercício anterior, temos que: $y^2=x^2 \iff y=\pm x$

$$a^2=b^2 \iff a^2-b^2=0 \iff (a-b)(a+b)=0 \iff a=b \text{ ou } a=-b.$$

16. **Seja b um número real qualquer. Resolva a equação $x^2=b$.**

Solução Temos dois casos a considerar.

- **Caso 1:** $b<0$.
  Nesse caso a equação $x^2=b$ não tem soluções reais pois x^2 não assume valores negativos.
- **Caso 2:** $b\geq 0$.
  Nesse caso podemos aplicar o exercício anterior e temos:

$$x^2=b \iff x^2=\left(\sqrt{b}\,\right)^2 \iff x=\pm\sqrt{b}.$$

Em resumo, concluímos: a equação $x^2=b$

☞ *não tem soluções reais* quando $b<0$;

☞ *tem uma única solução* quando $b=0$, a saber, a solução $x=0$;

☞ *tem duas soluções distintas* quando $b>0$, a saber, as soluções $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$.

17. **Fatore as expressões a seguir e determine em quais pontos da reta cada uma delas se anula.**
(a) $3x-x^2$ **(b) $2x-x^3$** **(c) x^4-9.**

Solução Temos que:

(a) $3x-x^2=x(3-x)$.

Portanto: $3x-x^2=0 \iff x(3-x)=0 \iff x=0$ ou $x=3$.

Resulta então que a expressão se anula apenas nos pontos do conjunto $\mathcal{S}=\{3\,,0\}$.

(b) $2x-x^3=x(2-x^2)$.

Assim:

$2x-x^3=0 \iff x(2-x^2)=0 \iff x=0$ ou $x^2=2 \iff x=0$ ou $x=\pm\sqrt{2}$.

Logo, o conjunto dos pontos onde a expressão se anula é $\mathcal{S}=\{0\,,\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,\}$.

(c) $x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)=\big(x-\sqrt{3}\big)\big(x+\sqrt{3}\big)(x^2+3)$.

Conseqüentemente: $x^4-9=0 \iff x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$, já que x^2+3 nunca se anula na reta. Segue então que a expressão só se anula em $\mathcal{S}=\big\{-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\,\big\}$.

18. **Dados $a, b \in \mathbb{R}$ sabemos que $(a-b)^2 \geq 0$. Use esse fato para concluir que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.**

Solução Desenvolvendo a expressão $(a-b)^2$ obtemos:

$$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$$

demonstrando o que foi proposto.

19. **Sejam $a, b \in [0, \infty)$. Use o exercício 18 para concluir[1] que $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}$.**

Solução Note que $a, b \geq 0$ e portanto, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ estão bem definidos. Agora, trocando a por $\sqrt{a}$ e b por $\sqrt{b}$ no exercício 18 concluímos que

$$\left(\sqrt{a}\,\right)^2 + \left(\sqrt{b}\,\right)^2 \geq 2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,.$$

Por outro lado temos que $\left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a$ e $\left(\sqrt{b}\,\right)^2 = b$. Assim, $a + b \geq 2\sqrt{a\,b}$ e conseqüentemente,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b} \quad \text{quando} \quad a, b \geq 0\,.$$

20. **Dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Use esse fato para mostrar que**

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \quad \textbf{sempre que} \quad a, b \geq 0\,.$$

Solução Se $a, b \geq 0$ então $2ab \geq 0$ e, conseqüentemente, segue de $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ que $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$, ou seja, $0 \leq a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$. Logo,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(a+b)^2} = a + b \quad \text{pois} \quad a, b \geq 0\,,$$

concluíndo o que pretendíamos.

21. **Use o exercício 20 para mostrar que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ quaisquer que sejam $a, b \geq 0$.**

Solução Como $a, b \geq 0$ segue que $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ estão bem definidos e $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$. Assim, trocando a por $\sqrt{a}$ e b por $\sqrt{b}$ no exercício anterior, concluímos, imediatamente, que

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{para todo} \quad a, b \geq 0\,.$$

[1] Dados números reais $a, b \geq 0$ dizemos que $(a+b)/2$ é a *média aritmética* desses números e que $\sqrt{ab}$ é a sua *média geométrica*. Esse exercício mostra que para dois números reais não negativos, sua média aritmética é maior ou igual a sua média geométrica.

Exercícios

1. Dado que $x \in \mathbb{R}$, desenvolva as expressões:
(a) $x(2x-1)$
(b) $(1-|x|)x+1$
(c) $1-(x-1)x^2$
(d) $(1+x)(1-2x^2)$.

2. Fatore as expressões em $\mathbb{R}$:
(a) x^2-2
(b) $2z^3-3z^2$
(c) $(x-1)^2-x+1$
(d) $|x^3|-|x|$.

3. Dado que $x, z, t \in \mathbb{R}$, identifique os produtos notáveis na lista a seguir e fatore as expressões.
(a) $4-12x+9x^2$
(b) $1+2x^2+x^4$
(c) $2z^3+3$
(d) $1-8t^3$
(e) $|x|^3-1$

4. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que:
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que:
$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Formule um exercício semelhante ao anterior, trocando o expoente 5 por 7. Demonstre a identidade que você propõe.

7. Generalize o resultado do exercício 5 para um expoente inteiro positivo qualquer. Prove a generalização que você propõe.

8. Use a identidade dada no exercício 4 para mostrar que
$$x^4-a^4=(x+a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3)$$
quaisquer que sejam $a, x \in \mathbb{R}$.

9. Use o resultado do exercício 5 para mostrar que
$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)$$
quaisquer que sejam $a \in \mathbb{R}$.

10. Generalize o resultado do exercício 9 para um expoente inteiro positivo qualquer. Prove a generalização que você propõe.

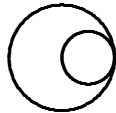
11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que
$$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2).$$

12. Use o resultado do exercício anterior para concluir que
$$(a+b)^3+(a-b)^3=2a(3b^2+a^2)$$
quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Calcule:
(a) $\frac{1{,}5}{0{,}2} \div \left(\frac{5}{3}-2{,}1\times\frac{2}{3}\right)$
(b) $2{,}4\times\frac{8}{3}-\frac{3}{5}\div\frac{2}{7{,}4}$
(c) $3{,}02 \div 1{,}1 \div 0{,}02$
(d) $\frac{0{,}2}{3}\div\frac{2}{0{,}01}\div\pi$
(e) $\frac{2}{3{,}2}-\frac{1}{1{,}1}\div\frac{3}{1{,}2}+\frac{5}{3}$.

14. Escreva as expressões a seguir na forma de uma fração com denominador inteiro.
(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$ (b) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ (d) $\dfrac{2}{5-2\sqrt{6}}$.

15. Simplifique a expressão
$$\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}.$$

16. Calcule
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \div \frac{7+4\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}.$$

17. Coloque as expressões abaixo na forma de uma fração:
(a) $\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\left(\frac{19}{3}+\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\pi}\div\frac{2\pi}{7}\right)\frac{\pi^2}{\sqrt{5}-1}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-2}{\pi^2-1}\left(1-\frac{2}{\pi+1}\right)$ (d) $\pi\,\frac{2-\pi}{1-\frac{2}{\pi}}$.

18. Sabendo que $x/y = 5$ e que $x\,,y$ são números reais negativos, calcule:

(a) $\frac{2x}{y}$ (b) $\frac{\pi y}{3x}$
(c) $\frac{1}{2y}\sqrt{x^2-y^2}$ (d) $\frac{2x-y}{|y|}$.

19. Sabendo que $a\,,b$ são dois números reais distintos, simplifique a expressão
$$\frac{b}{a-b} - \frac{b^3}{a^3-b^3}\,.$$

20. Sejam $a\,,\,b\,,\,c \in \mathbb{R}^*$. A afirmação $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ é verdadeira ?

Aqui $\mathbb{R}^* = (-\infty\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$.

21. Sejam $a\,,\,b \in \mathbb{R}^*$ e considere a fração a/b . Diga quais das afirmações são falsas e justifique suas respostas.
(1) Multiplicando o numerador e o denominador por um mesmo número real não nulo não alteramos o valor da fração ;
(2) Adicionando um mesmo número real ao numerador e ao denominador não alteramos o valor da fração ;
(3) Diminuindo de duas unidades o numerador e o denominador não alteramos o valor da fração ;
(4) Dividindo o numerador e o denominador por um real não nulo podemos alterar o valor da fração .

22. Na figura a seguir a área da região compreendida entre as circunferências vale $\frac{7}{4}$ da área da circunferência menor. Qual é a relação entre o raio da circunferência maior e o da menor ?

23. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$.
(a) $(2x-1)(|x|-3) = 0$
(b) $(x^2-4)(3-x) = 0$
(c) $(2x-x^2)(2-|x-1|) = 0$
(d) $(|x|-2)\sqrt{2-x} = 0$.

24. Seja $a \in \mathbb{R}$. Use o exercício 14 da lista de *Exercícios Resolvidos* para mostrar que: $a^4 = 1$ quando, e somente quando, $a = \pm 1$.

25. Seja $b \in \mathbb{R}$. Use o exercício anterior para resolver a equação $x^4 = b$ em $\mathbb{R}$. Apresente uma solução similar àquela que fizemos no exercício 16 da lista de *Exercícios Resolvidos*.

26. A expressão $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ é sempre positiva para $x \in \mathbb{R}$?

27. Mostre que
$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+x+1)(x^3+1)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. Use esse resultado para determinar onde a expressão $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

- se anula ;
- é positiva ;
- é negativa .

28. Dado que $x\,,z \in \mathbb{R}$, fatore as expressões:
(a) $2x^3-1$
(b) $8-|z|^3$
(c) $1-x^7$
(d) z^8-1
(e) x^7-x .

29. Mostre que as igualdades a seguir são verdadeiras.
(a) $1-x = (1+\sqrt{x}\,)(1-\sqrt{x}\,)\ ,\ \forall\, x \geq 0$.
(b) $1-|x| = (1+\sqrt{|x|}\,)(1-\sqrt{|x|}\,)\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
(c) $x-1 = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

30. Volte ao exercício 19 da lista de *Exercícios Resolvidos* para responder as seguintes perguntas.

(i) Quando é que a média aritmética de dois números reais positivos é maior do que a sua média geométrica ?
(ii) Quando é que a média aritmética de dois números reais positivos é igual a sua média geométrica ?

31. Sejam $a\,,b \in [\,0\,,\infty)$. Pergunta-se: quando é que $\sqrt{a^2+b^2}$ é igual a $a+b$?

32. Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$. Pergunta-se: quando é que $\sqrt{a^2+b^2}$ é igual a $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$?

33. Sejam $a\,,b > 0$. Mostre que nesse caso temos que
$$\sqrt{a^2+b^2} < a+b\,.$$

34. Mostre que $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$ quaisquer que sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$.

35. Sejam $a\,,b \geq 0$. Mostre que
$$\sqrt[3]{a^3+b^3} \leq a+b\,.$$

36. Use o exercício anterior para mostrar que
$$\sqrt[3]{a+b} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \quad \text{quando} \quad a\,,b \geq 0\,.$$

37. Proponha exercícios similares aos dois anteriores, trocando 3 por 4, e resolva-os.

5

Expressão decimal

1 Número decimal

Número decimal é todo número real que pode ser escrito na forma

$$\pm\frac{p}{10^q} \quad \text{onde} \quad p\,,q \quad \text{são inteiros} \quad \text{e} \quad p\,,q \geq 0\,.$$

Lembre-se que $10^0 = 1$. São exemplos de números decimais:

$$2 = \frac{2}{10^0} \quad ; \quad \frac{7}{10} \quad ; \quad -\frac{21}{10^3} \quad ; \quad \frac{4.237}{10^2} \quad ; \quad -\frac{213.729}{10^4}.$$

Também os escrevemos na forma:

$$\frac{7}{10} = 0{,}7 \quad ; \quad -\frac{21}{10^3} = -0{,}021 \quad ; \quad \frac{4237}{10^2} = \underbrace{42{,}37}_{\substack{\textit{expressão} \\ \textit{decimal finita}}} \quad ; \quad -\frac{213729}{10^4} = -\underbrace{21{,}3729}_{\substack{\textit{expressão} \\ \textit{decimal finita}}}$$

isto é, na forma de uma *expressão decimal finita* já que é constituída de um número finito de casas decimais.

Repare que os números a seguir também são números decimais:

$$\frac{1}{2}\left(= \frac{5}{10} = 0{,}5\right) \quad ; \quad -\frac{21}{5}\left(= -\frac{42}{10} = -4{,}2\right) \quad ; \quad \frac{441}{25}\left(= \frac{1.764}{10^2} = 17{,}64\right).$$

De fato, não é difícil demonstrar que os números decimais são aqueles que podem ser escritos na forma:

$$\pm\frac{p}{2^q \times 5^r} \quad \text{onde} \quad p\,,q\,,r \quad \text{são inteiros} \quad \text{e} \quad p\,,q\,,r \geq 0\,.$$

Uma maneira de reconhecer um número decimal, dado na forma de uma fração de números inteiros, é determinando a forma irredutível dessa fração. Ele é um número decimal se, e

somente se, o denominador dessa fração irredutível possui, apenas, fatores da forma 2^q ou 5^r onde q e r são inteiros maiores ou iguais a zero.

Exemplos

❄ Segundo a definição, todo número inteiro n é um número decimal já que ele pode ser colocado na forma $\pm|n|/10^0$.

❄ Concluímos também da observação anterior que $\dfrac{213}{10^5}$; $\dfrac{1.201}{2^4}$; $\dfrac{22.003}{5^3}$; $-\dfrac{11.253}{2^7 \times 5^8}$ são números decimais já que no denominador temos apenas os fatores 2 ou 5 .

❄ As expressões decimais associadas aos números do exemplo anterior são:

$$\frac{213}{10^5} = 0{,}00213 \quad ; \quad \frac{1.201}{2^4} = \frac{1.201 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{750.625}{10^4} = 75{,}0625$$

$$-\frac{11.253}{2^7 \times 5^8} = -\frac{11.253 \times 2}{10^8} = -0{,}00022506 \quad ; \quad \frac{22.003}{5^3} = \frac{22.003 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{176.024}{10^3} = 176{,}024\,.$$

❄ No entanto $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{25}{7}$; $\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 11^8}{5^3 \times 13^2}$ não são números decimais pois essas frações irredutíveis possuem no denominador potências com bases diferentes de 2 e de 5 .

2 Expressão decimal

Podemos associar à cada número racional (decimal ou não) uma expressão decimal. Para isso usamos o *Algoritmo de Euclides* como nos quadros a seguir:

e escrevemos,

$$\frac{21}{16} = \underbrace{1{,}3125}_{\substack{\text{expressão} \\ \text{decimal finita}}} = \frac{13.125}{10^4} \quad ; \quad \frac{5209}{999} = \underbrace{5{,}214214214\ldots}_{\substack{\text{expressão} \\ \text{decimal infinita}}}$$

No primeiro exemplo temos um número racional com uma *expressão decimal finita*, ou seja, um número decimal. No segundo, temos um número racional cuja *expressão decimal é infinita e periódica*; trata-se de uma *dízima periódica*. Em ambos os casos, a parte da expressão decimal após a vírgula é dita *parte decimal* e aquela anterior a vírgula é denominada *parte inteira*.

Não é muito difícil demonstrar, usando o Algorítmo de Euclides, que os números racionais podem se apresentar, em termos de expressões decimais, sob duas formas, não exclusivas :

☞ ou admitem uma expressão decimal finita e nesse caso estamos diante de um *número decimal* ;

☞ ou admitem uma expressão decimal infinita e periódica, e nesse caso estamos diante de um *dízima periódica*.

Aliás, dentre os números reais, apenas os números racionais admitem expressões decimais como descrito nos dois itens acima. Assim, uma pergunta natural é a seguinte:

dada uma expressão decimal finita, ou infinita mas periódica,
qual fração de inteiros ela representa ?

Quando a expressão decimal é finita, a questão é simples:

$$1{,}07 = \frac{107}{10^2} \quad ; \quad -0{,}023 = -\frac{23}{10^3} \quad ; \quad 12{,}234 = \frac{12.234}{10^3}\,.$$

Consideremos agora, a expressão decimal $12{,}0134343434\ldots$ a qual é infinita e periódica. Ela também é denotada por $12,01\overline{\mathbf{34}}$ onde $\overline{\mathbf{34}}$ significa $34343434\ldots$

Qual fração de inteiros essa expressão decimal representa ?

Seja $x = 12{,}013434\ldots$
Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^4 e 10^2, e subtraindo, obtemos:

$$\begin{aligned} 10^4x &= 120134{,}34343434343434\ldots \\ 10^2x &= \quad 1201{,}34343434343434\ldots \\ \hline 10^4x - 10^2x &= 120134 + 0{,}343434\ldots - 1201 - 0{,}343434\ldots \\ &= 120134 - 1201 \\ &= 118\,933\,. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$x = \frac{118.933}{10^4 - 10^2} = \frac{118.933}{10^2(10^2-1)} = \frac{118.933}{10^2 \times 99} = \frac{118.933}{9.900}\,.$$

Assim, a expressão decimal $12{,}0134343434\ldots$ representa a fração $\dfrac{118.933}{9.900}$.

Os argumentos que acabamos de usar para descobrir qual racional tem a expressão decimal $12{,}0134343434\ldots$ adapta-se a qualquer expressão decimal que seja *infinita e periódica*.

Guarde a *magia* da solução : a multiplicação de x por 10^4 e 10^2 teve como objetivo produzir duas expressões decimais distintas *com a mesma parte decimal*. Assim, a diferença dessas expressões decimais será um número inteiro.

A fração irredutível que representa uma dízima periódica é dita sua *geratriz*.

Os irracionais também possuem expressões decimais as quais são *infinitas e não periódicas*. Em particular, sobre as representações decimais de π , de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{5}$ temos:

$$\begin{aligned}
\pi &= 3{,}141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592\,3\ldots \\
\sqrt{2} &= 1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799\ldots \\
\sqrt{5} &= 2{,}2360679774997896964091736687312762354406183596115257242708972454\ldots
\end{aligned}$$

Repare que não podemos fazer com os irracionais a *magia* que fizemos com as dízimas periódicas, pois falta aos irracionais a periodicidade na parte decimal.

Repare também que o número decimal $3{,}141592653589793238$ é um valor aproximado para π. Mais precisamente, temos que :

$$\pi - 3,\underbrace{141592653589793238}_{18\ \text{dígitos}} = 0,\underbrace{000000000000000000}_{18\ \text{dígitos}}462643383279502884197\,1\ldots$$

Consequentemente, teremos :

$$\pi - 3{,}141592653589793238 < 0,\underbrace{00000000000000000}_{17\ \text{dígitos}}1 = 10^{-18}$$

$$\pi - 3{,}141592653589793238 > 0,\underbrace{000000000000000000}_{18\ \text{dígitos}}1 = 10^{-19}$$

Podemos refinar mais ainda esta aproximação usando um número muito maior de casas decimais.

Aliás, um dos aspectos da *harmonia* a qual citamos quando falamos dos números racionais e irracionais, na página 25, é exatamente o fato de podermos aproximar, indefinidamente, cada número irracional por números decimais, como observado acima, no caso do número π .

De forma um pouco mais precisa : dado um número irracional λ qualquer, podemos encontrar um número decimal b tal que a distância entre λ e b seja inferior a 10^{-100} ou inferior a $10^{-100000}$ ou inferior a $10^{-10^{1000}}$, etc.

Exemplos

❄ O racional $1/3$ não é um número decimal pelos argumentos acima mencionados. Sua expressão decimal é a dízima periódica $0{,}333\ldots$

❄ O número real $0{,}010010001000010000001\underbrace{000000}_{6\ \text{dígitos}}1\underbrace{0000000}_{7\ \text{dígitos}}1\underbrace{00000000}_{8\ \text{dígitos}}1\underbrace{000000000}_{9\ \text{dígitos}}10000\ldots$ não é um número racional pois sua expressão decimal, apesar de infinita, não é periódica, por construção.

❄ Note também que se substituirmos os 500 primeiros dígitos da parte decimal pelo dígito zero, no exemplo anterior, continuamos com um número irracional. Mais precisamente, dado um número inteiro positivo n qualquer, se substituirmos os n primeiros dígitos da parte decimal pelo dígito zero, no exemplo do item anterior, continuaremos com um número irracional, pois a expressão decimal continuará infinita e não periódica. Além disso, o irracional obtido é positivo e inferior a 10^{-n} . Fantástico !!! Com este processo acabamos de criar números irracionais tão próximos do zero quanto quizermos !!!!

$$0\,,\underbrace{0000\ldots000}_{n \text{ dígitos zero}}\ldots100\ldots010\ldots < 0\,,\underbrace{0\,0\,0\,0\ldots0\,0}_{n-1 \text{ dígitos}}1 = 10^{-n}.$$

De fato, dado um número racional qualquer podemos usar está operação para construir números irracionais tão próximo quanto quizermos do número racional dado !! Ainda não vimos, mas veremos mais adiante que a soma ou diferença de um número racional por um número irracional tem como resultado um número irracional.

Também poderíamos criar números irracionais próximos de zero ao considerarmos números irracionais da forma $10^{-n}\sqrt{2}$ ou então $\sqrt{2}/n$ onde n é um inteiro positivo. A medida que aumentamos o inteiro n obtemos números irracionais cada vez mais próximos de zero. Veremos mais adiante que o produto de um número racional não nulo por um número irracional produz um número irracional.

❄ Pela mesma razão o número real $1{,}12\,11\,2\,111\,2\,1111\,2\,\underbrace{11111}_{5 \text{ dígitos } 1}\,2\,\underbrace{111111}_{6 \text{ dígitos } 1}\,2\,\underbrace{1111111}_{7 \text{ dígitos } 1}\,2\,\underbrace{11111111}_{8 \text{ dígitos } 1}\,2\ldots$ é um número irracional.

❄ Pela mesma razão o número real $0{,}\underbrace{12345678910}_{1 \text{ a } 10}\underbrace{11121314151617181920}_{11 \text{ a } 20}212223\ldots$ é um número irracional.

❄ O racional $17/5$ é um número decimal pelos argumentos anteriormente mencionados e sua expressão decimal é $3{,}4$.

❄ Vamos repetir a *magia* exibida nesta seção para determinar a geratriz da dízima $0{,}9999\ldots$

Para isso, seja $x = 0{,}9999\ldots$

Assim temos :

$$\begin{array}{rl} 10\,x = & 9{,}999999999\ldots \\ x = & 0{,}999999999\ldots \\ \hline 10\,x - x = & 9 + 0{,}9999999\ldots - 0{,}9999999\ldots = 9 \end{array}$$

Daí concluímos que $x = 1$, ou seja, $0{,}9999\ldots$ também é uma expressão decimal para o número 1 . Podemos repetir esse processo, para associar a todo número decimal uma dízima periódica. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 2{,}357 &= 10^{-3} \times 2357 = 10^{-3}(2356 + 1) = 10^{-3}(2356 + 0{,}9999\ldots) \\ &= 10^{-3} \times 2356{,}9999\ldots = 2{,}356999999\ldots \end{aligned}$$

3 Notação científica

Para facilitar a escritura de números decimais muito grandes ou muito próximos de zero, utiliza-se várias notações. Uma delas é a *notação científica* que é da forma

$$\pm\, b \times 10^n$$

onde n é um número inteiro e b é um número decimal tal que $1 \leq b < 10$. Nesse caso, dizemos que a *ordem de grandeza* de $b \times 10^n$ é 10^n e que $-b \times 10^n$ tem ordem de grandeza -10^n.

Exemplos

- Em notação científica:
  - $125{,}23$ é escrito como $1{,}2523 \times 10^2$;
  - $0{,}00032$ é escrito como $3{,}2 \times 10^{-4}$;
  - -1012000 é escrito como $-1{,}012 \times 10^6$;
  - A massa de um eletron é de aproximadamente $9{,}1093822 \times 10^{-31}\, kg$;
  - A velocidade da luz que é de aproximadamente $300.000\, km/s$ é escrito como $3 \times 10^5\, km/s$;
  - O *número de Avogadro*, muito usado na química vale $6{,}02 \times 10^{23}$ aproximadamente ;
  - A massa do Sol é de $2 \times 10^{30}\, kg$ aproximadamente.
- A ordem de grandeza de
  - 120×10^9 é 10^{11} pois, em notação científica, temos $120 \times 10^9 = 1{,}2 \times 10^{11}$;
  - $5.501{,}34 \times 10^{20}$ é 10^{23} pois, em notação científica, temos $5.501{,}34 \times 10^{20} = 5{,}50134 \times 10^{23}$;
  - $602{,}002 \times 10^{-30}$ é 10^{-28} pois, em notação científica, temos $602{,}002 \times 10^{-30} = 6{,}02002 \times 10^{-28}$.

Exercícios resolvidos

1. **Quais dos números a seguir são números decimais ?**

(a) $\frac{5}{2}$ **(b)** $\frac{33}{12}$ **(c)** $\frac{2}{30}$ **(d)** $\frac{4}{5}$ **(e)** $\frac{22}{11}$ **(f)** $-\frac{213}{28}$ **(g)** $-\frac{226}{20}$ **(h)** $\frac{125}{35}$.

Solução Depois de colocá-los na forma de uma fração irredutível, devemos verificar quais deles são da forma $\pm\dfrac{p}{2^q \times 5^r}$ onde $p\,,q\,,r$ são inteiros maiores ou iguais a zero. Seguindo essa regra, podemos concluir que:

(a) $\frac{5}{2}$ é um número decimal ;

(b) $\frac{33}{12} = \frac{3 \times 11}{2^2 \times 3} = \frac{11}{2^2}$ é um número decimal ;

(c) $\frac{2}{30} = \frac{1}{3 \times 5}$ não é um número decimal ;

(d) $\frac{4}{5} = \frac{2^2}{5}$ é um número decimal ;

(e) $\frac{22}{11} = 2$ é um número decimal ;

(f) $-\frac{213}{28} = -\frac{3 \times 71}{2^2 \times 7}$ não é número decimal ;

(g) $-\frac{226}{20} = -\frac{226}{2^2 \times 5}$ é um número decimal.

(h) $\frac{125}{35} = \frac{5^3}{5 \times 7}$ não é número decimal.

2. **Escreva os números decimais a seguir na forma de uma fração irredutível:**
(a) 2,22 (b) 52,5 (c) 14,354 (d) 0,0025 .

Solução Em cada item a seguir, a fração à direita está na forma irredutível pois as bases das potências no denominador não dividem o numerador.

(a) $2{,}22 = \frac{222}{100} = \frac{111}{50} = \frac{111}{2 \times 5^2}$;

(b) $52{,}5 = \frac{525}{10} = \frac{525}{2 \times 5} = \frac{3 \times 5^2 \times 7}{2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 7}{2} = \frac{105}{2}$;

(c) $14{,}354 = \frac{14.354}{1000} = \frac{14.354}{2^3 \times 5^3} = \frac{2 \times 7.177}{2^3 \times 5^3} = \frac{7.177}{2^2 \times 5^3}$ onde a última fração está na forma irredutível pois 7.177 não é divisível por 2 , nem por 5 .

(d) $0{,}025 = \frac{25}{10^3} = \frac{5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{1}{2^3 \times 5}$.

3. **Dê a expressão decimal dos seguintes números:**
(a) 32×10^3 (b) $0,3 \times 10^{-2}$ (c) 23×10^{-4} (d) $1/0{,}25$ (e) $2/21$ (f) $\frac{13}{7}$.

Solução Em cada item a seguir o número à direita dá a expressão decimal procurada.

(a) $32 \times 10^3 = 32000$.

(b) $0{,}3 \times 10^{-2} = 0{,}003$.

(c) $23 \times 10^{-4} = 0{,}0023$.

(d) $\frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{25/100} = \frac{100}{25} = 4$.

(e) $\frac{2}{21} = 0{,}\overline{\mathbf{095238}}$ obtido, dividindo-se 2 por 21 .

(f) $\frac{13}{7} = 1{,}\overline{\mathbf{857142}}$ obtido, dividindo-se 13 por 7 .

4. **Determine a geratriz das seguintes dízimas periódicas e escreva a resposta na forma de uma fração irredutível.**
(a) $17{,}\overline{12}$ (b) $1{,}5\overline{631}$ (c) $0{,}\overline{9}$ (d) $-12{,}2\overline{53}$.

Solução Vamos voltar à *magia* da solução exemplificada na página 88.

(a) Seja $x = 17{,}121212\ldots$. Multiplicando x por 10^2 e calculando a diferença $10^2x - x$ obtemos:

$$99\,x = (10^2 - 1)\,x = \mathbf{10^2 x - x} = 1712{,}1212\ldots - 17{,}1212\ldots = 1712 - 17 = 1695\,.$$

Portanto,

$$17,\overline{12} = \frac{1695}{99} = \frac{3 \times 5 \times 113}{3^2 \times 11} = \frac{5 \times 113}{3 \times 11} \quad \text{que está na forma irredutível.}$$

(b) Seja $z = 1{,}5631631\ldots$ Multiplicando z por 10^4 e por 10, e fazendo a diferença teremos:

$$9.990\,z = 10\,z \times 999 = 10\,z\,(10^3 - 1) = \mathbf{10^4\,z - 10\,z} = 15.631{,}631631\ldots - 15{,}631631\ldots = 15.616\,.$$

Logo,

$$1{,}5\overline{631} = \frac{15.616}{9.990} = \frac{2^8 \times 61}{2 \times 3^2 \times 111} = \frac{2^7 \times 61}{3^2 \times 111} \quad \text{que está na forma irredutível.}$$

(c) Seja $w = 0{,}999\ldots$ Multiplicando w por 10 e calculando a diferença $10\,w - w$ teremos:

$$9\,w = \mathbf{10\,w - w} = 9{,}99\ldots - 0{,}99\ldots = 9\,.$$

Consequentemente, $w = 1$.

(d) Seja $y = 12{,}25353\ldots$ Multiplicando y por 10^3 e por 10, e calculando a diferença $10^3\,y - 10\,y$ teremos:

$$990\,y = 10\,y\,(100 - 1) = \mathbf{10^3\,y - 10\,y} = 12.253{,}5353\ldots - 122{,}5353\ldots = 12.131$$

Logo, $-12{,}2\overline{53} = -\dfrac{12.131}{990} = -\dfrac{12.131}{2 \times 3^2 \times 5 \times 11}$ que está na forma irredutível pois 12.131 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5 e nem por 11.

5. **Calcule:**

(a) $\mathbf{6{,}20\overline{2} - 4{,}\overline{2}}$ **(b)** $\sqrt{\mathbf{4{,}\overline{16}}}$ **(c)** $\mathbf{0{,}\overline{1} \times 1{,}\overline{2}}$.

Solução Temos que:

(a) $6{,}20\overline{2} - 4{,}\overline{2} = 6{,}20 + 0{,}00222\ldots - 4{,}22 - 0{,}00222\ldots = 6{,}20 - 4{,}22 = 1{,}98\,.$

(b) Seja $x = 4{,}1616\ldots$ e considere a diferença $10^2x - x$:

$$99\,x = \mathbf{10^2 x - x} = 416{,}1616\ldots - 4{,}1616\ldots = 412\,.$$

Assim,

$$4{,}1616\ldots = \frac{412}{99} = \frac{2^2 \times 103}{3^2 \times 11} \implies \sqrt{4{,}\overline{16}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{103}{11}}\,.$$

(c) Seja $z = 0{,}111\ldots$ Assim, temos[1]:

$$9\,z = \mathbf{10\,z - z} = 1{,}11\ldots - 0,11\ldots = 1 \implies z = 1/9\,.$$

[1] O mesmo tipo de prova também mostra que: $0{,}222\ldots = \frac{2}{9} = 2\times0{,}111\ldots$; $0{,}333\ldots = \frac{3}{9} = 3\times0{,}111\ldots$; $0{,}444\ldots = \frac{4}{9} = 4 \times 0{,}111\ldots$ e assim por diante, até obtermos $0{,}999\ldots = \frac{9}{9} = 9 \times 0{,}111\ldots$

Resulta então que:

$$0,\overline{1} \times 1,\overline{2} = 0{,}111\ldots \times 1{,}222\ldots = \frac{1}{9} \times (1 + 0{,}222\ldots) = \frac{1}{9} \times (1 + 2 \times 0{,}111\ldots)$$
$$= \frac{1}{9} \times \Big(1 + 2 \times \frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{9} \times \frac{11}{9} = \frac{11}{81}\,.$$

6. Escreva os números a seguir usando a notação científica e dê sua ordem de grandeza.

(a) $\mathbf{100.000.000}$ **(b)** $\mathbf{2{,}0102 \times 10^{-20}}$ **(c)** $\mathbf{-0{,}213 \times 10^{7}}$
(d) $\mathbf{0{,}1^{3}}$ **(e)** $\mathbf{0{,}001^{4}}$ **(f)** $\mathbf{0{,}000001^{-6}}$**.**

Solução A notação científica é da forma $\pm\, b \times 10^n$ onde n é um inteiro e $1 \leq b < 10$ é um número decimal. O fator 10^n é a ordem de grandeza. Assim, teremos:

(a) $100.000.000 = 1 \times 10^8 = 10^8$ e a ordem de grandeza é 10^8.

(b) $2{,}0102 \times 10^{-20}$ já está escrito em notação científica e a ordem de grandeza é 10^{-20}.

(c) $-0,213 \times 10^7 = -2{,}13 \times 10^6$
e a ordem de grandeza é 10^6.

(d) $0{,}1^3 = \big(10^{-1}\big)^3 = 10^{-3}$
e a ordem de grandeza é 10^{-3}.

(e) $0{,}001^4 = \big(10^{-3}\big)^4 = 10^{-12}$
e a ordem de grandeza é 10^{-12}.

(f) $0{,}000001^{-6} = \big(10^{-6}\big)^{-6} = 10^{36}$
e a ordem de grandeza é 10^{36}.

7. Efetue os cálculos e exprima o resultado em notação científica:

(a) $\mathbf{0{,}0000021 \times 8.000}$ **(b)** $\mathbf{-\dfrac{0{,}0000002}{50.000}}$ **(c)** $\mathbf{(0{,}0000009)^2}$**.**

Solução Temos que:

(a) $0{,}0000021 \times 8.000 = 2{,}1 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^3 = 16{,}8 \times 10^{-3} = 1{,}68 \times 10^{-2}$.

(b) $-\dfrac{0{,}0000002}{50.000} = -\dfrac{20 \times 10^{-8}}{5 \times 10^4} = -4 \times 10^{-12}$.

(c) $(0{,}0000009)^2 = \big(9 \times 10^{-7}\big)^2 = 9^2 \times \big(10^{-7}\big)^2 = 81 \times 10^{-14} = 8{,}1 \times 10^{-13}$.

8. Use a notação científica e simplifique as expressões a seguir.
(a) $\mathbf{\sqrt{0{,}0000002 \times 0{,}0002}}$ **(b)** $\mathbf{2 \times 10^{16} - 0{,}3 \times 10^{15}}$**.**

Solução Temos que:

(a) $\sqrt{0{,}00000002 \times 0{,}0002} = \Big(2 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{-4}\Big)^{1/2} = \Big(2^2 \times 10^{-12}\Big)^{1/2} = 2 \times 10^{-6}$.

(b) $2 \times 10^{16} - 0{,}3 \times 10^{15} = 10^{15}(2 \times 10 - 0{,}3) = 19{,}7 \times 10^{15} = 1{,}97 \times 10^{16}$.

9. **Considere a dízima periódica $\mathbf{3\,,080808\ldots}$**
Pergunta-se: qual o número mínimo de dígitos $\mathbf{8}$ deve ter o número decimal $b = \mathbf{3\,,0808\ldots08}$ para que a diferença
$$\mathbf{3\,,0808\ldots - 3\,,0808\ldots08 < 10^{-20}\,?}$$

Solução Note que quanto mais dígitos 8 tiver o número b menor será a diferença acima citada. Temos que:

$$3\,,080808\ldots - 3\,,\underbrace{0808\ldots08}_{10\text{ dígitos } 8} = 0\,,\underbrace{000\ldots000}_{20\text{ zeros}}0808\ldots = 10^{-20}\times 0\,,0808\ldots < 10^{-20}.$$

Assim, se o número b tiver 10 dígitos 8 então a diferença citada no problema será inferior a 10^{-20}. Resta saber se 10 é o número mínimo de dígitos !!

Para isso, vejamos o que ocorre se o número b tiver apenas 9 dígitos 8. Nesse caso temos :

$$3\,,080808\ldots - 3\,,\underbrace{0808\ldots08}_{9\text{ dígitos } 8} = 0\,,\underbrace{000\ldots000}_{18\text{ zeros}}0808\ldots = 10^{-18}\times 0\,,0808\ldots$$
$$= 10^{-20}\times 8\,,0808\ldots > 10^{-20}.$$

Portanto, o número mínimo de dígitos que b deve ter é 10.

10. **Use parte da expressão decimal de $\sqrt{5}$ para construir um número decimal cuja distância à $\sqrt{5}$ seja inferior a $\mathbf{10^{-30}}$ e superior a $\mathbf{10^{-31}}$.**

Solução Como vimos na página 89 :

$$\sqrt{5} = 2,236067977499789696409173668731\,276235440618359611525724 27\ldots$$

Temos então que :

$$\sqrt{5} - 2{,}\underbrace{236067977499789696409173668731}_{30\text{ dígitos}} = 0,\underbrace{000000000000000000000000000000}_{30\text{ dígitos}}276235440618359\ldots$$

Consequentemente,

$$\sqrt{5} - 2{,}\underbrace{236067977499789696409173668731}_{30\text{ dígitos}} < 0,\underbrace{00000000000000000000000000000}_{29\text{ dígitos}}1 = 10^{-30}$$
$$\sqrt{5} - 2{,}\underbrace{236067977499789696409173668731}_{30\text{ dígitos}} > 0,\underbrace{000000000000000000000000000000}_{30\text{ dígitos}}1 = 10^{-31}$$

Portanto, o número decimal $2{,}236067977499789696409173668731$ está a uma distância de $\sqrt{5}$ que é inferior a 10^{-30} e superior a 10^{-31}.

Exercícios

1. Quais dos números a seguir são números decimais?
(a) $\frac{7}{23}$ (b) $\frac{101}{15}$ (c) $\frac{3}{15}$
(d) $-\frac{4}{25}$ (e) $\frac{122}{125}$ (f) $\frac{321}{152}$.

2. Escreva os números decimais a seguir na forma de uma fração irredutível.
(a) $2{,}211$ (b) $0{,}223$ (c) $-0{,}012$
(d) $-3{,}2122$ (e) $11{,}121$ (f) $2{,}2213$.

3. Dê a expressão decimal dos seguintes números:
(a) 23×10^{-3} (b) $0{,}223 \times 10^{3}$
(c) $-3{,}21 \times 10^{-2}$ (d) $11{,}121 \times 10^{3}$.

4. Calcule a geratriz das seguintes dízimas periódicas.
(a) $23{,}\overline{21}$ (b) $0{,}22\overline{012}$
(c) $-3{,}21\overline{201}$ (d) $11{,}121\overline{52}$
(e) $0{,}001122\overline{9}$ (f) $-2{,}21214\overline{007}$.

5. Escreva as expressões a seguir na forma de uma fração irredutível.
(a) $\frac{0{,}6}{3{,}75}$ (b) $\frac{0{,}025}{2{,}025}$ (c) $\frac{3{,}002}{0{,}0012}$.

6. Qual o menor inteiro k que satisfaz a condição $0{,}0010101 \times 10^{k} > 1$?

7. Efetue os cálculos e dê a resposta na forma de uma fração irredutível.
(a) $2{,}0404\ldots + 1{,}0202\ldots$
(b) $2{,}\overline{1} - 1{,}\overline{2}$
(c) $21{,}\overline{21}/7{,}\overline{7}$
(d) $\sqrt{4{,}\overline{4}}$
(e) $(2{,}111\ldots)^{2}$.

8. Complete os itens:
(a) ..... , ... $= 2{,}312 \times 10^{-5}$
(b) $0{,}00002376 = 237{,}6 \times 10^{\cdots\cdots}$
(c) $21235{,}89034 =$ .... , ... $\times 10^{-10}$
(d) $100021387945{,}70001 =$ .... , ... $\times 10^{15}$
(e) .... , ... $= 0{,}001010155 \times 10^{8}$.

9. Use um software adequado para determinar a expansão decimal de $\frac{239}{145}$.

10. Escreva os números a seguir, usando a notação científica e dê suas ordens de grandeza.
(a) $0{,}32626$ (b) $11{,}23 \times 10^{-3}$
(c) $21001002{,}2 \times 10^{-10}$ (d) $0{,}0002111 \times 10^{6}$
(e) $0{,}0000014 \times 10^{8}$ (f) $2{,}3737$.

11. Use a notação científica para facilitar os cálculos indicados a seguir e exprima o resultado em notação científica.
(a) $0{,}22 \times 15000$
(b) $10{,}2 \times 0{,}00012$
(c) $21001002{,}2 \times 5000$
(d) $0{,}0002111 \times 60000$
(e) $0{,}0000014 \times 0{,}00000007$
(f) $2{,}3737 \times 0{,}00000005$.

12. Expresse $6.400.000.000/0{,}0004$ em notação científica.

13. Escreva as frações a seguir como dízimas periódicas.
(a) $2/7$ (b) $-35/49$
(c) $101/165$ (d) $23/11$
(e) $-100/99$ (f) $23/12$.

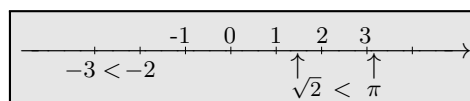
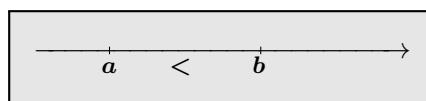
6

Relação de ordem

Na Lição 2 introduzimos as noções de desigualdades e de estimativas quando tratamos da representação dos números reais na reta. Fizemos isso na seção 3 daquela lição e lá apresentamos algumas definições e propriedades que relembraremos aqui.

Definição. Sejam a e b dois números reais, vistos como pontos da reta orientada.

- Dizemos que a *é menor do que* b, e escrevemos $\boldsymbol{a < b}$, quando a está à esquerda de b na reta orientada;
- Dizemos que a *é maior do que* b, e escrevemos $\boldsymbol{a > b}$, quando a está à direita de b na reta orientada.

Segue imediatamente da definição acima que: $a > b \iff b < a$.

Para indicar que a é *menor ou igual à* b escrevemos: $a \leq b$. Analogamente, escrevemos $a \geq b$ para indicar que a é *maior ou igual à* b.

Dizemos que $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$ são *desigualdades* e que as relações "$<$" , "$\leq$" , "$>$" e "$\geq$" são *relações de ordem*.

Quando um número real c é, simultaneamente, *maior do que* a **e** *menor do que* b escrevemos:

$$\boldsymbol{a < c < b} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad \boldsymbol{b > c > a\,.}$$

Uma tal desigualdade é uma *estimativa* para o valor de c. Dizemos também que a e b são *aproximações* para c: a é uma aproximação para c por *valores menores* (ou por *falta*) e b é uma aproximação por *valores maiores* (ou por *excesso*).

Nesse sentido, as extremidades de intervalos limitados da reta são estimativas para os pontos do intervalo. Por definição temos:

$$a \in (3,4) \iff 3 < a < 4.$$

Quando temos uma desigualdade do tipo $a < b$ ou $a \leq b$ dizemos que:

- b é uma *majoração para* a ou que b é uma *cota superior para* a;
- a é uma *minoração para* b ou que a é uma *cota inferior para* b.

Exemplos

- ❄ $\sqrt{2} < 2$
- ❄ $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
- ❄ $3 < \pi < 4$
- ❄ $-4 < -\pi < -3$
- ❄ $3{,}1 < \pi < 3{,}2$
- ❄ $\sqrt{4} > \sqrt{3} > \sqrt{2}$
- ❄ $0 > -\frac{1}{2}$
- ❄ $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$
- ❄ $-\frac{2}{5} < 0 < \frac{1}{2}$
- ❄ $23 < 23^2$
- ❄ $0{,}25 > (0{,}25)^2$
- ❄ $23 > \sqrt{23}$
- ❄ $0{,}25 < \sqrt{0{,}25}$
- ❄ $4 - 2\sqrt{2} < 4 - \sqrt{2}$
- ❄ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
- ❄ $0{,}42013 < 0{,}4201301$.
- ❄ $2,02\overline{34} > 2,02\overline{3}$
- ❄ $-1,233 < -1,232$.

Com significados e nomenclaturas semelhantes aos de $a < x < b$ escreveremos:

$$a \leq x < b \quad ; \quad a \leq x \leq b \quad ; \quad a < x \leq b.$$

Exemplos

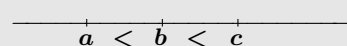
- ❄ $1 \leq \sqrt{2} < 2$
- ❄ $2 \leq 2$
- ❄ $4 > \pi \geq 3$
- ❄ $-\sqrt{2} \geq -2$
- ❄ $-6 \leq -5 < -2$
- ❄ $-6{,}30 \leq -2\pi \leq -6{,}28$
- ❄ $-\sqrt{2} \geq -\sqrt{2}$
- ❄ $\sqrt{3} \geq \sqrt{2}$
- ❄ $0{,}02 \geq 0 \geq -\frac{1}{2}$
- ❄ $-\pi \leq -3$
- ❄ $-\sqrt{3} \leq -\sqrt{2}$
- ❄ $0{,}5 \leq \frac{1}{2}$
- ❄ $1 \geq 0{,}9$
- ❄ $1{,}1001 \geq 1{,}1$
- ❄ $-5{,}01 \leq -5{,}009$.
- ❄ $2{,}001 \geq 2{,}00099$
- ❄ $\sqrt[5]{1{,}234} \leq 1{,}234$
- ❄ $\sqrt{0{,}\overline{81}} \geq 0{,}\overline{81}$.

1 Propriedades da relação de ordem

Dados $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ temos:

☞ **se** $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b < c}$ **então** $\boldsymbol{a < c}$.

☞ **se** $\boldsymbol{a \leq b}$ **e** $\boldsymbol{a \geq b}$ **então** $\boldsymbol{a = b}$.

A primeira propriedade também é verdadeira quando trocamos " $<$ " por " $\leq$ ", por " $>$ " ou por " $\geq$ ". Ela é conhecida como *propriedade transitiva* da relação de ordem.

Representação gráfica da transitividade

Dados $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ apenas uma das alternativas ocorre: $\boldsymbol{a = b}$, $\boldsymbol{a < b}$, $\boldsymbol{a > b}$.

Exemplos

Dados $x\,,y\,,a\,,b \in \mathbb{R}$ temos:

❄ Se $x < 2$ e $2 < y$ então $x < y$.

❄ Se $x \leq \pi$ e $\pi \leq x$ então $x = \pi$.

❄ Se $y \leq 3$ e $3 \leq x + 1$ então $y \leq x + 1$.

❄ Se $a + b \leq 3$ e $3 < 2a$ então $a + b < 2a$.

❄ Se $a < b$ então $a \leq b$.

❄ Se $x \geq y$ e $y > \pi$ então $x > \pi$.

☛ **Nota:** Escrevemos $a \not< b$ para indicar que a *não é menor do que* b. Isso significa que $a = b$ ou $a > b$, isto é:

$$a \not< b \iff a = b \text{ ou } a > b \iff a \geq b\,.$$

Analogamente: $a \not\leq b \iff a > b\,.$

Além das propriedades vistas acima, temos ainda:

Dados $\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ temos:

☞ $\boldsymbol{a < b \iff a + c < b + c}$

Quando $\boldsymbol{c}$ **é positivo** temos:

☞ $\boldsymbol{a < b \iff a \times c < b \times c}$

Quando $\boldsymbol{c}$ **é negativo** temos:

☞ $\boldsymbol{a < b \iff a \times c > b \times c}$

De $\sqrt{5} < 2{,}23$ podemos concluir que:

☞ $\sqrt{5} + 1 < 2{,}23 + 1.$

☞ $\pi \times \sqrt{5} < \pi \times 2{,}23.$

☞ $-2{,}1 \times \sqrt{5} > -2{,}1 \times 2{,}23.$

Essas três propriedades continuam verdadeiras quando invertemos os sinais das desigualdades. Elas também continuam verdadeiras quando inserimos o sinal de igual, isto é, quando trocamos "$<$" por "$\leq$" e "$>$" por "$\geq$"

2 Outras propriedades

Como conseqüência das propriedades anteriores temos as regras enunciadas a seguir onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ **quaisquer** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array} \quad (+)$$

Quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ são **positivos** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ \hline a \times c < b \times d \end{array} \quad (\times)$$

Quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ são **positivos** temos:

$$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Essas três regras continuam verdadeiras quando invertemos os sinais das desigualdades. Elas também continuam verdadeiras quando inserimos o sinal de igual, isto é, quando trocamos "$<$" por "$\leq$" e "$>$" por "$\geq$"

Além disso podemos provar as regras a seguir, usando as regras acima.

Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ **quaisquer** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c \leq d \\ \hline a + c < b + d \end{array} \quad (+)$$

Quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ são **positivos** temos:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c \leq d \\ \hline a \times c < b \times d \end{array} \quad (\times)$$

☛ **Atenção:** Não subtraímos nem dividimos desigualdades de mesmo sinal. Veja os exercícios 15 e 16 a seguir.

Enunciamos agora mais três regras, consequências das regras anteriores.

Quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ são **positivos** e $n \in \mathbb{Z}^+$ temos:

$$a < b \iff a^n < b^n.$$

Quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ são **positivos** $n \in \mathbb{Z}^+$ temos:

$$a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Quando $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ são **positivos** temos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc \,.$$

Como dito em regras anteriores, as três regras acima continuam válidas quando trocamos o sinal " $<$ " por " $\leq$ " por " $>$ " ou por " $\geq$ " .

Exercícios resolvidos

1. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{23} + \dfrac{1}{79} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{22} + \dfrac{1}{79}$ **?**

Solução Sem fazer os cálculos, concluímos que a resposta é **SIM** pois $\frac{1}{23} < \frac{1}{22}$ e todas as outras parcelas são comuns a ambos os membros da desigualdade, isto é:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{79} < \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{79} \iff \frac{1}{23} + \frac{1}{79} < \frac{1}{22} + \frac{1}{79} \iff \frac{1}{23} < \frac{1}{22} \,.$$

2. $(3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 - 2202{,}33) < (3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 + 2202{,}33)$ **?**

Solução Temos que $-2202{,}33 < 2202{,}33$. Logo, $11101{,}02 - 2202{,}33 < 11101{,}02 + 2202{,}33$. Como $3421 + 2101{,}2$ é positivo, segue que

$$(3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 - 2202{,}33) < (3421 + 2101{,}2)(11101{,}02 + 2202{,}33) \,,$$

mostrando que a afirmação é verdadeira. Logo, a resposta é **SIM**.

3. **Sejam a , b números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Justifique suas respostas.**

(1) $a < 3 \ \text{ e } \ 3 < 2b - 1 \implies a < 2b - 1\,;$
(2) $a \leq 1 \ \text{ e } \ 3 \leq 2b - 1 \implies a \leq 2b - 3\,;$
(3) $a \leq 3 + b \ \text{ e } \ 3 + b \leq a \implies a - 3 = b\,;$
(4) $a \leq 1 \ \text{ e } \ b \geq 2 \implies a \leq 2b - 3\,;$
(5) $2b + 1 \leq 2a \ \text{ e } \ a \leq 1/2 + b \implies a = b + 1/2\,;$
(6) $b - 2a < 1 \implies 2a > b - 1\,;$
(7) $a + b \geq 2 \ \text{ e } \ a - b \leq 1 \implies a^2 - b^2 \leq a + b\,;$
(8) $a + 3 \leq b \ \text{ e } \ b - 5 < 2a \implies (b - 5)/2 < a \leq b - 3\,.$

Solução Vamos usar as diversas propriedades das desigualdades.

(1) A afirmação (1) é **verdadeira**. Trata-se de uma aplicação imediata da propriedade transitiva da relação de ordem.

(2) De $3 \leq 2b - 1$ concluímos que $1 \leq 2b - 3$. Assim, temos que: $a \leq 1$ e $1 \leq 2b - 3$. Consequentemente, $a \leq 2b - 3$. Concluímos assim que a afirmação (2) é **verdadeira**.

(3) De $a \leq 3 + b$ e $3 + b \leq a$ segue que $a = b + 3$, isto é, $a - 3 = b$. Logo, a afirmação (3) é **verdadeira**.

(4) De $b \geq 2$ segue que $2b \geq 4$ ou seja, $1 \leq 2b - 3$. Agora, de $a \leq 1$ e $1 \leq 2b - 3$ obtemos $a \leq 2b - 3$. Consequentemente, a afirmação é **verdadeira**.

(5) Dividido por 2 a primeira desigualdade obtemos $b + 1/2 \leq a$. Assim, de $b + 1/2 \leq a$ e $a \leq 1/2 + b$ concluímos que $a = b + 1/2$. Logo, a afirmação é **verdadeira**.

(6) Multiplicando ambos os membros da primeira desegualdade por -1 teremos: $-b + 2a > -1$. Donde, $2a > b - 1$ mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(7) Temos que $a + b$ é positivo. Assim, multiplicando ambos os membros da segunda desigualdade por $a + b$ obtemos $a^2 - b^2 \leq a + b$ concluíndo que a afirmação é **verdadeira**.

(8) Operando sobre as duas desigualdades obtemos: $a \leq b - 3$ e $a > (b - 5)/2$. Donde, concluímos que $(b - 5)/2 < a \leq b - 3$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

4. **Sejam a, b números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Justifique suas respostas.**

(1) $a < -1$ e $b \geq 4/3 \implies a \leq 2b - 3$;
(2) $a \leq b - 1$ e $b \leq 5 \implies a + b \leq 8$;
(3) $a + b \leq 2$ e $2a \geq 3 \implies b + 2 \leq a$;
(4) $a + b \geq 2$ e $a - b \leq 1 \implies b \geq 1/2$;
(5) $a \neq 0$ e $a < 1 \implies 1/a > 1$;
(6) $|a| + 2 < b \implies b/(|a| + 2) > 1$;
(7) $a \geq 2 \implies 1/(a + 1) \leq 1/3$;
(8) $a > \sqrt{2} \implies 1/(a^2 + 1) \leq 1/3$.

Solução Novamente, faremos uso das propriedades das desigualdades.

(1) De $b \geq 4/3$ segue que $2b \geq 8/3$. Agora, somando membro a membro as desigualdades $a < -1$ e $0 \leq 2b - 8/3$ obtemos:

$$a < 2b - \frac{8}{3} - 1 = 2b - 3 - \frac{2}{3} < 2b - 3.$$

Logo, $a < 2b - 3$ e, consequentemente, $a \leq 2b - 3$ demonstrando assim que a afirmação é **verdadeira**.

(2) Somando as duas desigualdades obtemos: $a + b \leq b - 1 + 5$ ou seja, $a + b \leq b + 4$. Como $b \leq 5$, concluímos que $a + b \leq 9$, que não é a desigualdade desejada!!!

Será que a afirmação proposta é falsa ? Para mostrar que ela é falsa precisamos construir um contra-exemplo. Tomemos então $b = 5$ e $a = 4$. Note que esses valores satisfazem as condições $b \leq 5$ e $a \leq b - 1$. No entanto, $a + b \not\leq 8$ pois $a + b = 9$. Assim, concluímos que a afirmação proposta é **falsa**.

(3) De $2a \geq 3$ segue que $-2a \leq -3$. Somando essa última desigualdade com $a + b \leq 2$ segue que $a + b - 2a \leq 2 - 3$, ou seja, $b + 1 \leq a$ que não é a desigualdade proposta. Será que a conclusão

$b+2 \leq a$ é falsa? Vejamos. Tome $a = 3/2$ e $b = 2 - 3/2 = 1/2$ os quais satisfazem as hipóteses $2a \geq 3$ e $a + b \leq 2$ mas não satisfazem a tese $b + 2 \leq a$ já que $b + 2 = 5/2$ e $a = 3/2$. Logo, a afirmação proposta é **falsa**.

(4) De $a - b \leq 1$ concluímos que $b - a \geq -1$. Somando essa última desigualdade com $a + b \geq 2$ teremos que $2b \geq 1$ e consequentemente, $b \geq 1/2$. Portanto, a afirmação proposta é **verdadeira**.

(5) Como $a \neq 0$, temos que $1/a$ está bem definido. Se a fosse positivo, invertendo os membros da desigualdade $a < 1$ obteríamos $1/a > 1$. Esse argumento nos dá uma indicação clara que a afirmação proposta nesse item deve ser falsa quando a for negativo.

Procuremos então um contra-exemplo para a afirmação proposta no exercício. Para isso, seja $a = -1$. Assim, temos $0 \neq a = -1 < 1$ mas $1/a = -1 \not> 1$. Portanto, a afirmação (5) é **falsa**.

(6) Temos que $|a| + 2$ é positivo. Logo, dividindo a desigualdade $|a| + 2 < b$ por $|a| + 2$ teremos, $1 < b/(|a| + 2)$, ou seja, $b/(|a| + 2) > 1$ mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(7) De $a \geq 2$ segue que $a+1 \geq 3$. Logo, $1/(a+1) \leq 1/3$, mostrando que a afirmação é **verdadeira**.

(8) De $a > \sqrt{2}$ segue que $a^2 > 2$. Logo, $a^2 + 1 > 3$. Consequentemente, $a^2 + 1 \geq 3$ e temos

$$\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{3}$$

mostrando assim que a afirmação (8) é **verdadeira**.

5. $\mathbf{2 + \sqrt{1{,}5} > 2{,}5\,\sqrt{1{,}5}}$ **?**

Solução Temos que $1{,}5 = 15/10 = 3/2$ e $2{,}5 = 25/10 = 5/2$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{1{,}5} > 2{,}5\sqrt{1{,}5} \quad &\iff \quad 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \iff \quad 4 + 4\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} > \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{75}{8} \\ &\iff \quad \frac{44}{8} + 4\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{75}{8} \quad \iff \quad 4\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{31}{8} \quad \iff \quad \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{31}{32} \\ &\iff \quad \frac{3}{2} > \frac{31^2}{32^2}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadeira pois $3/2 > 1$ enquanto que $31^2/32^2 < 1$. Consequentemente, a resposta é **SIM**.

6. **Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a dupla desigualdade $x + 1 < 3x - 2 \leq 2x + 4$.**

Solução Precisamos determinar os valores de x que satisfazem, simultaneamente, às duas desigualdades: $3x - 2 \leq 2x + 4$ e $3x - 2 > x + 1$.

Resolvendo $3x - 2 \leq 2x + 4$:

$3x - 2 \leq 2x + 4 \quad \iff \quad 3x - 2x \leq 4 + 2 \quad \iff \quad x \leq 6$.

Resolvendo $3x - 2 > x + 1$:

$3x - 2 > x + 1 \iff 3x - x > 2 + 1 \iff 2x > 3 \iff x > 3/2$.

Portanto, x satisfaz a desigualdade $x + 1 < 3x - 2 \le 2x + 4$ se, e somente se $3/2 < x \le 6$.

7. **Para cada inteiro n defina**

$$\langle n \rangle = \begin{cases} n^2 - n & \textbf{quando } n \textbf{ é par} \\ n^2 + n & \textbf{quando } n \textbf{ é ímpar.} \end{cases}$$

Pergunta-se: $\dfrac{\langle n \rangle}{\langle n+1 \rangle} < \dfrac{n}{n+1}$ **quando n é um inteiro par e positivo ?**

Solução Seja n um inteiro par e positivo. Observemos primeiramente que sendo n par então $n+1$ é ímpar. Assim, da definição de $\langle n \rangle$ segue que:

$$\frac{\langle n \rangle}{\langle n+1 \rangle} = \frac{n^2 - n}{(n+1)^2 + (n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+2}.$$

Como $\dfrac{n-1}{n+2} < 1$ e $\dfrac{n}{n+1}$ é positivo, obtemos:

$$\frac{n-1}{n+2} < 1 \implies \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+2} < \frac{n}{n+1} \implies \frac{\langle n \rangle}{\langle n+1 \rangle} < \frac{n}{n+1}$$

quando n é par e positivo. Portanto, a resposta é **SIM**.

8. $\mathbf{100^{100} > 99^{100} + 99^{99}}$ **?**

Solução Temos que

$$100^{100} = 100^{99} \times 100 > 99^{99} \times 100 = 99^{99}(1 + 99) = 99^{99} + 99^{99} \times 99 = 99^{99} + 99^{100}.$$

Logo, a respota é **SIM**.

9. **Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $c = a + b$. Qual o sinal das expressões a seguir ?**
(1) $\mathbf{2a - c}$ **(2)** $\mathbf{2b - c}$ **(3)** $\mathbf{c + 2b}$ **(4)** $\mathbf{c - a + b}$ **(5)** $\mathbf{c + a - b}$.

Solução De $a < b$ segue que $a - b < 0$ e $b - a > 0$. Assim,

(1) $2a - c = 2a - (a + b) = a - b < 0$;

(2) $2b - c = 2b - (a + b) = b - a > 0$;

(3) $c + 2b > 0$ já que as duas parcelas são positivas;

(4) $c - a + b = a + b - a + b = 2b > 0$;

(5) $c + a - b = a + b + a - b = 2a > 0$.

10. **Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a - b + c > 6$ e $a + b - c > 10$. Pergunta-se:**

(1) $a > 0$ **?** **(2)** $b > c$ **?** **(3)** $bc > 0$ **?**

Solução

(1) Somando as duas desigualdades, teremos: $2a > 16 \implies a > 8$. Portanto, a é positivo.

(2) NÃO. Para ver isso, basta tomar $b = c = 0$ e $a = 11$.

(3) NÃO, e como no caso anterior, para justificar a resposta, basta tomar $b = c = 0$ e $a = 11$.

11. **Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Pergunta-se:**

$$\frac{100!}{98!} < 100 \times \frac{50!}{49!} \text{ ?}$$

Solução Usando a definição acima temos que:

$$\frac{100!}{98!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 98 \times 99 \times 100}{1 \times 2 \times \cdots \times 98} = 99 \times 100\,;$$

$$100 \times \frac{50!}{49!} = 100 \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 48 \times 49 \times 50}{1 \times 2 \times \cdots \times 48 \times 49} = 100 \times 50\,.$$

Logo, a resposta é **NÃO**.

12. **Responda as seguintes questões:**

(a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$ **?** **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{4}$ **?** **(c)** $\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$ **?** **(d)** $\sqrt{5} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$ **?**

Solução A estratégia aqui é usar as propriedades das desigualdades afim de simplificá-las até obter uma outra desigualdade, simples de ser verificada.

(a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9} \iff 7 \times 9 < 8 \times 8 \iff 63 < 64.$

Consequentemente, a resposta é **SIM**.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{4} \iff 4 \times \sqrt{2} > 3\sqrt{3} \iff 32 > 27.$

Portanto, a resposta é **SIM**.

(c) $\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} \iff \left(\sqrt{5} - \sqrt{4}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{4}\right) < 1 \iff 5 - 4 < 1\,.$

Portanto, a resposta é **NÃO**.

(d) $\sqrt{5} > \sqrt{2} + \sqrt{3} \iff 25 > 2 + 2\sqrt{6} + 3 \iff 20 > 2\sqrt{6} \iff 10 > \sqrt{6}\,.$

Logo, a resposta é **SIM**.

13. Mostre que $1 - \sqrt{7} < -\dfrac{3}{2}$.

Solução Temos que:

$$1 - \sqrt{7} < -\frac{3}{2} \iff 1 + \frac{3}{2} < \sqrt{7} \iff \frac{5}{2} < \sqrt{7} \iff 5 < 2\sqrt{7} \iff 25 < 28.$$

Assim, fica mostrado que $1 - \sqrt{7} < -\dfrac{3}{2}$.

14. Determine o menor inteiro que é maior do que $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

Solução Temos que $3 < \sqrt{10} < 4$ e $1 < \sqrt{2} < 2$. Assim, somando membro a membro essas desigualdades obtemos: $4 < \sqrt{10} + \sqrt{2} < 6$. Isso mostra que 6 é um inteiro que é maior do que $\sqrt{10} + \sqrt{2}$. Mostra também que o inteiro 4 não tem a propriedade requerida.

Resta saber se 6 é o menor inteiro com essa propriedade. Para isso, precisamos verificar se 5 é maior ou menor do que $\sqrt{10} + \sqrt{2}$. Vejamos:

$$\sqrt{10} + \sqrt{2} < 5 \iff \sqrt{10} < 5 - \sqrt{2} \iff 10 < 25 - 10\sqrt{2} + 2 \iff 10\sqrt{2} < 17$$
$$\iff 200 < 17^2 \iff 200 < 289.$$

Isso mostra que $\sqrt{10} + \sqrt{2} < 5$. Como, $4 < \sqrt{10} + \sqrt{2}$ concluímos que 5 é o inteiro procurado.

15. Sabendo que $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$ e $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ faça estimativas para $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$.

Solução Somando ambas as desigualdade obtemos a seguinte estimativa para $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{array}{rcl} 1{,}2 < & \sqrt[3]{2} & < 1{,}3 \\ 1{,}7 < & \sqrt{3} & < 1{,}8 \\ \hline 2{,}9 < & \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} & < 3{,}1\,. \end{array}$$

Para obter uma estimativa para $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, multiplicamos a estimativa $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$ por -1, obtendo:

$$-1{,}2 > -\sqrt[3]{2} > -1{,}3\ ,\ \text{isto é}\ ,\ -1{,}3 < -\sqrt[3]{2} < -1{,}2\,.$$

Agora, somando as desigualdade, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 1{,}7 < & \sqrt{3} & < 1{,}8 \\ -1{,}3 < & -\sqrt[3]{2} & < -1{,}2 \\ \hline \frac{2}{5} = 0{,}4 < & \sqrt{3} - \sqrt[3]{2} & < 0{,}6 = \frac{3}{5}\,. \end{array}$$

Consequentemente, $\dfrac{2}{5} < \sqrt{3} - \sqrt[3]{2} < \dfrac{3}{5}$.

☛ **Atenção:** Repare que não fizemos uma subtração entre as estimativas de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt[3]{2}$.

16. Use as estimativas dadas no exercício anterior para fazer uma estimativa para $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

Solução Invertendo a estimativa de $\sqrt[3]{2}$ obtemos: $\frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1}{1{,}2}$.
Multiplicando as estimativas a seguir, concluímos:

$$\begin{array}{c} 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \\ \frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1}{1{,}2} \\ \hline \frac{17}{13} = \frac{1{,}7}{1{,}3} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{1{,}8}{1{,}2} = \frac{18}{12}. \end{array}$$

Consequentemente, $\dfrac{17}{13} < \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \dfrac{3}{2}$.

☛ **Atenção:** Repare que não fizemos uma divisão entre as estimativas de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt[3]{2}$.

17. Use as estimativas $3{,}1 < \pi < 3{,}2$; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e determine estimativas para

(a) $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2} - 1}$.

Solução **(a)** Temos que:

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2 \iff \frac{3{,}1}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3{,}2}{2} \tag{6.1}$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \iff -1{,}4 > -\sqrt{2} > -1{,}5 \iff -1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4. \tag{6.2}$$

Somando as estimativas à direita em (6.1) e (6.2) obtemos:

$$\frac{3{,}1}{2} - 1{,}5 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < \frac{3{,}2}{2} - 1{,}4 \iff \frac{3{,}1 - 3}{2} < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < \frac{3{,}2 - 2{,}8}{2}$$
$$\iff 0{,}05 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < 0{,}2$$

determinando assim a estimativa que pretendíamos.

(b) Por outro lado, segue das propriedades de desigualdade que:

$$1{,}4 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 1{,}5 - 1 \iff 0{,}4 < \sqrt{2} - 1 < 0{,}5 \iff \frac{1}{0{,}4} > \frac{1}{\sqrt{2} - 1} > \frac{1}{0{,}5}$$
$$\iff \frac{1}{0{,}5} < \frac{1}{\sqrt{2} - 1} < \frac{1}{0{,}4} \iff 2 < \frac{1}{\sqrt{2} - 1} < \frac{5}{2}. \tag{6.3}$$

Agora, multiplicando as estimativas que aparecem à direita em (6.3) e à esquerda em (6.1) obtemos o seguinte resultado:

$$2 \times 3{,}1 < \frac{\pi}{\sqrt{2} - 1} < \frac{5 \times 3{,}2}{2} \iff 6{,}2 < \frac{\pi}{\sqrt{2} - 1} < 8$$

obtendo assim, a segunda estimativa que pretendíamos.

18. Mostre que $\frac{1}{4} < \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{3}$.

Solução Temos duas desigualdades a considerar:

Caso 1: $\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{3}$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-\sqrt{2}<\tfrac{1}{3} &\iff 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}<1 \iff 3\sqrt{3}<3\sqrt{2}+1 \iff 27<18+6\sqrt{2}+1\\ &\iff 8<6\sqrt{2} \iff 4<3\sqrt{2} \iff 16<18\,.\end{aligned}$$

Assim, afirmar que $\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{3}$ é o mesmo que afirmar $16<18$. Logo, a afirmação $\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{3}$ é verdadeira.

Caso 2: $\sqrt{3}-\sqrt{2}>\frac{1}{4}$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-\sqrt{2}>\tfrac{1}{4} &\iff 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}>1 \iff 4\sqrt{3}>4\sqrt{2}+1 \iff 48>32+8\sqrt{2}+1\\ &\iff 15>8\sqrt{2} \iff 15^2>64\times 2 \iff 225>128\,.\end{aligned}$$

Segue daí que $\sqrt{3}-\sqrt{2}>\frac{1}{4}$ também é verdadeira.

Os dois casos acima nos permitem concluir que $\frac{1}{4}<\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{3}$ como queríamos mostrar.

19. Qual o maior dos números: $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$?

Solução Vamos analisar a afirmação $\sqrt{3}<\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}<\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} &\iff \sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{5-2\sqrt{6}} \iff 3-2\sqrt{6}+2<5-2\sqrt{6}\\ &\iff 5-2\sqrt{6}<5-2\sqrt{6} \iff 5<5\,.\end{aligned}$$

Repare que se tivéssemos começado com o sinal de *maior* também teríamos chegado ao absurdo $5>5$. Isso mostra que, de fato, temos que

$$\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

20. Seja $a\in\mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas ? Justifique sua resposta.

(1) $a>2 \implies a^2>2a$ **(2)** $a<-1 \implies a^2<-a$ **(3)** $a<2 \implies a^2<2a$.

Solução As desigualdades à direita são obtidas multiplicando as desigualdades à esquerda por a.

(1) Como $a>2$ segue que a é positivo. Assim, multiplicando a desigualdade $a>2$ por a obtemos $a^2>2a$, mantendo o sinal de " $>$ ". Concluímos assim que a afirmação em questão é **verdadeira**.

(2) Ao multiplicar a desigualdade $a<-1$ por a (que é negativo) obtemos $a^2>-a$. Isso nos garante que a afirmação do item (2) é **falsa** pois, a^2 não pode ser ao mesmo tempo maior e menor do que $-a$.

(3) Esse caso é semelhante ao anterior pois a pode assumir valores negativos. Um contra-exemplo pode ser construído tomando $a=-1$. Assim, a satisfaz a hipótese ($a<2$) mas não satisfaz a tese ($a^2<2a$) pois $a^2=1$ e $2a=-2$. Logo, a afirmação do item (3) é **falsa**.

21. Sejam $a, b, c \in (0, \infty)$. Sabendo que $a + b < c$ podemos concluir que $a^2 + b^2 < c^2$?

Solução Como $a, b, c > 0$ segue que $(a+b)^2 < c^2$. Logo, $a^2 + 2ab + b^2 < c^2$. Segue daí que:

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab < c^2.$$

Logo, $a^2 + b^2 < c^2$ demonstrando o que pretendíamos.

22. Sabendo que $b \in [1, 5/3)$ faça estimativas para $2 - 5b$.

Solução Temos que:

$$\begin{aligned} b \in [1, 5/3) &\iff 1 \leq b < 5/3 \iff 5 \leq 5b < 25/3 \iff -25/3 < -5b \leq -5 \\ &\iff 2 - 25/3 < 2 - 5b \leq 2 - 5 \iff -19/3 < 2 - 5b \leq -3. \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte estimativa para $2 - 5b$:

$$-19/3 < 2 - 5b \leq -3.$$

23. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$ e $|1 - 3x| \leq 1/2$ faça estimativas para $2x - 3$ e $|2x - 3|$.

Solução Temos que:

$$\begin{aligned} |1 - 3x| \leq 1/2 &\iff -1/2 \leq 1 - 3x \leq 1/2 \iff -3/2 \leq -3x \leq -1/2 \\ &\iff 1/6 \leq x \leq 1/2 \iff 1/3 \leq 2x \leq 1 \\ &\iff -3 + 1/3 \leq 2x - 3 \leq 1 - 3 \iff -8/3 \leq 2x - 3 \leq -2. \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte estimativa para $2x - 3$:

$$-8/3 \leq 2x - 3 \leq -2.$$

E daí concluímos que: $2 \leq |2x - 3| \leq 8/3$.

24. Sabendo que $b \in (-\infty, 2]$ determine o menor intervalo que contém $1 - 2b$.

Solução Sabemos que:

$$b \in (-\infty, 2] \iff b \leq 2 \iff 2b \leq 4 \iff -2b \geq -4 \iff 1 - 2b \geq 1 - 4 = -3.$$

Portanto, o intervalo procurado é $[-3, \infty)$.

25. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ onde $b > 0$. Mostre que se $x \in (a, \infty)$ então $bx \in (ab, \infty)$.

Solução Como $x \in (a, \infty)$ e $b > 0$ temos que:

$$x \in (a, \infty) \iff x > a \iff bx > ba \iff bx \in (ab, \infty).$$

Concluímos assim que $bx \in (ab, \infty)$.

26. **Use a propriedade arquimediana dos números reais para provar o seguinte fato: dados $a\,,b \in \mathbb{R}^+$ existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\,a > b$.**

Solução Sejam dados $a\,,b \in \mathbb{R}^+$ e consideremos o número real b/a. Segue da propriedade arquimediana dos números reais que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > b/a$. Consequentemente, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $n\,a > b$ como pretendíamos demonstrar.

Exercícios

1. Sejam a, b, c, d números reais. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(1) $a < 1$ e $1 < b \implies a < b$;
(2) $a \leq 3$ e $3 < 2b - 1 \implies a < 2b - 1$;
(3) $a \leq 1$ e $3 \leq 2b - 1 \implies a \leq 2b - 3$;
(4) $a \leq 3 + b$ e $3 + b \leq a \implies a - 3 = b$;
(5) $a - 1 \leq b$ e $b + 1 \leq a \implies a = b + 1$.

2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?
(a) Se x não é menor do que y então $x > y$;
(b) Se $x \not< y$ então $x \geq y$;
(c) Se $x \not\leq y$ então $x > y$;
(d) Se $x \neq y$ então $x > y$ ou $x < y$.

3. Sabendo que $x, y \in \mathbb{R}$ diga quais das afirmações a seguir são falsas.
(a) $x + 2y = \pi$ ou $x + 2y < \pi$ ou $x + 2y > \pi$;
(b) $x - y \leq \sqrt{2}$ ou $x - y \geq \sqrt{2}$;
(c) $2x + y \geq \sqrt{2}$ ou $2x + y < \sqrt{2}$;
(d) $x + y \geq \sqrt{2}$ ou $x + y < \sqrt{3}$.

4. Verifique se as desigualdades a seguir são verdadeiras.
(a) $\dfrac{5}{4} < \dfrac{17}{21}$;
(b) $12\sqrt{2} < 5\sqrt{11}$;
(c) $\sqrt{10} - \sqrt{8} > \sqrt{7} - \sqrt{5}$;
(d) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} < \sqrt{3} - 1$.

5. Um CD tem um raio r estimado em *cm* por $5{,}8 < r < 5{,}9$. Pede-se:
   (a) uma estimativa para o perímetro desse disco usando a estimativa $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.
   (b) uma estimativa para a área desse disco usando a estimativa $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.

6. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(1) $a > 1 \implies a \geq 1$
(2) $a < b$ e $b \leq c \implies a < c$
(3) $a < b$ e $b \leq c \implies a \leq c$
(4) $|ab| \geq 1 \implies |ab^2| \geq b$.

7. Sabendo que
$$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5 \quad \text{e} \quad 1{,}6 < \sqrt[4]{8} < 1{,}8$$
faça estimativas para:
(a) $\sqrt[4]{8} + \sqrt{6}$
(b) $2\sqrt[4]{8} - \sqrt{6}$
(c) $\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{6}$
(d) $\sqrt[4]{8} \times \sqrt{6}$
(e) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ e $\frac{1}{\sqrt{6}}$
(f) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$
(g) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \frac{2}{\sqrt{6}}$
(h) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{8}}$.

8. A *velocidade escalar média* v de um objeto é obtida dividindo o espaço que o objeto percorreu pelo tempo gasto em percorrê-lo.
Um ciclista percorre 7 vezes uma pista circular. Conhecendo as estimativas do raio R da pista e do tempo T gasto no percurso das 7 voltas, faça uma estimativa da velocidade escalar média do ciclista.
São dados:
$0,30 < R < 0,31$ (em quilômetros)
$0,25 < T < 0,26$ (em horas)
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$.

9. Mostre que
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

10. Mostre que
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

11. Determine os valores de $n \in \mathbb{Z}^+$ para os quais
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{n} .$$

12. Sabendo que $b \in [-2, 5]$ faça uma estimativa para $2 - 3b$.

13. Sabendo que $b \in [2, 5)$ faça uma estimativa para $b^2 - 2b$.

14. Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $|2 - x| \leq 1$ faça uma estimativa para $x^2 + 1$.

15. Seja $b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $|2-3b| < 1$ faça uma estimativa para $1/b$.

16. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabendo que $|5-2\lambda| < 2$ determine, em cada item, o menor subconjunto da reta que contém:

(a) λ^2;
(b) $1/\lambda^2$;
(c) $|1-\lambda|$;
(d) $1/(1-\lambda)$.

17. Um cubo tem aresta ℓ onde $1{,}14 < \ell < 1{,}15$ é dado em cm.

(a) Faça uma estimativa para o volume V do cubo;

(b) Faça uma estimativa para a área A da superfície do cubo.

18. Uma esfera tem raio r onde $1{,}1 < r < 1{,}2$ é dado em cm.

(a) Faça uma estimativa para o volume V da esfera;

(b) Faça uma estimativa para a área A da esfera.

19. Um cilindro circular reto sólido tem altura h e raio de base r satisfazendo as seguintes condições:

$$2{,}31 < r < 2{,}32 \quad \text{e} \quad 3{,}1 < h < 3{,}2$$

onde r e h são dados em cm.

(a) Faça uma estimativa para o volume V desse sólido;

(b) Faça uma estimativa para a área A da superfície desse sólido.

20. Um cone circular reto sólido tem altura h e raio de base r satisfazendo as seguintes condições:

$$2{,}31 < r < 2{,}32 \quad \text{e} \quad 3{,}1 < h < 3{,}2$$

onde r e h são dados em cm.

Faça uma estimativa para o volume V desse sólido.

21. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $a+2b > 5$ e que $b-a < 2$ mostre que $2a+b > 3$ e que $a > 1/3$.

22. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $c > a+b$. Pergunta-se: qual o sinal de

(1) c?

(2) $c-2a$?

(3) $c^2-b^2-a^2$?

(4) $3a-b-c$?

23. Em cada item, determine os inteiros que satisfazem a inequação dada.

(a) $2n^2 < n+2$;
(b) $n^2+n < 2n^2-n-1$;
(c) $1+n^2 > 2n^2-3n$;
(d) $3n^2-2n-1 > 2n^2+n$.

24. Em cada item, determine o maior inteiro m e o menor inteiro n tais que

(a) $m < \sqrt{2}+2\sqrt{3} < n$;
(b) $m < \sqrt{8}+\sqrt{3} < n$;
(c) $m < \sqrt{11}-\sqrt{2} < n$;
(d) $m < \sqrt{15}-\sqrt{5} < n$.

7

Estudo de expressões

Ao equacionar um problema nos deparamos, com freqüência, com uma expressão matemática. Essa expressão contém informações sobre o problema estudado. Assim, é importante saber analisar uma expressão. Por exemplo, conhecer: seu domínio, onde a expressão é crescente, onde é decrescente, seus valores máximos e mínimos, seu sinal, onde a expressão se anula, seu gráfico, etc. Nessa lição vamos abordar alguns desses tópicos. Outros serão abordados em lições posteriores. Em Cálculo I você verá técnicas mais apropriadas para o estudo dessas questões.

1 Domínio

Comecemos relembrando que uma *fração* é uma expressão do tipo $\frac{a}{b}$ $\big($que significa $a \times b^{-1}\big)$ onde $a\,,b$ são números reais e o denominador $b \neq 0$. Assim, para que a fração a/b esteja *bem definida* é preciso que o *denominador* b *seja não nulo*, já que b^{-1} só existe quando $b \neq 0$.

Bem sabemos, por exemplo, que:

☞ $\dfrac{1}{\pi}$ está bem definido pois $\pi \neq 0$;

☞ $-\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ está bem definido pois $\sqrt{2} \neq 0$;

☞ $\dfrac{14{,}02}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ está bem definido pois $\sqrt{2}-\sqrt{3} \neq 0$.

No entanto, dado um número real x temos que:

☞ $\dfrac{1}{x}$ só estará bem definido quando $x \neq 0$;

☞ $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ só está bem definido para $x \neq -1$;

☞ $\dfrac{x+1}{x-2}$ está bem definido quando, e somente quando, $x \neq 2$;

☞ $\dfrac{x}{x}$ só está bem definido para $x \neq 0$;

☞ $\dfrac{x-\sqrt[3]{5}}{x(x^2-1)}$ só está bem definido para $x \in \mathbb{R} - \{-1\,,\,0\,,\,1\}$.

Quando manipulamos uma expressão a uma variável real é importante saber para quais valores da variável essa expressão está *bem definida*, ou seja, para quais valores da variável a expressão pode ser avaliada. O conjunto dos números reais para os quais uma dada expressão pode ser avaliada é dito *domínio de definição da expressão*, ou simplesmente, *domínio da expressão*.

Nos cinco exemplos que acabamos de apresentar os domínios de definição das expressões são, respectivamente: $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathbb{R} - \{2\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{-1\,,\,0\,,\,1\}$.

Dados uma expressão na variável x , denotada por $E(x)$, e um ponto b do seu domínio, usaremos as notações

$$E(b) \quad \text{ou} \quad E(x)\Big]_{x=b}$$

para representar o valor que a expressão assume no ponto b .

Por exemplo, dados a expressão $E(x) = x + \frac{2}{x}$ e o ponto $b = \sqrt{3}$ escrevemos:

$$E(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{ou} \qquad E(x)\Big]_{x=\sqrt{3}} = x + \frac{2}{x}\Big]_{x=\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

O domínio de definição da expressão acima é $\mathbb{R} - \{0\}$ pois podemos avaliá-la em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$, exceto em $x = 0$.

Nesse texto estaremos interessados em expressões à uma variável real e que assumem valores reais. Assim, seus domínios de definição serão subconjuntos da reta. É o que chamamos de uma *expressão real à variável real.*

No que segue desse texto o termo *expressão* significa *expressão real a uma variável real.*

Exemplos

❄ O domínio da expressão $x^2 - x^3 - 2$ é toda a reta pois essa expressão pode ser avaliada em qualquer número real. Além disso, o valor dessa expressão em $x = -1$ vale:

$$x^2 - x^3 - 2\Big]_{x=-1} = (-1)^2 - (-1)^3 - 2 = 1 - (-1) - 2 = 0\,.$$

❄ O domínio da expressão $\sqrt{x}$ é o intervalo $[\,0\,,\infty)$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \geq 0$;

❄ O domínio da expressão $\sqrt{-x}$ é o intervalo $(-\infty\,,0\,]$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \leq 0$;

❄ O domínio da expressão $1/\sqrt{|x|}$ é o conjunto $(-\infty\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$ pois essa expressão só pode ser avaliada quando $x \neq 0$. Além disso,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}\bigg]_{x=-4} = \frac{1}{\sqrt{|-4|}} = \frac{1}{2}\,.$$

2 Gráfico

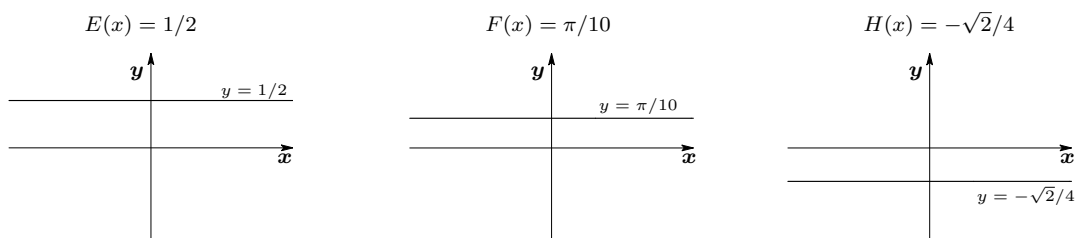
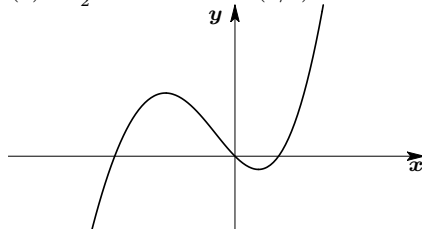
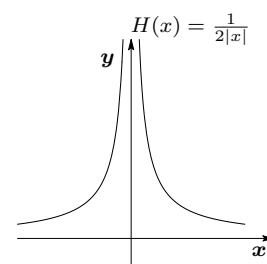
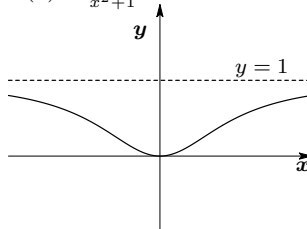
O *gráfico de uma expressão* $E(x)$ é o conjunto

$$\Big\{\big(x\,,E(x)\big) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\;;\;\; x \text{ pertence ao domínio da expressão}\Big\}.$$

Em Cálculo I você verá técnicas apropriadas para esboçar gráfico de expressões não elementares. Aqui veremos gráficos de expressões muito simples.

Nesse instante, as únicas expressões que sabemos esboçar seus gráficos com facilidade, são as expressões constantes, ou seja, aquelas que assumem um mesmo valor, independentemente do valor atribuido à variável. Por exemplo, são constantes as expressões:

$$E(x) = 1/2 \qquad ; \qquad F(x) = \pi/10 \qquad ; \qquad G(x) = -\sqrt{2}/4\,.$$

Evidentemente, o domínio de definição dessas expressões é toda a reta. Seus respectivos gráficos são exibidos nas figuras abaixo: são retas paralelas ao eixo x.

As figuras a seguir exibem gráficos de algumas expressões feitas com um software apropriado.

Note que o domínio das duas primeiras expressões é toda a reta, mas o domínio da terceira expressão é $\mathbb{R} - \{0\}$.

3 Zeros

Outra informação importante sobre expressões é saber em quais pontos do domínio a expressão se anula. Esses pontos são os *zeros* da expressão.

Note que uma expressão, dada na forma de uma fração, só pode se anular num dado ponto quando o ponto em questão faz parte do domínio da expressão e o numerador se anula nesse ponto.

Exemplos

❄ $\dfrac{1+x}{x}$ tem $\mathbb{R} - \{0\}$ como domínio e só se anula em $x = -1$.

❄ $\dfrac{x(1-x)}{x(x+1)}$ tem $\mathbb{R} - \{0, -1\}$ como domínio. O numerador dessa expressão se anula em $x = 0$ e em $x = 1$. No entanto, a expressão dada se anula apenas em $x = 1$, pois em $x = 0$ ela não está bem definida.

❄ A expressão $x/|x|$ nunca se anula em seu domínio de definição que é $\mathbb{R} - \{0\}$.

Exercícios resolvidos

1. **Avalie as expressões a seguir nos pontos 0 ; -1 ; 1 ; 2 ou diga em quais desses pontos elas não podem ser avaliadas.**

(a) $\dfrac{x}{x-2}$ **(b)** $\dfrac{x}{x(x-1)}$ **(c)** $\dfrac{x+1}{x}$.

Solução Passemos a avaliação das expressões.

(a) Avaliação de $\dfrac{x}{x-2}$:

☞ Essa expressão só não pode ser avaliada em $x = 2$ pois o denominador se anula nesse ponto.

☞ Em $x = 0$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x}{x-2}\right]_{x=0} = \dfrac{0}{0-2} = 0\,.$

☞ Em $x = -1$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x}{x-2}\right]_{x=-1} = \dfrac{-1}{-1-2} = \dfrac{1}{3}\,.$

☞ Em $x = 1$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x}{x-2}\right]_{x=1} = \dfrac{1}{1-2} = -1\,.$

(b) Avaliação de $\dfrac{x}{x\,(x-1)}$:

☞ Essa expressão só não pode ser avaliada em $x = 0$ e em $x = 1$ pois o denominador se anula nesses pontos.

☞ Em $x = 2$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x}{x\,(x-1)}\right]_{x=2} = \dfrac{2}{2\,(2-1)} = 1\,.$

☞ Em $x = -1$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x}{x\,(x-1)}\right]_{x=-1} = \dfrac{-1}{(-1)\,(-1-1)} = -\dfrac{1}{2}\,.$

(c) Avaliação de $\dfrac{x+1}{x}$:

☞ A expressão não pode ser avaliada em $x = 0$ pois o denominador se anula nesse ponto.

☞ Em $x = -1$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x+1}{x}\right]_{x=-1} = \dfrac{-1+1}{-1} = 0\,.$

☞ Em $x = 1$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x+1}{x}\right]_{x=1} = \dfrac{1+1}{1} = 2\,.$

☞ Em $x = 2$ a expressão vale: $\left.\dfrac{x+1}{x}\right]_{x=2} = \dfrac{2+1}{2} = 3/2\,.$

2. **Determine o domínio das expressões a seguir. Determine também os pontos onde tais expressões se anulam.**

(a) $\dfrac{2x}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x+2}{x^2+1}$ **(c)** $\dfrac{|x|}{x(x-1)}$ **(d)** $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x}}$.

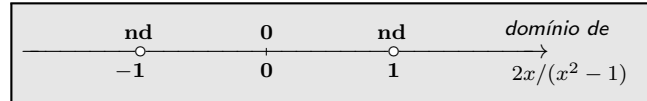
Solução Para isso, precisamos determinar os pontos onde tais expressões podem ser avaliadas e aqueles onde elas valem zero.

(a) Essa expressão só não pode ser avaliada quando $x^2 = 1$, isto é, quando $x = \pm 1$. Assim seu domínio de definição é $\mathbb{R} - \{1\,,\,-1\} = (-\infty\,,-1) \cup (-1\,,1) \cup (1\,,\infty)\,.$

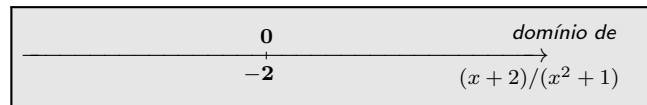
Por outro lado, o numerador dessa expressão só se anula quando $2x = 0$, isto é, quando $x = 0$. Logo, a expressão só se anula em $x = 0$ já que 0 está no domínio da expressão.

Na figura abaixo mostramos a representação gráfica do domínio e dos pontos onde a expressão se anula.

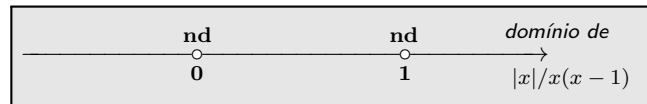
☛ **Nota:** Com frequência vamos usar a abreviação **nd** para significar *não definido*. Também colocaremos um "**0**" nos pontos onde a expressão se anula.

nd (−1), 0 (0), nd (1) — *domínio de* $2x/(x^2 - 1)$

(b) O numerador e o denominador dessa expressão estão bem definidos para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o denominador da expressão nunca se anula pois $x^2 + 1 \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim o domínio de definição da expressão é toda a reta real.

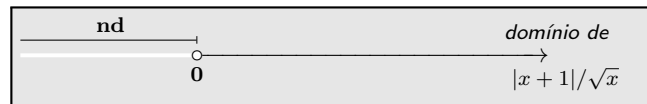
O numerador se anula quando $x+2 = 0$, isto é, quando $x = -2$. Logo, a expressão se anula apenas para $x = -2$.

0 (−2) — *domínio de* $(x+2)/(x^2+1)$

(c) A expressão só não está bem definida em $x = 0$ e em $x = 1$. Assim o domínio de definição dessa expressão é $\mathbb{R} - \{0\,,\,1\} = (-\infty\,,0) \cup (0\,,1) \cup (1\,,\infty)$.

O numerador só se anula quando $x = 0$. No entanto, nesse ponto a fração não está bem definida. Conseqüentemente, essa expressão *nunca se anula em seu domínio de definição*.

nd (0), nd (1) — *domínio de* $|x|/x(x-1)$

(d) A expressão só está bem definida quando $x > 0$. Seu domínio de definição é o intervalo $(0\,,\infty)$.

Por sua vez, o numerador só se anula quando $x = -1$. No entanto, nesse ponto a fração não está bem definida. Logo, essa expressão *nunca se anula em seu domínio de definição*.

nd (até 0) — *domínio de* $|x+1|/\sqrt{x}$

3. **Fatore as expressões a seguir e determine onde cada uma delas se anula.**
(a) $\mathbf{3x - x^2}$ **(b)** $\mathbf{2x - x^3}$ **(c)** $\mathbf{x^4 - 9}$.

Solução Note que as expressões estão bem definidas em toda a reta. Temos que:

(a) $3x - x^2 = x(3-x)$.

Portanto: $3x - x^2 = 0 \iff x(3-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$.

Resulta então que a expressão se anula apenas nos pontos do conjunto $\mathcal{S} = \{3\,,0\}$.

(b) $2x - x^3 = x(2 - x^2)$.

Assim:

$2x - x^3 = 0 \iff x(2-x^2) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 = 2 \iff x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$.

Logo, o conjunto dos pontos onde a expressão se anula é $\mathcal{S} = \{0\,,\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,\}$.

(c) $x^4 - 9 = (x^2-3)(x^2+3) = \big(x - \sqrt{3}\big)\big(x + \sqrt{3}\big)(x^2+3)$.

Conseqüentemente: $x^4 - 9 = 0 \iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$, já que $x^2 + 3$ nunca se anula.
Segue então que a expressão só se anula em $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

4. **Simplifique as expressões a seguir e explicite para quais valores de x as igualdades obtidas são verdadeiras.**

(a) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x-x^3}{x^2+x}$ **(c)** $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1}$ quando $x \neq \pm 1$.

(b) $\dfrac{x-x^3}{x^2+x} = \dfrac{x(1-x^2)}{x(x+1)} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{x+1} = 1 - x$ desde que $x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

(c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$ quando $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

(d) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ se $x \geq 0$ e $x \neq 2$.

5. **Reduza a um denominador comum as seguintes expressões:**

(a) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ **(b)** $\dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{3+x}$

onde A e B são números reais.

Solução Para iniciar os cálculos devemos fazer as restrições necessárias aos denominadores.

(a) Para $x \neq 0$ e $x \neq 1$ as frações a seguir estão bem definidas e temos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{x(x-1)} + \frac{Bx}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}.$$

(b) Para $x \neq 5$ e $x \neq -3$ as frações a seguir estão bem definidas e temos:

$$\frac{A}{x-5} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x)}{(x-5)(3+x)} + \frac{B(x-5)}{(3+x)(x-5)} = \frac{(A+B)x + 3A - 5B}{(3+x)(x-5)}.$$

6. **Determine o domínio de definição da expresão $E(x) = \dfrac{1 - \dfrac{x}{1-2x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.**

Solução A expressão $E(x)$ não está bem definida nas seguintes situações:

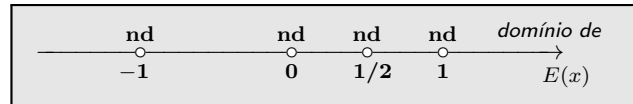
☞ Quando $1-2x=0$;
pois nesse caso $\dfrac{x}{1-2x}$ não está bem definido.
Resolvendo $1-2x=0$ obtemos $x=1/2$.

☞ Quando $x=0$;
pois nesse caso $1/x^2$ não está bem definido;

☞ Quando $1-\dfrac{1}{x^2}=0$;
pois nesse caso o denominador da expressão inicial se anula.
Resolvendo a equação $1-\dfrac{1}{x^2}=0$ obtemos $x^2=1$, isto é, $x=\pm 1$.

Finalizando, concluímos que o domínio de definição da expressão $E(x)$ é o conjunto

$$\mathbb{R}-\left\{-1\,,0\,,\frac{1}{2}\,,1\right\}$$

exibido no diagrama ao lado.

7. **Seja $a*b:=\dfrac{a+b}{b-2a}$. Qual o domínio da expressão $E(x)=\dfrac{1}{2*x}$?**

Solução Para isso, precisamos responder as duas seguintes perguntas.

(i) Para quais valores de x a expressão $2*x$ está bem definida?
Temos que

$$2*x=\frac{2+x}{x-2\times 2}=\frac{2+x}{x-4}\,. \tag{7.1}$$

Assim, $2*x$ só não está bem definido quando $x=4$.

(ii) Para quais valores de x a expressão $2*x$ se anula?
De (7.1) temos que $2*x$ só se anula para $x=-2$.

Concluímos então que o domínio de definição da expressão $E(x)$ é $\mathbb{R}-\{4\,,-2\}$.

8. **Determine o domínio das expressões a seguir e simplifique-as de tal forma a obter um denominador sem radicais:**

(a) $\dfrac{1}{2+x\sqrt{x}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}$.

Solução Vamos começar determinando o domínio de definição das expressões em questão.

(a) Nesse caso devemos ter $x\geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definida. Nessas condições, $2+x\sqrt{x}$ não se anula e, conseqüentemente, o domínio da expressão do item (a) é o intervalo $[\,0\,,\infty)$. Agora, buscando

uma simplificação para a expressão $\dfrac{1}{2+x\sqrt{x}}$ vamos multiplicar o numerador e o denominador por $2-x\sqrt{x}$. Para isso precisamos excluir os pontos do intervalo $[0,\infty)$ onde $2-x\sqrt{x}$ se anula.
Para $x \geq 0$ temos:

$$2-x\sqrt{x}=0 \iff 2=x\sqrt{x} \iff 4=x^3 \iff x=\sqrt[3]{4}\,.$$

Portanto, para $x \geq 0$ e $x \neq \sqrt[3]{4}$ podemos efetuar as operações a seguir, obtendo a simplificação:

$$\frac{1}{2+x\sqrt{x}} = \frac{2-x\sqrt{x}}{(2+x\sqrt{x})(2-x\sqrt{x})} = \frac{2-x\sqrt{x}}{4-x^3}\,.$$

(b) Aqui devemos ter:

- $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definida.
  Nesse caso, $\sqrt{1+\sqrt{x}}$ está bem definido e é maior ou igual a 1.
- Além disso, precisamos restringir o valor de x para que $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ seja não nulo já que esse fator está no denominador da fração do item (b).
  Para $x \geq 0$ temos que:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=0 \iff \sqrt{1+\sqrt{x}}=1 \iff 1+\sqrt{x}=1 \iff x=0\,.$$

Dessa análise, concluímos que o domínio da expressão é o intervalo $(0,\infty)$.
Agora, para $x > 0$ temos a simplificação:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+x\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{x}\,.$$

9. **Simplifique as expressões, eliminando os radicais do denominador:**

(a) $\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **onde** $a \geq 0$ **(b)** $\dfrac{x-a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ **onde** $a \in \mathbb{R}$.

Solução Comecemos com a análise do domínio das expressões.

(a) Aqui devemos ter $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esteja bem definido. Além disso, devemos ter $x \neq a$ para que o denominador não se anule. Assim, o domínio da expressão é o conjunto $\{x \in [0,\infty)\ ;\ x \neq a\}$.

Observe que $\sqrt{x}+\sqrt{a} > 0$ no conjunto $\{x \in [0,\infty)\ ;\ x \neq a\}$ pois, ou $x > 0$ ou $a > 0$. Assim, para $a \neq x \in [0,\infty)$ a expressão em questão tem a forma:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} = \sqrt{x}+\sqrt{a}\,.$$

(b) Aqui a expressão a ser estudada está bem definida para todo $x \neq a$. Para simplificá-la, consideremos o seguinte produto notável:

$$x - a = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}).$$

Daí, para $x \neq a$, segue que:

$$\frac{x-a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}.$$

10. Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}}$ **e simplifique-a**.

Solução Vamos determinar quando a expressão não pode ser avaliada.

- Quando $x = 0$ pois nesse caso $\dfrac{1}{x}$ não faz sentido ;
- Quando $x - \dfrac{1}{x} = 0$ pois nesse caso $\dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}$ não faz sentido ;

  Resolvendo a equação acima, para $x \neq 0$, obtemos:

  $x - \dfrac{1}{x} = 0 \iff x = \dfrac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.
- Quando $x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} = 0$ pois nesse caso $\dfrac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}}$ não faz sentido ;

  Resolvendo a equação acima, para $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$ obtemos:

  $x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} = 0 \iff x = \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}} \iff x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$.

Assim, o domínio da expressão inicial é o conjunto $\mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Simplificando a expressão para $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ obtemos:

$$\frac{1}{x - \dfrac{3}{x - \dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{x - \dfrac{3x}{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x - 3x} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 4)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x\,(x-2)(x+2)}.$$

Exercícios

1. Determine o domínio das expressões:

   (a) $x^3 - 2x + 1$ (b) $\dfrac{2x}{\pi - 3{,}14}$;

   (c) $\dfrac{x}{1-|x|}$ (d) $\dfrac{x}{1+x^2}$;

   (e) $\dfrac{1}{1-2x}$ (f) $\dfrac{3x}{2-x^2}$.

2. Defina $a * b := \dfrac{a\,b}{a+b}$. Qual o domínio da expressão $E(x) = \dfrac{1 - x * x}{2 * x}$?

3. Coloque em evidência, na expressão dada, o fator indicado. Determine os valores de x para os quais a identidade obtida é verdadeira.

   (1) Expressão: $x^2 - x$
   Fator: x^2
   (2) Expressão: $x^2 - x$
   Fator: $x - 1$
   (3) Expressão: $2x^5 - x^3 + x + 2$
   Fator: x^5
   (4) Expressão: $x - 2x^3 + x^5 - x^7$
   Fator: $-x^4$
   (5) Expressão: $2x^6 - x^3 + x^2 + 2$
   Fator: $-x^6$
   (6) Expressão: $1/x + 2/x^2$
   Fator: $1/x^2$
   (7) Expressão: $1/x^4 - 1/x^2 + 3/x - 2$
   Fator: $1/x^3$.

4. Uma forma de mostrar que a expressão x^2+x+1 é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$ é a seguinte:

   (i) Para $x \geq 0$ temos que
   $$x^2 + x + 1 \geq 1 > 0\,;$$
   (ii) Para $x \in (-\infty\,, -1]$ temos que
   $$\underbrace{x\,(x+1)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0\,;$$
   (iii) Para $x \in (-1\,, 0)$ temos que
   $$x^2 + \underbrace{(x+1)}_{>0} > 0\,.$$

   De (i), (ii) e (iii) concluímos que $x^2 + x + 1$ é positivo para todo x real.

   Use os artifícios acima para mostrar que
   $$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0\ , \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

5. Use o exercício anterior para mostrar que a equação $x^5 = 1$ tem, de fato, uma única solução real, a saber, a solução $x = 1$. Faça isso, fatorando $x^5 - 1$ como fizemos no exercício 5 da página 83.

6. Seja $b \in \mathbb{R}$. Use o exercício anterior para mostrar que a equação $x^5 = b$ tem, de fato, uma única solução, a saber, a solução $x = \sqrt[5]{b}$.

7. Dê o domínio das expressões a seguir. Identifique quais delas são produtos notáveis e fatore-as.
   (a) $2/x^2 - 9$
   (b) $1/x^3 - 3/x^2 + 3/x - 1$
   (c) $1 - 3/x^2 + 3/x^4 - 1/x^6$
   (d) $4/x^4 - 1/\sqrt{x}$.

8. Sejam A e B números reais quaisquer. Reduza a um denominador comum as expressões a seguir e simplifique-as, explicitando o domínio de validade das igualdades obtidas.

   (a) $\dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{x+1}$ (b) $\dfrac{A}{2x-5} - \dfrac{B}{2+3x}$

   (c) $\dfrac{x}{4-x^2} - \dfrac{B}{x-2}$ (d) $\dfrac{Ax}{2x-x^2} + \dfrac{B}{3x}$

   (e) $\dfrac{Ax+1}{x^3-x} + \dfrac{x-B}{3x}$ (f) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2} + \dfrac{B}{x}$

9. Determine o domínio de definição da expressão abaixo e simplifique-a:
   $$\frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}\,.$$

10. Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{1}{x + \dfrac{3}{x - \dfrac{2}{x}}}$ e simplifique-a.

11. Determine o domínio de definição da expressão abaixo e simplifique-a:

$$\frac{1}{x - \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}} - \frac{1}{x + \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}}$$

12. Determine o domínio de definição das expressões a seguir, simplifique-as e determine os pontos onde elas se anulam.

(a) $\dfrac{2}{x} + 3$ (b) $\dfrac{2x - x^2}{1 + x^4}$

(c) $\dfrac{x-1}{x - x^2}$ (d) $\dfrac{2}{x^2 - 4x}$

(e) $\dfrac{x}{1 - \sqrt{2x}}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$.

8

Números racionais e números irracionais

Nessa lição vamos voltar a alguns conceitos já vistos com o objetivo de colocá-los num contexto um pouco mais elaborado. Para isso vamos precisar de dois belos teoremas: o *Teorema de Pitágoras* e o *Teorema de Decomposição em Fatores Primos* .

1 Números racionais

Como já dissemos, *números racionais* são frações de números inteiros, isto é, são os números reais da forma

$$\frac{m}{n} \quad \text{onde} \quad m\,,n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \neq 0\,.$$

Eles também são ditos *números fracionários*.

Na Lição 3 vimos: igualdade, simplificação e operações com frações. Consequentemente, sabemos reconhecer quando dois números fracionários são iguais, sabemos simplificá-los e operar com eles.

Por exemplo, usando as regras de operações com frações, apresentadas na página 73 podemos concluir os seguintes resultados:

☞ **racional + racional = racional** e **racional - racional = racional** ;

Isso segue das regras de adição e subtração de frações. Vejamos: consideremos as frações de números inteiros m/n e p/q onde $n\,,q$ são não nulos. Vimos na página 73 que,

$$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq}$$

o que mostra que o resultado das operações acima continua sendo um número racional.

☞ **racional** $\times$ **racional = racional** e **racional** $\div$ **racional não nulo = racional** ;

Novamente, isso segue das regras da página 73. Vejamos: consideremos as frações de números inteiros m/n e p/q onde $n\,,q$ são não nulos. Vimos que,

$$\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m\,p}{n\,q}$$

o que mostra que o resultado da operação acima continua sendo um número racional.

No caso da divisão, além de precisarmos que $n\,,q$ sejam não nulos, também precisamos que $p \neq 0$ para que possamos efetuar a divisão da fração m/n pela fração p/q. E como já vimos, temos:

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m\,q}{n\,p}$$

mostrando assim que o resultado da operação continua sendo um número racional.

☞ **O inverso de um racional não nulo é um racional não nulo** ;

A prova dessa regra é similar a da divisão. De fato, ela é um caso particular da regra acima.

2 Decomposição em fatores primos

Dissemos que uma fração de inteiros é *irredutível* quando o numerador e o denominador não têm fatores primos em comum, isto é, são *primos entre si*. Por exemplo:

$$\frac{2}{7}\ ;\ \frac{23}{15}\ ;\ \frac{21}{100}\quad \text{são frações irredutíveis, mas}\quad \frac{2}{6}\ ;\ \frac{10}{15}\ ;\ \frac{9}{3}\quad \text{não o são.}$$

Toda fração não nula de inteiros tem sua forma irredutível. Já falamos sobre isso na página 25. Para encontrá-la, basta cancelar os fatores primos comuns ao numerador e ao denominador. Para isso, usamos a regra de simplificação de frações vista na Lição 7 e o *Teorema de Decomposição em Fatores Primos* que nos garante o seguinte resultado.

Teorema (da Decomposição em Fatores Primos). *Todo número inteiro* $N > 1$ *pode ser escrito na forma* $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_s^{\alpha_s}$ *onde* $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ *são números primos e* $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots,\alpha_s$ *são inteiros positivos.*

Além disso, essa decomposição é única, isto é:

se $N = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \cdots \times q_r^{\beta_r}$ *onde* $1 < q_1 < q_2 < \cdots < q_r$ *são números primos e* $\beta_1\,,\beta_2\,,\ldots,\beta_r$ *são inteiros positivos então* $r = s$, $q_i = p_i$ *e* $\beta_i = \alpha_i$ *para todo* $i \in \{1\,,2\,,\ldots,s\}$.

Além disso, esse teorema nos garante que a forma irredutível de uma fração não nula de inteiros é única, isto é, se $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$ são frações irredutíveis com $p\,,q\,,m\,,n$ inteiros positivos e $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$ então $p=m$ e $q=n$. A forma irredutível de uma fração pode nos dar informações preciosas sobre o problema em questão, como veremos em várias oportunidades.

Mais adiante vamos usar esse teorema para mostrar que $\sqrt{5}$ não é um número racional. Mas antes, veremos como localizar os números racionais na reta.

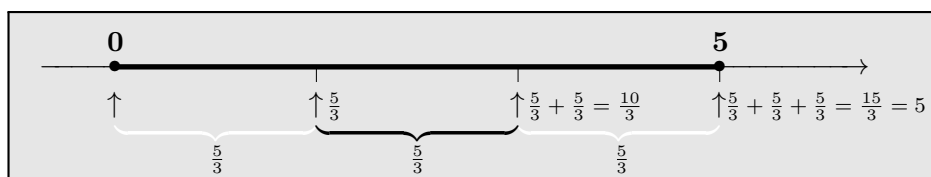
3 Representando os racionais na reta

Vimos na seção 3 da Lição 2 que, fixados uma orientação na reta, uma origem e uma unidade de comprimento, sabemos localizar nessa reta os números inteiros, positivos e negativos. Passemos agora a seguinte pergunta:

Como representar um número racional na reta?

Mais precisamente, de posse dos ingredientes acima citados, pergunta-se:

Onde se localiza, na reta, o número racional $\dfrac{5}{3}$?

Nossa intuição, provavelmente, dirá: divida o segmento de reta de 0 a 5 em 3 partes iguais. A primeira marcação dessa divisão indica a localização na reta da fração $\frac{5}{3}$ (ou 5 dividido por 3). A marcação seguinte indicará a localização de $\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$.

Dito isso, a questão crucial se resume a:

Como dividir um segmento de reta em partes iguais?

Mais precisamente,

Como dividir o segmento de 0 *a* 5 *em* 3 *partes iguais?*

A resposta a esta pergunta vem da geometria. Ela é conseqüência do *Teorema de Thales*.

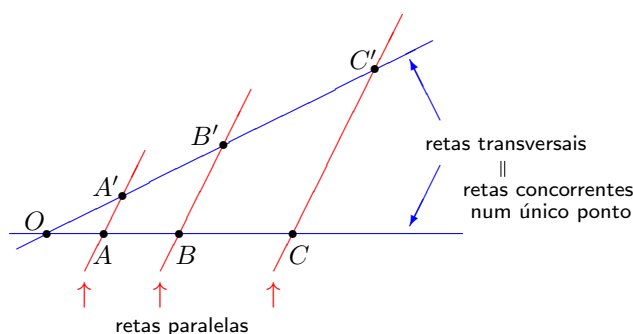
3.1 O Teorema de Thales

Teorema (de Thales). *Retas paralelas cortando transversais determinam segmentos proporcionais.*

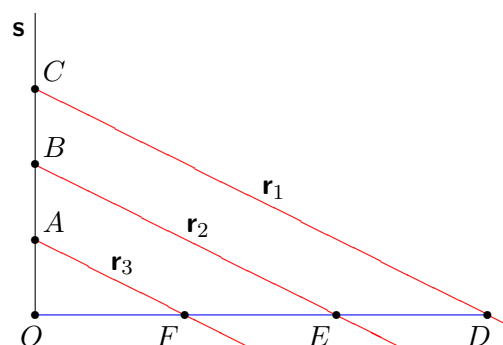
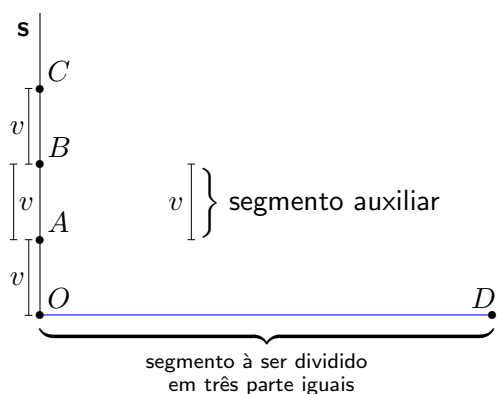
Para bem entender o enunciado veja a representação gráfica mostrada na figura a seguir.

Teorema de Thales:

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

onde $|XY|$ denota a medida do segmento de reta de X à Y.

3.2 Aplicando o Teorema de Thales

Vamos agora dividir um segmento OD em três partes iguais. Para isso,

- Escolhemos um segmento auxiliar v ;
- Fixamos uma reta **s** passando por O, por exemplo, aquela perpendicular ao segmento OD ;
- Sobre a reta **s** , usando o segmento auxiliar v, marcamos três pontos $A\,, B$ e C como mostrados na figura a seguir.

A reta contendo o segmento OD e a reta s são as retas transversais. Agora, tracemos as paralelas. Para isso, seja $\mathbf{r}_1$ a reta passando pelos pontos C e D:

- tracemos a reta $\mathbf{r}_2$ que passa por B e é *paralela* a reta $\mathbf{r}_1$ e seja E a interseção dessa reta com o segmento OD;

- tracemos a reta $\mathbf{r}_3$ que passa por A e é *paralela* a reta $\mathbf{r}_1$ e seja F a interseção dessa reta com o segmento OD.

O *magistral* Teorema de Thales nos garante que:

$$\frac{|OA|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|}.$$

Como $|OA| = |AB| = |BC|$ por construção, resulta que $|OF| = |FE| = |ED|$ e portanto, dividimos o segmento OD em 3 partes iguais como pretendíamos.

Assim, fixados uma reta orientada, uma origem e uma unidade de comprimento, somos capazes, com a técnica descrita acima, de localizar na reta qualquer número racional na forma p/q onde p e q são inteiros positivos: basta dividir o segmento de reta que vai de 0 a p em q partes iguais. A primeira marcação dessa divisão localiza o racional em questão. Se o racional é negativo, podemos colocá-lo na forma $-p/q$ onde p e q são positivos. Nesse caso, dividimos o segmento de reta que vai de 0 a $-p$ em q partes iguais: a primeira marcação dessa divisão localiza o racional em questão.

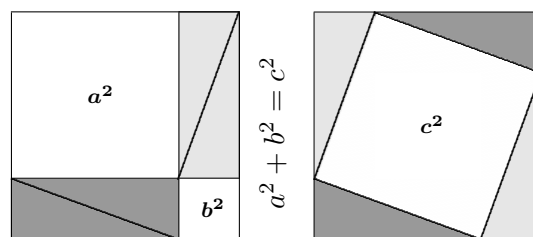
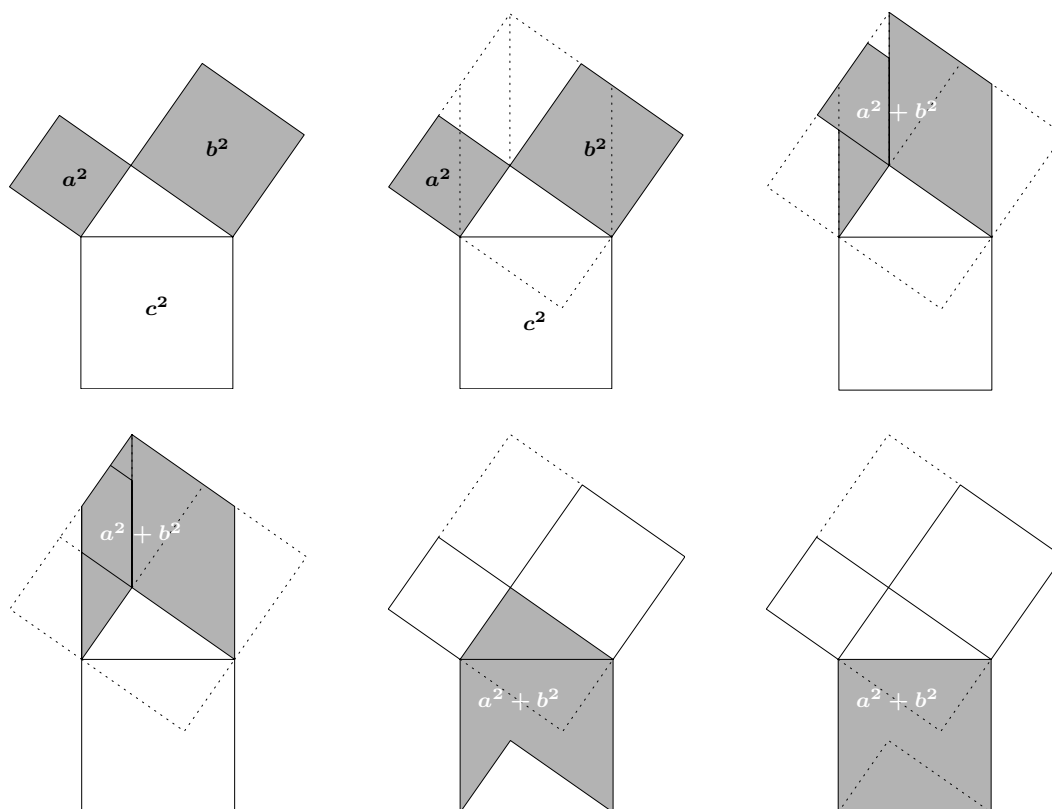
Para bem finalizar esta seção deveríamos explicar como fazemos, com régua e compasso, para traçar uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto dado. Mas isso você encontra no Apêndice A.

4 O Teorema de Pitágoras

Provavelmente, nenhum teorema passa por tantas mentes quanto o *Teorema de Pitágoras*.

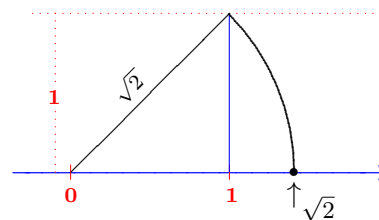
> **Teorema (de Pitágoras).** *Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

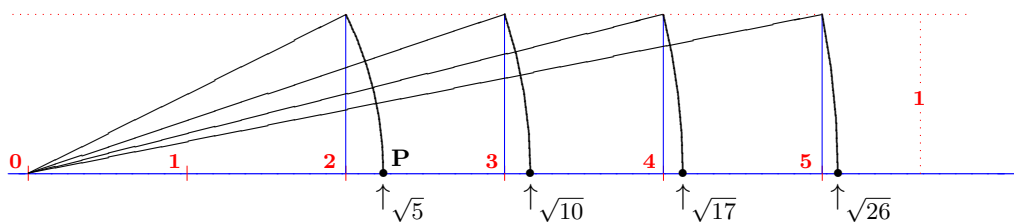
Nas duas figuras abaixo apresentamos uma *Demonstração sem Palavras* para essa maravilha.

De fato, essas figuras não constituem uma demonstração. Elas nos ajudam a *ver*, a *sentir* que o Teorema de Pitágoras *deve ser verdadeiro*. Muitas vêzes elas vão mais além; elas nos *mostram*, nos *indicam* o que devemos fazer para realmente produzir uma demonstração para esse teorema.

As seis figuras a seguir exibem uma outra *Demonstração sem Palavras* do Teorema de Pitágoras, desta feita atribuída a Euclides.

Pitágoras nasceu por volta do ano 572 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu e foi uma das figuras mais influentes e misteriosas da matemática do século VI a.C. É provavel que tenha conhecido Thales de Miletus que também viveu nessa mesma época, embora Pitágoras fosse bem mais jovem que Thales. Thales viveu no século VI a.C. e é considerado um dos *sete sábios* da antiguidade. Conta a história que a geometria demonstrativa começou com Thales de Miletus. Você pode aprender muito mais sobre Thales e Pitágoras em [4].

5 Números irracionais

Um dos primeiros números *não racionais* que conhecemos na Educação Básica é o número $\sqrt{2}$. Conta a História da Matemática que, provavelmente, $\sqrt{2}$ foi o primeiro número a ser precisamente reconhecido como um número irracional.

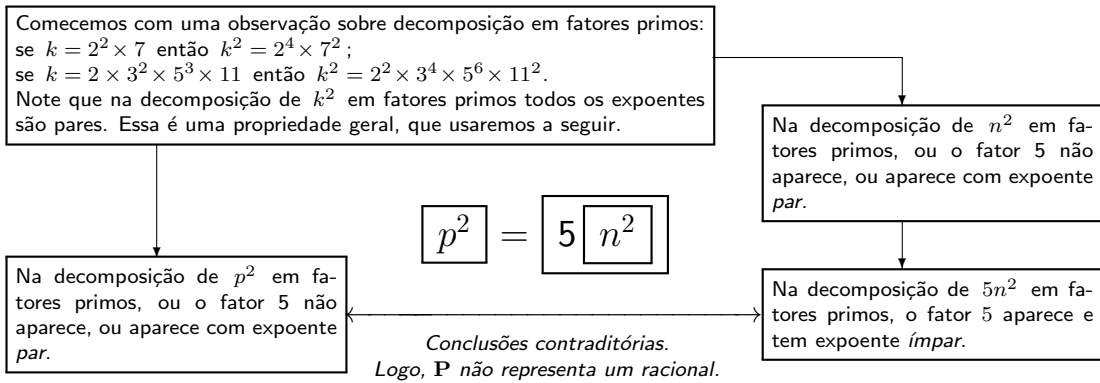
Do Teorema de Pitágoras sabemos que a hipotenusa de um triângulo retângulo mede exatamente $\sqrt{2}$ quando os catetos medem 1. Essa realização geométrica de $\sqrt{2}$ nos permite localizá-lo na reta orientada como mostrado na figura ao lado. O arco na figura é um arco de círculo centrado em 0 e tendo como raio a hipotenusa do triângulo retângulo.

Lembre-se da magia a qual nos referimos na página 27 : fixada na reta a orientação, a origem e a unidade de comprimento o número irracional $\sqrt{2}$ tem uma localização precisa e uma forma de realizá-la é a representação descrita na figura acima.

Na figura a seguir, representamos na reta mais alguns *números irracionais*. Eles são os comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos com um cateto unitário e o outro cateto medindo, respectivamente, 2 , 3 , 4 e 5 .

Os arcos na figura acima são arcos de círculos centrados em 0.

Mas porque esses números não são racionais ?

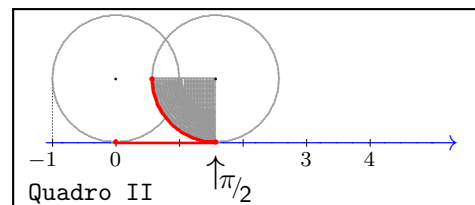
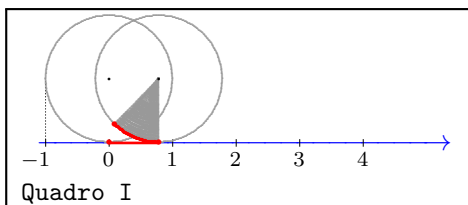
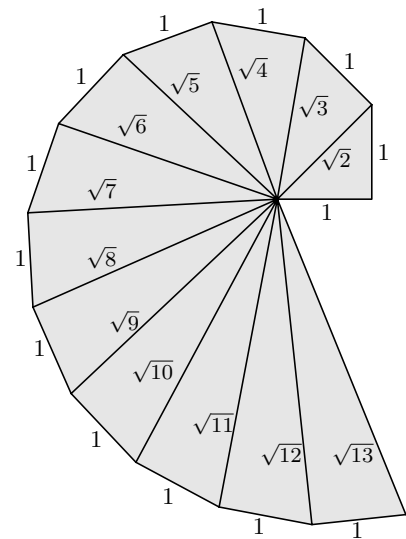
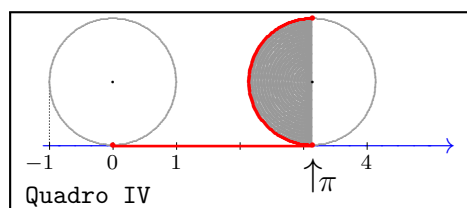
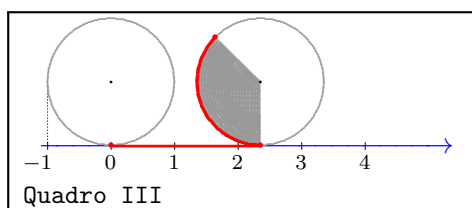
5.1 $\sqrt{5}$ não é racional

A resposta à essa pergunta é dada no diagrama a seguir, o qual explica porque $\sqrt{5}$ não pode ser racional. Nos argumentos, usamos dois belos teoremas: o *Teorema de Pitágoras* e o *Teorema de Decomposição em Fatores Primos*.

Na figura anterior o ponto $\mathbf{P}$ *não representa um número racional*. E por que não ? Vejamos: se $\mathbf{P}$ representasse o racional positivo p/n então, pelo Teorema de Pitágoras, teríamos que $(p/n)^2 = 2^2 + 1^2$, ou seja, $p^2/n^2 = 5$. Consequentemente, $p^2 = 5n^2$. No entanto, essa igualdade expressa um absurdo. Para ver isso, siga as setas do próximo diagrama.

Essa mesma prova pode ser repetida para mostrar que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ também são números irracionais. Aliás, em 2000, Tom Apostol apresentou mais uma linda prova geométrica para a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Você pode encontrá-la na referência [2]. Vale a pena degustá-la !!

Na figura ao lado os triângulos são retângulos, cada um deles têm um cateto unitário e as hipotenusas valem $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots, \sqrt{13}$ respectivamente.

Outro *número irracional* importante, uma verdadeira *estrela* no mundo da Matemática, é o semi-perímetro de uma circunferência de raio 1: o número π. Aliás, como já dissemos a não racionalidade de π só foi demonstrada em 1761, pelo matemático francês J.H. Lambert. Você pode ler muita coisa interessante sobre a História da Matemática em [4].

Na figura a seguir mostramos uma circunferência de raio 1. Como bem sabemos, a metade do seu perímetro vale π. Imagine que essa circunferência começa a girar (sem deslizar) sobre a reta. Após dar um meio giro ela terá se deslocado de um comprimento exatamente igual ao seu semi-perímetro, isto é, igual a π.

Nas figuras acima, o comprimento de cada arco mais escuro é igual ao comprimento do segmento de reta que vai de *zero* até a extremidade inferior desse arco. É como se estivéssemos medindo segmentos de reta com o círculo. Como dissemos na página 27: parece *magia* que ao fixar uma orientação, uma origem e uma unidade de comprimento, também fixamos a localização do número π na reta !!!

6 Regras para identificar irracionais

As regras a seguir nos permitem construir vários outros irracionais a partir de irracionais já conhecidos.

☞ **racional + irracional = irracional** e **racional - irracional = irracional** ;

Exemplos: $1+\sqrt{5}$; $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$; $6-\pi$ são números irracionais .

☞ **racional não nulo × irracional = irracional** ;

Exemplos: $3\sqrt{5}$; $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$; -5π são números irracionais .

☞ **O inverso de um irracional é um irracional** ;

Exemplos: $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\pi}$ são números irracionais .

☞ **A raiz n-ésima de um irracional positivo é um irracional positivo** ;

Exemplos: $\sqrt{\pi}$; $\sqrt[3]{\pi}$; $\sqrt[4]{\sqrt{2}}$; $\sqrt[7]{\pi}$; $\sqrt[8]{\sqrt{10}}$ são números irracionais .

☞ $\boldsymbol{\sqrt{1+n^2}}$ **é irracional quando $n \in \mathbb{Z}^*$** ;

Exemplos: $\sqrt{1+4^2}=\sqrt{17}$; $\sqrt{1+10^2}=\sqrt{101}$; $\sqrt{1+9^2}=\sqrt{82}$ são números irracionais .

☞ $\boldsymbol{\sqrt{n}}$ **é irracional quando $n \in \mathbb{Z}^+$ não é um quadrado perfeito** ;

Exemplos: $\sqrt{17}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{101}$ são números irracionais, pois 17 , 21 e 101 não são quadrados perfeitos.

Salvo as duas últimas regras, todas as outras são de demonstração elementar. Os próximos dois exemplos dão uma clara indicação desse fato.

Exemplo

❄ Sabendo que π é um número irracional, mostre que 2π também é um número irracional.

Solução Bem, poderíamos usar a regra que citamos antes e responder: 2π é irracional pois é o produto de um racional não nulo (no caso, o número 2) por um irracional (no caso, o número π).

No entanto, vamos dar uma explicação que, de fato, serve como demonstração desta regra. Faremos uma *demonstração por redução ao absurdo*.

☞ Suponhamos que 2π é racional.
☞ Segue daí que: $2\pi = \frac{m}{n}$ onde m, n são inteiros positivos;
☞ Logo: $\pi = \frac{m}{2n}$
☞ Conseqüentemente: π é um número racional.
☞ O que é absurdo, pois sabemos, graças ao matemático Lambert, que π é irracional.
☞ Portanto: 2π é de fato um número irracional.

❄ Com o mesmo tipo de argumento podemos mostrar que o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Vejamos:

Seja b um número irracional e seja p/q um número racional qualquer onde p, q são inteiros não nulos.

☞ Suponhamos que $\frac{p}{q} \times b$ é racional.
☞ Segue daí que: $\frac{p}{q} \times b = \frac{m}{n}$ onde m, n são inteiros não nulos;
☞ Logo: $b = \frac{q \times m}{p \times n}$
☞ Conseqüentemente: b é um número racional.
☞ O que é absurdo, pois b por hipótese é irracional.
☞ Portanto: $\frac{p}{q} \times b$ é de fato um número irracional.

❄ De forma similar podemos mostrar que a raíz n-ésima de um número irracional positivo é um número irracional. Vejamos:

Seja b um número irracional positivo e seja $n \in \mathbb{Z}^+$.

☞ Suponhamos que $\sqrt[n]{b}$ é racional.
☞ Segue daí que: $\sqrt[n]{b} = \frac{p}{q}$ onde p, q são inteiros positivos;
☞ Logo: $b = \frac{p^n}{q^n}$
☞ Conseqüentemente: b é um número racional.
☞ O que é absurdo, pois b por hipótese é irracional.
☞ Portanto: $\sqrt[n]{b}$ é de fato um número irracional.

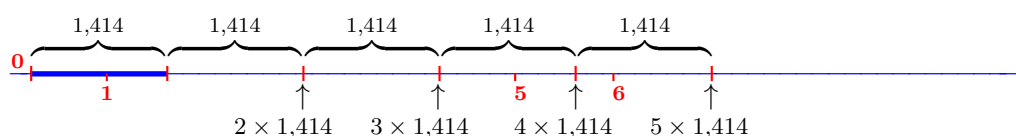
❄ O comportamento dos números irracionais diante das operações elementares de adição, subtração, produto e quociente é bastante diferente daquele que vimos para os racionais.

Por exemplo, a soma de dois números irracionais, mesmo sendo ambos positivos, pode não ser um irracional. É o caso por exemplo dos números $\sqrt{5}$ e $5-\sqrt{5}$. Ambos são irracionais positivos mas, $\sqrt{5}+(5-\sqrt{5})=5$ que não é um número irracional.

O mesmo ocorre com o produto, isto é: o produto de dois números irracionais pode não ser um número irracional. É o caso, por exemplo, de $\sqrt{5}$ e $1/\sqrt{5}$. Ambos são números irracionais mas, o produto desses dois números vale 1.

Você pode aprender mais sobre números irracionais em [15].

7 Racionais × periodicidade

Voltemos ao número irracional $\sqrt{2}$ e a uma de suas aproximações, digamos, o número racional $1{,}414$. Considere a reta real e um segmento de comprimento $1{,}414$ com uma das extremidades na origem, como exibido na figura a seguir.

Agora, vamos justapor, sucessivamente, vários desses segmentos como mostrado na figura acima. Pergunta-se:

Justapondo-se sucessivamente tais segmentos, como mostrado na figura acima, será que depois de um certo número de justaposições, a extremidade do lado direito do segmento obtido, estará sobre um número inteiro ?

Bem, se justapormos, como na figura, 1.000 segmentos de comprimento $1{,}414$, o segmento resultante, evidentemente, terá sua extremidade da direita, exatamente sobre o número inteiro 1.414.

Pergunta-se:

Será que 1.414 é o primeiro inteiro positivo que conseguimos atingir como extremidade à direita, neste processo de justaposição ?

Vejamos !!
Voltando às frações irredutíveis, temos que :

$$1{,}414=\frac{1.414}{1.000}=\frac{2\times 7\times 101}{2^3\times 5^3}=\frac{7\times 101}{2^2\times 5^3} \quad \text{ou seja,} \quad (2^2\times 5^3)\times 1{,}414=707.$$

Isso significa que justapondo $2^2 \times 5^3$ $(= 500)$ desses segmentos teremos na extremidade da direita do segmento obtido o número inteiro 707. E de fato, não é difícil provar que no processo de justaposição descrito acima, esta é a primeira vez que teremos atingido um número inteiro como extremidade, à direita, no processo acima descrito. Isso vem como consequência do fato que $707/(2^2 \times 5^3)$ é a fração irredutível associada ao racional $1{,}414$. Repare que a fração irredutível nos diz qual o primeiro inteiro a ser atingido e quantas justaposições devemos fazer para atingí-lo. A primeira informação está no numerador e a segunda no denominador.

Essa propriedade reflete uma certa *periodicidade* associada ao número $1{,}414$: a cada justaposição de 500 segmentos, no processo anteriormente descrito, obtemos um número inteiro, a saber, 707 , 2×707 , 3×707 , 4×707 e assim sucessivamente.

Será que está propriedade é uma sutil particularidade do número $1{,}414$ ou será que trata-se de algo mais geral ? Coloquemos essa questão de forma mais abrangente.

Consideremos um racional positivo e seja p/q sua fração irredutível. Pergunta-se :

Justapondo-se sucessivamente como no processo descrito acima, segmentos de comprimento p/q , depois de quantas repetições aparece na extremidade do lado direito, o primeiro número inteiro ?

Nesse caso, temos que :

$$q \times \frac{p}{q} = p \quad ; \quad (2q) \times \frac{p}{q} = 2p \quad ; \quad (3q) \times \frac{p}{q} = 3p \quad ; \quad (4q) \times \frac{p}{q} = 4p \quad ; \quad \cdots$$

Assim, a cada q justaposições de segmentos de comprimento p/q teremos um número inteiro nas extremidades do lado direito dos segmentos obtidos, a saber : p , $2p$, $3p$, $4p$ e assim sucessivamente.

Como saber que p é o primeiro inteiro positivo obtido nesse processo ?

Admitamos que seja possível multiplicar p/q por um inteiro positivo q', obtendo como resultado um inteiro positivo $p' < p$. Assim, $q' \times \dfrac{p}{q} = p'$. Logo, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$. Por sua vez, p'/q' tem sua forma irredutível, digamos, p''/q'' onde $p'' \leq p'$ pois cancelamos fatores comuns para obter a forma irredutível. Em resumo, temos que p/q e p''/q'' são frações irredutíveis satisfazendo:

$$\frac{p}{q} = \frac{p''}{q''} \quad \text{onde} \quad p'' \leq p' < p\,.$$

Mas isso não é possível, pois sendo frações irredutíveis, temos que $p = p''$ e $q = q''$ como observado na página 127.

Mostramos assim que p é, de fato, o primeiro inteiro a ser obtido no processo acima descrito, quando p/q está na forma irredutível, onde $p\,, q \in \mathbb{Z}^+$.

No entanto, essa periodicidade associada aos racionais é negada a todos os irracionais. Consideremos, por exemplo, o caso de $\sqrt{2}$.

Suponhamos que justapondo n segmentos de comprimento $\sqrt{2}$, como no processo acima, consigamos obter um número inteiro m. Nesse caso, concluímos que $n \times \sqrt{2} = m$, ou seja, $\sqrt{2} = m/n$ o que é absurdo, pois sabemos que $\sqrt{2}$ não é um número racional[1].

Mas resta uma pergunta !!

O irracional $\sqrt{2}$ não tem a periodicidade que suas aproximações racionais têm !!
O que lhe restou então, no processo acima descrito ?

Restou-lhe algo interessantíssimo !!

Justapondo sucessiva e indefinidamente segmentos de comprimento $\sqrt{2}$ nunca conseguiremos atingir números inteiros nas extremidades, à direta, dos segmentos obtidos, mas nesse processo tais extremidades passam tão próximo de números inteiros quanto pudermos imaginar, ou melhor, quanto quizermos !! Por exemplo, em algum momento do processo de justaposição a extremidade à direita estará a menos de 10^{-11} de algum número inteiro positivo. Isto é, existem inteiros positivos m, n tais que

$$0 < n\sqrt{2} - m < 10^{-11}.$$

Para detectar este fato, voltemos à página 89 para usarmos a expressão decimal de $\sqrt{2}$. Podemos escrevê-la da seguinte forma :

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1{,}\underbrace{4142135623730950488016}_{\text{22 dígitos}} + 0{,}\underbrace{0000000000000000000000}_{\text{22 zeros}}8872421\ldots \\ &< 1{,}\underbrace{41421356238}_{\text{11 dígitos}} + 0{,}\underbrace{0000000000000000000000}_{\text{22 zeros}}9\,.\end{aligned}$$

Portanto, $10^{11}\sqrt{2} < 141421356238 + 0{,}\underbrace{00000000000}_{\text{11 zeros}}9$ e daí obtemos que

$$\underbrace{10^{11}}_{n}\sqrt{2} - \underbrace{141421356238}_{m} < 0{,}9 \times 10^{-11} < 10^{-11}$$

como havíamos citado anteriormente.

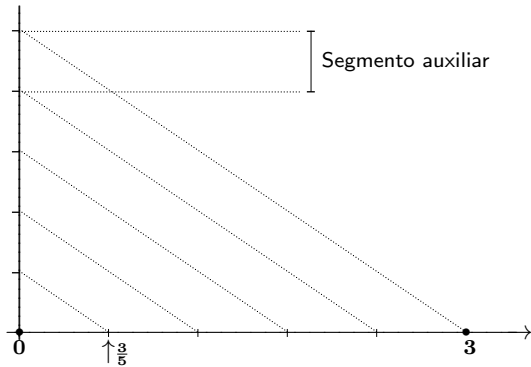
Finalizamos esta seção lembrando que a propriedade acima descrita é, de fato, verdadeira para todos os irracionais.

Você pode aprender mais sobre periodicidade e racionais na subseção 2.4 do próximo capítulo e na referência [11].

Exercícios resolvidos

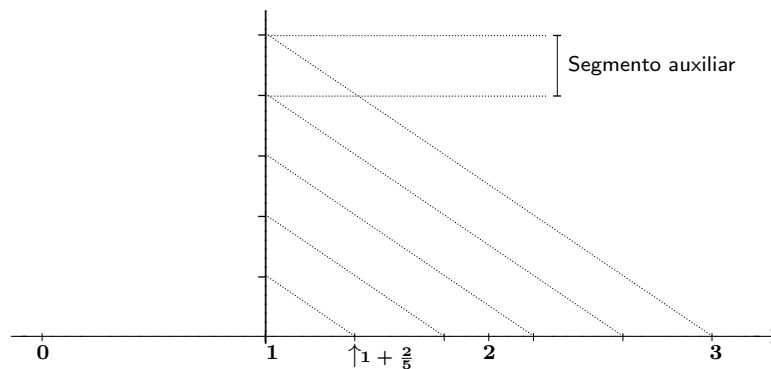
[1] Repare que essa prova permanece válida quando trocamos $\sqrt{2}$ por qualquer irracional positivo !!

1. **Marcados os números 0 e 3 na reta orientada, marque o número $3/5$ usando o processo de divisão de segmentos em partes iguais.**

Solução Para isso, dividiremos o segmento de 0 a 3 em cinco partes iguais. A primeira marcação dessa divisão representará o ponto $3/5$. Aplicamos o Teorema de Thales para realizar essa divisão, como na divisão do segmento de 0 a 5 em três parte iguais. O segmento auxiliar mostrado na figura é usado para fazer as marcações na reta vertical. Essa reta e o eixo orizontal são as duas transversais do Teorema de Thales. As retas pontilhadas são as paralelas.

2. **Fixe uma unidade e marque na reta orientada o número $\frac{21}{15}$.**

Solução Fixemos uma unidade com a abertura de um compasso, e marquemos com esse compasso os inteiros $0, 1, 2$ e 3 a partir da escolha de uma origem. Temos que

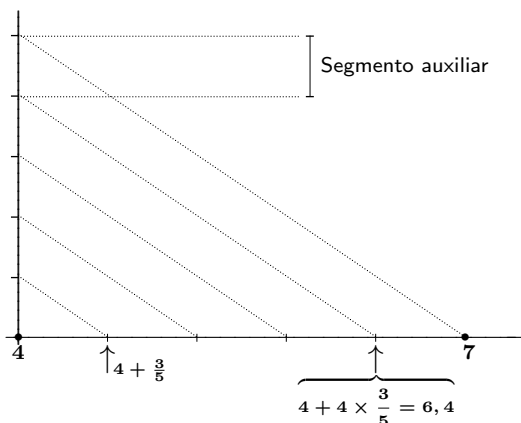
$$\frac{21}{15} = \frac{3 \times 7}{3 \times 5} = \frac{7}{5} = \frac{5+2}{5} = 1 + \frac{2}{5}.$$

Assim, para marcar o ponto correspondente ao número $21/15$ basta, por exemplo, dividir o segmento de 1 a 3 em 5 partes iguais e tomar a primeira marcação. Ela representará o número $1 + \frac{2}{5}$.

3. **Conhecendo as posições na reta orientada dos números 4 e 7, marque os números $23/5$ e $6{,}4$.**

Solução Temos que

$$\frac{23}{5} = \frac{20+3}{5} = 4 + \frac{3}{5} \quad \text{e}$$

$$6{,}4 = \frac{64}{10} = \frac{32}{5} = \frac{20+12}{5} = 4+\frac{12}{5} = 4+4\times\frac{3}{5}\,.$$

Assim, para marcar os pontos em questão vamos dividir o intervalo de 4 a 7 em 5 partes iguais. Cada um dos subintervalos terá comprimento $\frac{7-4}{5} = \frac{3}{5}$. Portanto, a primeira marca dessa divisão representará o número $4 + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$ e a última marca representará o número $4+4\times\frac{3}{5} = 6{,}4$.

4. **Quais dos números reais a seguir são irracionais ?**

(a) $\sqrt{50}$ **(b)** $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ **(c)** $\dfrac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$ **(d)** $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ **.**

Solução

(a) Temos que: $\sqrt{50} = \sqrt{1+n^2}$ onde $n = 7 \in \mathbb{Z}^*$. Logo, $\sqrt{50}$ é um número irracional[2].

(b) Vamos responder essa pergunta seguindo as regras que identificam irracionais. Elas garantem que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Logo, $-\sqrt{2}$ também o é. Assim, $1-\sqrt{2}$ é irracional e, consequentemente, sua raíz cúbica $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é um número irracional.

Outra forma de responder essa questão é a seguinte:

Suponha que $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é um número racional. Logo, existem $p\,, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} = p/q$. Elevando ao cubo, obtemos:

$$1-\sqrt{2} = \frac{p^3}{q^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{2} = 1 - \frac{p^3}{q^3}$$

provando assim que $\sqrt{2}$ é racional, o que é absurdo. Portanto, $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ é um número irracional.

(c) Simplificando a expressão obtemos:

$\dfrac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(2+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2\,(\sqrt{6}+2)} = \dfrac{1}{2}$ mostrando que o número em questão é racional e, portanto, não é irracional.

(d) As regras dadas não permitem decidir se esse número é ou não irracional. Para mostrar que ele é irracional vamos usar os argumentos do item (b).

[2]Repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração que $\sqrt{5}$ é irracional, você poderia provar que $\sqrt{50}$ também é irracional.

☞ Suponhamos que $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ é racional.
☞ Segue daí que: $\sqrt{6}-\sqrt{3}=m/n$ onde m, n são inteiros positivos;
☞ Elevando ao quadrado: $3-2\sqrt{18}=m^2/n^2$
☞ Logo: $\sqrt{18}=\dfrac{3n^2-m^2}{2n^2}$
☞ Portanto: $3\sqrt{2}=\dfrac{3n^2-m^2}{2n^2}$
☞ Consequentemente: $\sqrt{2}=\dfrac{3n^2-m^2}{6n^2}$ é um número racional.
☞ O que é absurdo, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional.
☞ Portanto: $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ é de fato um número irracional.

5. **Pergunta-se: se as medidas dos catetos de um triângulo retângulo são números racionais, então a medida de sua área também será racional ?**

Solução Denotemos por b e h as medidas dos catetos do triângulo e suponhamos que elas são números racionais. Assim, a área $\mathcal{A}$ do triângulo, dada por $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\,b\,h$, é o produto de números racionais, a saber: $b\,,h$ e $1/2$. Logo, $\mathcal{A}$ é um número racional e a resposta a pergunta colocada é SIM.

6. **Mostre que se a medida da área de um disco plano é um número racional, então a medida do raio desse disco é um número irracional.**

Solução Seja r a medida do raio do disco. Sabemos que sua área vale πr^2. Por hipótese, πr^2 é um número racional. Logo, $\pi r^2=p/q$ onde $p\,,q$ são inteiros positivos. Agora temos:

$$\pi r^2=\frac{p}{q}\qquad\Longrightarrow\qquad r=\sqrt{\frac{p}{q}\times\pi}\,.$$

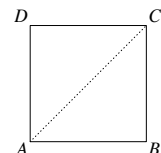
Das regras estudadas segue que:

- $\dfrac{p}{q}\times\pi$ é irracional pois é o produto de um racional não nulo por um irracional;
- $\sqrt{\dfrac{p}{q}\times\pi}$ é irracional pois é a raiz quadrada de um irracional positivo;

e assim, concluímos que a medida do raio r do disco é um número irracional.

7. **A medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $30\,cm$ é um número racional ?**

Solução Considere o quadrado $ABCD$ cuja diagonal mede $30\,cm$. O triângulo ABC é retângulo em B e isósceles pois, $|AB|=|BC|$. Assim, temos:

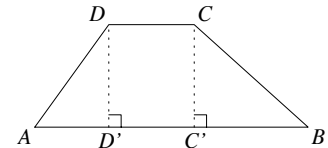
$$|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2\quad\Longrightarrow\quad 2|AB|^2=900\quad\Longrightarrow\quad |AB|^2=900/2$$
$$\Longrightarrow\quad |AB|=30/\sqrt{2}\quad\Longrightarrow\quad |AB|=15\sqrt{2}\,.$$

Logo, o lado do quadrado mede $15\sqrt{2}\,cm$. Das regras estudadas concluímos que a medida do lado em questão não é racional.

8. No trapézio mostrado abaixo, temos: $|AB| = 8$, $|AD| = 5$, $|DC| = 3$ e $|CB| = 4$. Calcule a altura do trapézio.

Solução Os triângulos $AD'D$ e $C'BC$ são retângulos. Assim, fazendo $h = |D'D| = |C'C|$, $x = |AD'|$ e $z = |C'B|$, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$25 = x^2 + h^2 \quad \text{e} \quad 16 = z^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - z^2 = 9 \,. \qquad (8.1)$$

Além disso, temos que:

$$x + 3 + z = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x + z = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 5 - x \,. \qquad (8.2)$$

De (8.1) e (8.2) segue que: $x^2 - (5-x)^2 = 9 \iff 10x = 34 \iff x = 3{,}4$. Assim,

$$h^2 = \frac{2500}{100} - \frac{34^2}{100} = \frac{1344}{100} = \frac{2^6 \times 3 \times 7}{2^2 \times 5^2} = \frac{2^4 \times 21}{5^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{4\sqrt{21}}{5}$$

já que h é positiva.

Terminado o exercício temos a obrigação moral de colocar a seguinte pergunta: *um tal trapézio existe*? Tente uma solução geométrica, sem cálculos.

9. Mostre que se um triângulo equilátero tem como medida de seus lados um número racional, então a altura desse triângulo tem medida irracional.

Solução Sabemos que num triângulo equilátero todos os lados têm o mesmo comprimento. Seja ℓ tal comprimento e seja h o comprimento da altura desse triângulo. O Teorema de Pitágoras nos garante que: $(\ell)^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \implies h^2 = (\ell)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\ell^2 \implies h = \frac{\ell}{4}\sqrt{3}$.

Como ℓ é racional e $\sqrt{3}$ é irracional, concluímos que a medida da altura do triângulo é irracional.

10. Mostre que não existem triângulos simultaneamente retângulos e isósceles cujas medidas dos lados sejam números inteiros.

Solução Suponhamos que um tal triângulo existe. Seja $m \in \mathbb{Z}^+$ a medida de sua hipotenusa e seja $n \in \mathbb{Z}^+$ a medida de cada um dos seus catetos. Segue do Teorema de Pitágoras que

$$m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2 \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

o que contradiz o fato que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Mostramos assim que não existem triângulos simultaneamente retângulos e isósceles cujas medidas dos lados sejam números inteiros.

Terminado o exercício, não podemos deixar de colocar a seguinte pergunta: *um tal triângulo existe quando a medida dos lados são números racionais*?

11. Seja r um número racional.

(i) **Mostre que o simétrico de todo número racional em relação a r também é um número racional ;**

(ii) **Mostre que o simétrico de todo número irracional em relação a r também é um número irracional ;**

Solução Sabemos que os simétricos em relação a r têm a forma $r \pm b$. Seja λ um número real qualquer e coloquemos $r + b = \lambda$. Assim, $b = \lambda - r$ e o simétrico de λ em relação a r vale $r - b$ onde:

$$r - b = r - (\lambda - r) = 2r - \lambda\,.$$

Portanto, o simétrico de $\lambda \in \mathbb{R}$ em relação a r vale $2r - \lambda$. Logo,

(i) se λ é racional, então $2r - \lambda$ é racional, pois é a diferença de dois racionais: $2r$ e λ ;

(ii) se λ é irracional, então $2r - \lambda$ é irracional, pois é a diferença entre um racional (no caso, $2r$) e um irracional (no caso, λ) ;

demonstrando o que pretendíamos.

12. Seja r um número irracional.

(i) **Mostre que o simétrico de todo número racional em relação a r é um número irracional ;**

(ii) **Mostre que o simétrico de todo número irracional em relação a r é um número racional.**

Solução Seguindo os passos da solução do exercício anterior, sabemos que o simétrico de um número real λ em relação a r é dado por $2r - \lambda$. Daí, podemos concluir que:

- se λ é racional, então $2r - \lambda$ é irracional, pois é a diferença entre um irracional (no caso, $2r$) e um racional (no caso, λ) ;
- se λ é irracional, então $2r - \lambda$ será ?
  Bem, aqui temos um problema ! O exercício pede que mostremos que $2r - \lambda$ é racional, mas isso é falso, pois a diferença entre dois irracionais (no caso, $2r$ e λ) pode ser um número irracional. Vejamos um exemplo !!
  Seja $\lambda = 3r$, o qual é irracional. Nesse caso, temos que o simétrico de λ em relação a r vale $2r - 3r = -r$ que, também, é irracional. Isso mostra que a afirmação feita no item (ii) do presente exercício é falsa.
  Concluímos então que a afirmação feita no item (ii) é falsa.

13. Repita o processo descrito na seção 7 trocando $1{,}414$ por $2{,}236$. Determine com qual periodicidade as extremidades à direita, dos segmentos obtidos no processo, estão sobre números inteiros.

Solução Temos que :

$$2{,}236 = \frac{2236}{10^3} = \frac{2^2 \times 559}{2^3 \times 5^3} = \frac{559}{2 \times 5^3}\,.$$

Assim, concluímos que $(2 \times 5^3) \times 2{,}236 = 559$. Segue daí que justapondo sucessivamente 2×5^3 (=250) segmentos de comprimento $2{,}236$, como no processo da seção 7, encontraremos um número inteiro na extremidade à direita do segmento obtido. Além, disso, como a fração $\frac{559}{2\times 5^3}$ está na sua forma irredutível, concluímos que esta é a primeira vez em que este fato ocorre. Assim, a cada justaposição de 250 segmentos de comprimento $2{,}236$ obteremos os inteiros 559 , 2×559 , 3×559 , 4×559 e assim sucessivamente.

14. **Sabemos que trocando $\sqrt{2}$ por $\sqrt{5}$ no processo descrito na seção 7 também não conseguimos obter números inteiros nas extremidades à direita dos segmentos construídos. De forma semelhante ao que foi feito lá, mostre que existem inteiros positivos m , n tais que**

$$0 < n\sqrt{5} - m < 10^{-8}.$$

Solução Voltemos à página **??** para usarmos parte da expressão decimal de $\sqrt{5}$. Temos que :

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2{,}2360679774997896 + 0{,}\underbrace{0000000000000000}_{\text{16 zeros}}9640917366873127623\ldots \\ &< 2{,}23606798 + 0{,}\underbrace{0000000000000000}_{\text{16 zeros}}97\end{aligned}$$

Portanto, $10^8\sqrt{5} < 223606798 + 0{,}\underbrace{00000000}_{\text{8 zeros}}97$ e daí obtemos que

$$\underbrace{10^8}_{n}\sqrt{5} - \underbrace{223606798}_{m} < 0{,}97 \times 10^{-8} < 10^{-8}$$

Exercícios

1. Quais dos números a seguir são racionais?

   (a) $\sqrt{0,81}$ (b) $0,402$ (c) $\frac{5,0}{7}$
   (d) $\frac{5}{4,2}$ (e) $\frac{0,34}{1,27}$ (f) $\frac{0,003}{1,002}$
   (g) $0,21$ (h) $\frac{0,1}{2,1}$ (i) $\sqrt{0,49}$.

   Se racionais, escreva-os na forma de uma fração irredutível.

2. Prove que se a é um racional positivo, então

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

   também é um racional positivo.

3. Quantos racionais existem entre 1 e 5, possuindo a forma $\frac{7}{2n}$ onde n é um inteiro?

4. Quantos racionais existem de -7 a 20 possuindo a forma $\frac{3n}{2}$ onde n é um inteiro?

5. Todo número racional não nulo pode ser colocado na forma $\frac{7}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}$?

6. Todo número racional não nulo pode ser colocado na forma $\frac{9}{b}$ com $b \in \mathbb{Q}$?

7. Quantos números inteiros n existem satisfazendo a condição $\frac{2}{n} < 0{,}5 < \frac{3}{n}$?

8. Quantos números racionais b existem satisfazendo a condição $\frac{2}{b} < 0{,}5 < \frac{3}{b}$?

9. Quantos números inteiros n satisfazem a desigualdade $0{,}5 < \frac{3}{|n|}$?

10. Considere a fração $\frac{14}{9}$. Quais os dois menores números inteiros positivos que podemos adicionar ao numerador e ao denominador sem alterar o valor da fração?

11. Quais dos números a seguir são irracionais? Justifique sua resposta.

    (a) $3\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}/2$ (c) $\sqrt{2}-5$.

12. Quais dos números a seguir são racionais? Justifique sua resposta.

    (a) $2/\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$ (c) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$
    (d) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ (e) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (f) $\frac{\pi^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\pi^2}$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas? Justifique sua resposta.

    (1) $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$;
    (2) $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$;
    (3) $a+b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}^*$;
    (4) $a-b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$;
    (5) Se $a, b \notin \mathbb{Q}$, então $a+b \notin \mathbb{Q}$.

14. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

    (a) A raiz quadrada de um irracional positivo pode ser racional ;
    (b) O cubo de um racional pode ser irracional;
    (c) A raiz cúbica de um irracional positivo é irracional;
    (d) O quociente de dois irracionais distintos é irracional.

15. Os números reais[3] $\sqrt{75025}+\sqrt{121393}+\sqrt{196418}+\sqrt{317811}$ e $\sqrt{514229}+\sqrt{832040}$ são iguais ou distintos? Use um software apropriado para tentar uma aproximação...

16. Para cada item, construa um subconjunto do conjunto dado, com uma infinidade de elementos e que tenha, somente, números racionais.

    (a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\}$;
    (b) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 2{,}0000001\}$.

17. Para cada item, construa um subconjunto do conjunto dado, com uma infinidade de elementos e que tenha, somente, números irracionais.

    (a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\}$;
    (b) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 2{,}0000001\}$.

[3] Extraído de *When close enough is close enough, The American Mathematical Monthly, June-July, pp 489–499, 2000.*

18. Seja b um número real positivo. Construa uma infinidade de números irracionais no intervalo $(0, b)$.

19. Sejam $0 < a < b$. Construa uma infinidade de números irracionais no intervalo (a, b).

20. A raiz quadrada de um inteiro positivo e ímpar é um número irracional ?

21. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que $\sqrt{n}$ é um inteiro se, e somente se, n é um quadrado[4] perfeito.

22. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que se n não é um quadrado perfeito então $\sqrt{n}$ é irracional.

23. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que $\sqrt{1+n^2}$ é irracional.

24. Mostre que todo número inteiro pode ser colocado na forma $b\sqrt{2}+2$ onde b é um número real.

25. Mostre que todo número real pode ser colocado na forma $\pi b - 1$ onde b é um número real.

26. Enuncie e resolva exercícios semelhantes aos dois últimos.

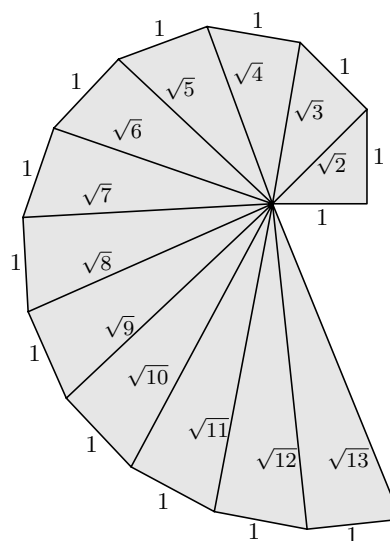
27. Repita os argumentos da seção 5.1 para mostrar que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

28. Generalize esse resultado para as raízes de ordem n de 5 e prove a generalização proposta.

29. Usando os argumentos da seção 5.1 podemos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional ? E sobre $\sqrt{3}$?

30. Será que a raiz quadrada de um número primo é um número irracional ?

31. Será possível generalizar esse resultado para raízes de ordem n onde $n \geq 2$ é um número inteiro ?

32. Na figura a seguir os triângulos são retângulos, cada um deles têm um cateto unitário e as hipotenusas valem $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots, \sqrt{13}$ respectivamente.

Prossiga no desenvolvimento da figura até chegar em $\sqrt{20}$.

Se você prosseguisse indefinidamente marcando $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{20}, \ldots$ qual seria o aspecto da curva formada pelos catetos unitários ?

33. Use um software apropriado para fazer a figura acima até atingir $\sqrt{60}$.

34. Seja $0 < a < b$. Mostre que existe uma infinidade de racionais no intervalo (a, b).

35. Seja T um triângulo qualquer. Mostre que o conjunto dos triângulos semelhantes a T é infinito. Faça uma figura que indique com clareza esse fato.

36. Seja r um número real com a seguinte propriedade: *o simétrico de qualquer número irracional em relação a r, também é irracional.*

Mostre que r é um número racional.

[4]Um inteiro $n \geq 0$ é um *quadrado perfeito* quando $n = m^2$ para algum inteiro m.

9

Resolução de equações

Uma *equação* é uma igualdade na qual figura uma *incógnita*. *Resolver* uma equação em $\mathbb{R}$ é encontrar os *valores reais da incógnita* que satisfazem a igualdade. O conjunto formado por esses valores é dito *conjunto solução da equação* e será frequentemente denotado pela letra $\mathcal{S}$.

Agora, vamos estudar alguns tipos de equações, começando pelas mais simples. A tática para resolver equações é sempre a mesma: reduzí-las a *equações elementares*. Além disso, convencionamos aqui que, resolver uma equação significa determinar suas soluções reais.

1 Algumas equações elementares

Algumas equações são de resolução imediata. Por exemplo:

- ☞ $x^2 = 0 \iff x = 0\,;$
  $\mathcal{S} = \{0\}\,.$
- ☞ $x^4 = 0 \iff x = 0\,;$
  $\mathcal{S} = \{0\}\,.$
- ☞ $2x = 3 \iff x = 3/2\,;$
  $\mathcal{S} = \{3/2\}\,.$
- ☞ $x^5 = 0 \iff x = 0\,;$
  $\mathcal{S} = \{0\}\,.$
- ☞ $x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}\,;$
  $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\}\,.$
- ☞ $x^2 = -3$ não tem soluções;
  $\mathcal{S} = \emptyset\,.$
- ☞ $x^3 = -8 \iff x = -2\,;$
  $\mathcal{S} = \{-2\}\,.$
- ☞ $x^3 = 1 \iff x = 1\,;$
  $\mathcal{S} = \{1\}\,.$
- ☞ $|x| = \pi \iff x = \pm\pi\,;$
  $\mathcal{S} = \{-\pi\,,\pi\}\,.$
- ☞ $|x| = -1$ não tem soluções;
  $\mathcal{S} = \emptyset\,.$

☞ $x^4 = 2 \iff x = \pm\sqrt[4]{2}$;
$\mathcal{S} = \{-\sqrt[4]{2}\,,\ \sqrt[4]{2}\}$.

☞ $\sqrt{x} = 1 \iff x = 1$;
$\mathcal{S} = \{1\}$.

☞ $\sqrt[3]{x} = 2 \iff x = 8$.
$\mathcal{S} = \{8\}$.

☞ $\sqrt{|x|} = 1 \iff x = \pm 1$.
$\mathcal{S} = \{-1\,,\ 1\}$.

☞ $\sqrt[3]{|x|} = 2 \iff x = \pm 8$.
$\mathcal{S} = \{-8\,,\ 8\}$.

☞ $|x| = x \iff x \geq 0$.
$\mathcal{S} = [\,0\,,\infty)$.

☞ $|x| + x = 0 \iff x \leq 0$.
$\mathcal{S} = (-\infty, 0\,]$.

☞ $|x| + x^4 = 0 \iff x = 0$.
$\mathcal{S} = \{0\}$.

☞ $|x+1| = 0 \iff x = -1$.
$\mathcal{S} = \{-1\}$.

☞ $x^4 + x^2 = 0 \iff x = 0$.
$\mathcal{S} = \{0\}$.

Existem equações que não são de resolução tão imediata mas podem ser resolvidas por um processo simples. É o caso, por exemplo das equações do primeiro e segundo graus que estudaremos a seguir. Veremos, também, uma estratégia que permite reduzir certas equações a equações dos tipos acima citados: isso é feito através de uma operação dita *mudança de variável*. Veremos essa bela estratégia de solução logo após o estudo das equações do primeiro e segundo graus.

2 Equação e expressão do primeiro grau

Uma *equação do primeiro grau* é uma equação da forma

$$ax + b = 0 \quad \text{onde} \quad a\,,\, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a \neq 0}\,. \tag{9.1}$$

A expressão[1] no primeiro membro da igualdade (9.1) é dita *expressão do primeiro grau*. Os parâmetros $a\,,\ b$ são, respectivamente, o *coeficiente do termo de primeiro grau* e o *termo independente* da expressão $ax + b$.

2.1 Resolução de uma equação do primeiro grau

Como $a \neq 0$, a resolução da equação (9.1) é feita através da sequência de simplificações:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = \frac{b}{a}$$

[1]Não confunda *expressão do primeiro grau* com *equação do primeiro grau*. Uma expressão do primeiro grau, como dissemos acima, é uma expressão da forma $P(x) = ax + b$ onde $a\,, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Note também que a expressão $P(x) = b$ não é do primeiro grau pois o coeficiente do termo de primeiro grau é nulo.

já que $a \neq 0$. Assim, o conjunto solução da equação (9.1) é: $\mathcal{S} = \{-b/a\}$.

Note que a solução da equação (9.1) é o *zero* da expressão $ax + b$. De uma forma geral, determinar os zeros de uma expressão $E(x)$ é o mesmo que determinar as soluções da equação $E(x) = 0$. No entanto, expressão e equação são objetos matemáticos distintos. Também dizemos que uma expressão do primeiro grau é um *polinômio de grau* 1 e seu zero é a *raiz* desse polinômio.

Exemplos

❄ $2x + 1$ é uma expressão do primeiro grau.

O coeficiente do termo de primeiro grau vale 2;
O termo independente vale 1.

A solução da equação $2x + 1 = 0$ é:

$2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -1/2$.

Portanto, $\mathcal{S} = \{-1/2\}$.

❄ $x - 3$ é uma expressão do primeiro grau.

O coeficiente do termo de primeiro grau vale 1;
O termo independente vale -3.

A solução da equação $x - 3 = 2$ será:

$x - 3 = 2 \iff x = 5$.

Portanto, $\mathcal{S} = \{5\}$.

❄ Na expressão $\pi - 5x$ temos:

O coeficiente do termo de primeiro grau vale -5;
O termo independente vale π;

A equação $\pi - 5x = 1$ tem a seguinte solução:

$\pi - 5x = 1 \iff 5x = \pi - 1 \iff x = \dfrac{\pi - 1}{5}$.

Portanto, $\mathcal{S} = \{(\pi - 1)/5\}$.

❄ $2|x| - 3$ não é uma expressão do primeiro grau[2], pois não é da forma $ax + b$. No entanto, podemos resolver a equação $2|x| - 3 = 0$ imitando a resolução para equações do primeiro grau:

$2|x| - 3 = 0 \iff |x| = 3/2 \iff x = \pm\frac{3}{2}$.

Portanto, $\mathcal{S} = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

2.2 Sinal de uma expressão do primeiro grau

Voltando a expressão $ax + b$ do primeiro grau, temos que:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \qquad \text{já que } a \neq 0. \tag{9.2}$$

Colocada nessa forma, fica fácil não apenas determinar onde a expresssão $ax+b$ se anula (o que já fizemos), como também, analizar o sinal dela. Examinando o membro direito da igualdade (9.2) concluímos que:

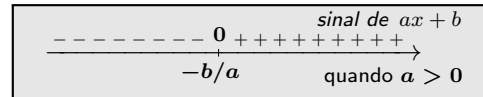
[2] De fato podemos entender que a expressão $E(x) = 2|x| - 3$ é uma *expressão do primeiro grau na variável* $|x|$. Igualmente, entendemos que a expressão $E(x) = a|x| + b$ é uma expressão do primeiro grau na variável $|x|$ quando $a \neq 0$.

☞ $ax+b$ se anula em $-b/a$;

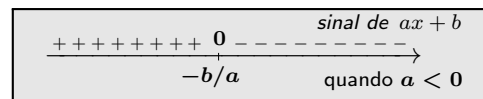
☞ Quando $a>0$ temos:

➙ $ax+b$ é positivo quando $x+\frac{b}{a}>0$;
ou seja, quando $x>-\frac{b}{a}$;
isto é, à direita de $-b/a$;

➙ $ax+b$ é negativo quando $x+\frac{b}{a}<0$;
ou seja, quando $x<-\frac{b}{a}$;
isto é, à esquerda de $-b/a$.

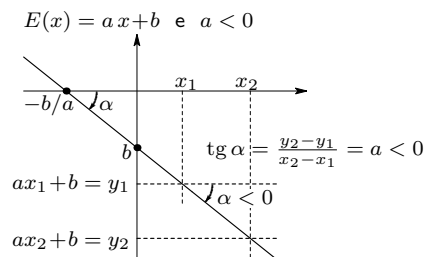
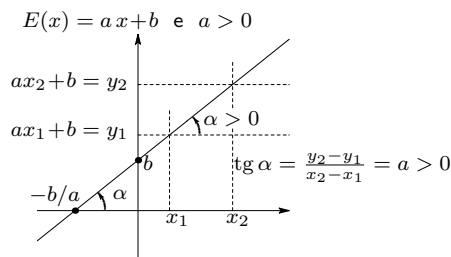
sinal de $ax+b$
+ + + + + + + + 0 − − − − − − − − −
$-b/a$
quando $a<0$

☞ Quando $a<0$ temos:

➙ $ax+b$ é negativo à direita de $-b/a$;

➙ $ax+b$ é positivo à esquerda de $-b/a$;

como exibido nas figuras ao lado.

Note que $ax+b$ não muda de sinal quando estamos à direita (resp. esquerda) de $-b/a$. Portanto, para descobrir o sinal de $ax+b$ à direita (resp. esquerda) de $-b/a$ basta avaliar a expressão $ax+b$ num ponto à direita (resp. esquerda) de $-b/a$. Essa propriedade será usada com freqüência no estudo do sinal de expressões mais complicadas.

2.3 Gráfico de uma expressão do primeiro grau

O gráfico de uma expressão do primeiro grau é uma reta. Tal reta é *não horizontal* já que o coeficiente do termo do primeiro grau é, por definição, não nulo. As figuras a seguir mostram o gráfico da expressão do primeiro grau $E(x)=a\,x+b$ quando $a>0$ e quando $a<0$.

Note que para $x_1\neq x_2$ temos:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=a.$$

Por isso o coeficiente do termo de primeiro grau é dito *coeficiente angular* da expressão de primeiro grau $E(x) = a\,x + b$. Ele mede a inclinação do gráfico da expressão de primeiro grau em relação ao eixo das abcissas.

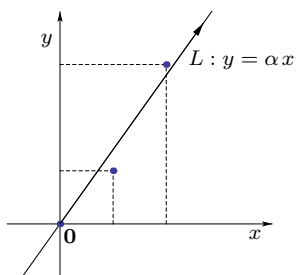
Além disso, em $x = 0$ a expressão $ax + b$ vale b. Isso significa que o termo independente dessa expressão é o ponto do eixo das ordenadas por onde passa o seu gráfico. Concluímos também que o ponto onde a expressão $a\,x + b$ se anula é o ponto do eixo das abcissas por onde passa seu gráfico.

Quando $a > 0$ dizemos que a expressão $E(x) = a\,x+b$ é *crescente* já que $E(x)$ aumenta quando x aumenta. Analogamente, dizemos que $E(x) = a\,x+b$ é *decrescente* quando $a < 0$.

Observe que o ângulo α que o gráfico da expressão do primeiro grau faz com o sentido positivo do eixo das abcissas está compreendido entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Ele está:

- ☛ entre $-\pi/2$ e zero quando $a < 0$;
- ☛ entre zero e $\pi/2$ quando $a > 0$.

2.4 De volta a racionais × periodicidade

Consideremos a reta $L : y = \alpha\,x$ munida da orientação mostrada na figura. Nosso objetivo aqui é responder as seguintes perguntas:

Sob que condições podemos garantir que deslocando-se sobre L, partindo da origem e seguindo sua orientação, vamos encontrar pontos com ambas as coordenadas inteiras, distintos da origem?
Caso existam, com qual periodicidade eles são encontrados?

Primeiramente, vejamos que jamais encontraremos esses pontos quando o coeficiente angular de L for um número irracional.

Consideremos então o caso em que α é um número irracional e admitamos que deslocando-se sobre L, como colocado na pergunta, tenhamos encontrado um ponto $(m\,,n)$ distinto da origem, com ambas as coordenadas inteiras. Nesse caso, o ponto $(m\,,n)$ satisfaz a equação de L e teremos:

$$n = \alpha\,m \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{n}{m}$$

o que não pode ocorrer, pois α é suposto irracional.

Mostramos assim, que se o coeficiente angular de L é irracional, então L nunca passará por pontos com ambas as coordenadas inteiras, a não ser a origem.

Admitamos agora que o coeficiente angular de L é racional. Mais precisamente, admitamos que $\alpha = 1{,}414$. Assim, a equação de L toma a forma $y = 1{,}414\,x$ e temos:

$$x = 10^3 \quad \Longrightarrow \quad y = 1414\,.$$

Assim, a reta L passa pelo ponto $(10^3, 1414)$ que tem ambas as coordenadas inteiras.

Mas este é o primeiro ponto com coordenadas inteiras que atingimos, partindo da origem ? Como no estudo feito na página 135 concluiremos que não. Voltando a forma irredutível de $1{,}414$, como fizemos na referida página, teremos :

$$y = \frac{707}{2^2 \times 5^3}\, x \quad \text{e daí concluímos que :}$$

partindo da origem, e seguindo a orientação de L passaremos pelos seguintes pontos, distintos da origem, com ambas as coordenadas inteiras :

$$(2^2 \times 5^3, 707)\ ,\ (2 \times 2^2 \times 5^3, 2 \times 707)\ ,\ (3 \times 2^2 \times 5^3, 3 \times 707)\ ,\ (4 \times 2^2 \times 5^3, 4 \times 707)$$

e assim sucessivamente. Note que $(2 \times 2^2 \times 5^3, 2 \times 707) = (10^3, 1414)$.

Podemos provar que $(2^2 \times 5^3, 707)$ é, de fato, o primeiro ponto com as propriedades exigidas e isso, vem como presente da forma irredutível de α .

Novamente, como estudado na seção 7 do capítulo 8, essa propriedade reflete uma certa periodicidade, consequência do fato de L ter um coeficiente angular racional: a cada deslocamento sobre L de comprimento $\sqrt{500^2 + 707^2}$, partindo da origem, e seguindo a orientação de L , encontramos um ponto com ambas as coordenadas inteiras. Esse processo descreve todos os pontos de coordenadas inteiras, sobre L , à direita da origem.

Recoloquemos essa questão de forma mais geral, agora, considerando a reta $L : y = \frac{p}{q}\, x$ onde $p\,, q \in \mathbb{Z}^+$ e p/q está na forma irredutível. Da sua equação concluímos que L passa pelos pontos:

$$\ldots\ (-3q\,, -3p)\ ,\ (-2q\,, -2p)\ ,\ (-q\,, p)\ ,\ (0\,, 0)\ ,\ (q\,, p)\ ,\ (2q\,, 2p)\ ,\ (3q\,, 3p)\ \ldots$$

que têm ambas as coordenadas inteiras. Além disso, como p/q está na forma irredutível, podemos provar, de forma semelhante ao que foi feito na página 136 que esses são os únicos pontos com ambas as coordenadas inteiras. Note que temos novamente uma periodicidade: a cada deslocamento sobre L de comprimento $\sqrt{q^2 + p^2}$, partindo da origem, e seguindo a orientação de L , encontramos um ponto com ambas as coordenadas inteiras.

Novamente nos vem o seguinte questionamento :

Quando o coeficiente angular de L é irracional não temos
a periodicidade detectada no caso racional !!
O que resta a L , no processo acima, quando seu coeficiente angular é irracional ?

De forma similar ao que fizemos na seção 7 do capítulo 8, podemos provar que ao deslocarmos sobre L , não encontraremos pontos distintos da origem, com ambas as coordenadas inteiras. No entanto, passaremos tão próximos desse tipo de ponto quanto pudermos imaginar, ou melhor, quanto quizermos. De forma um pouco mais precisa, em algum momento nesse deslocamento, estaremos a uma distância inferior a 10^{-1000} de um ponto com ambas as coordenadas inteiras !! Mais tarde, no deslocamento sobre L , passaremos a uma distância inferior a $10^{-10^{1000}}$ de um ponto com ambas as coordenadas inteiras !!

3 Equação e expressão do segundo grau

Uma *equação do segundo grau* é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{onde} \quad a\,,\, b\,,\, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a \neq 0}\,. \tag{9.3}$$

A expressão no primeiro membro da igualdade (9.3) é denominada *expressão do segundo grau* ou *trinômio do segundo grau*[3]. Os parâmetros a , b , c são, respectivamente, o *coeficiente do termo de segundo grau*, o *coeficiente do termo de primeiro grau* e o *termo independente* do trinômio.

Lembre-se que, as soluções da equação (9.3) são os *zeros* da expresssão $ax^2 + bx + c$. A expressão do segundo grau também é dita um *polinômio de grau* 2 e seus zeros são as *raízes* desse polinômio.

3.1 Completando quadrados

Veremos agora a exuberância do método, conhecido como *método de completar quadrados*, que nos permitirá fazer uma análise fina da expressão do segundo grau. Esse método pode ser aplicado para analisar o comportamento de outras expressões, como veremos nos *Exercícios Resolvidos* .

Completar quadrado numa expressão é escrevê-la na forma

$$\boldsymbol{A(x+B)^2 + C} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\pm(A\,x+B)^2 + C}.$$

Para colocar $ax^2 + bx + c$ nessa forma, fazemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\Big\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big\} = a\Big\{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big\} \\ &= a\Big\{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big\} \\ &= a\Big\{\underbrace{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2}_{\geq 0} - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\} \end{aligned} \tag{9.4}$$

onde $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ é dito *discriminante* de $ax^2 + bx + c$.

A igualdade (9.4) nos permitirá várias conclusões importante sobre expressões do segundo grau.

Exemplos

[3]Novamente, não confunda *trinômio do segundo grau* com *equação do segundo grau*. Um trinômio do segundo grau, como dissemos acima, é uma expressão do tipo $E(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

❄ $x^2+2x+2=\big\{(x+1)^2-1\big\}+2=(x+1)^2+1\,;$

❄ $x^2-x=\Big(x-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2=\Big(x-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\dfrac{1}{4}\,;$

❄ $1+4x-x^2=-\{x^2-4x-1\}=-\big\{\big[(x-2)^2-2^2\big]-1\big\}=-(x-2)^2+5\,;$

❄ $2x^2+x-1=\Big\{\Big(\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\Big(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2\Big\}-1=\Big(\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\dfrac{1}{8}-1=\Big(\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\dfrac{9}{8}\,;$

❄ $2x^2-x=2\Big\{x^2-\dfrac{x}{2}\Big\}=2\Big\{\Big(x-\dfrac{1}{4}\Big)^2-\dfrac{1}{4}\Big\}=2\Big(x-\dfrac{1}{4}\Big)^2-\dfrac{1}{2}\,.$

❄ $x^4-2x^2-2=\big\{(x^2-1)^2-1\big\}-2=(x^2-1)^2-3\,;$

❄ $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}-1=\Big\{\Big(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2\Big\}-1=\Big(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\dfrac{1}{4}-1=\Big(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\dfrac{5}{4}$ quando $z\neq 0$.

3.2 Simetria numa expressão do segundo grau

A primeira conclusão importante que tiramos de (9.4) é que a expressão do segundo grau ax^2+bx+c assume os mesmos valores nos pontos[4]

$$-\frac{b}{2a}+\lambda \qquad \text{e} \qquad -\frac{b}{2a}-\lambda$$

qualquer que seja o número real λ. Vejamos:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c\Big]_{x=-\frac{b}{2a}\pm\lambda} &= a\left\{\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right\}\Bigg]_{x=-\frac{b}{2a}\pm\lambda} \\ &= a\left\{\Big(-\frac{b}{2a}\pm\lambda+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right\} \\ &= a\left\{(\pm\lambda)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right\}=a\Big\{\lambda^2-\frac{\Delta}{4a^2}\Big\} \end{aligned}$$

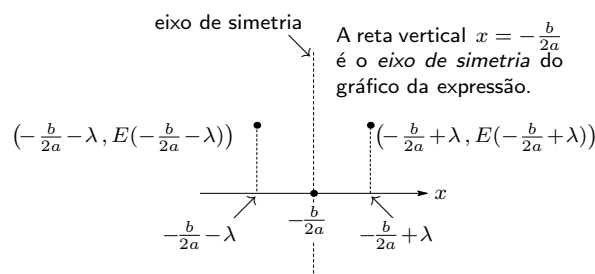
isto é,

$$ax^2+bx+c\Big]_{x=-\frac{b}{2a}+\lambda}=a\Big\{\lambda^2-\frac{\Delta}{4a^2}\Big\}=ax^2+bx+c\Big]_{x=-\frac{b}{2a}-\lambda}.$$

[4]Lembre-se que os pontos $-\frac{b}{2a}\pm\lambda$ são simétricos em relação ao centro de simetria $-\frac{b}{2a}$

Esse cálculo nos mostra que o gráfico da expressão $E(x) = ax^2 + bx + c$ é simétrico em relação a reta vertical de equação $x = -\frac{b}{2a}$ pois acabamos de mostrar que

$$E\Big(-\frac{b}{2a} + \lambda\Big) = E\Big(-\frac{b}{2a} - \lambda\Big)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tal reta é o *eixo de simetria* do gráfico da expressão.

Note que o eixo de simetria, de equação cartesiana $x = -b/2a$, não depende do termo independente c. Depende apenas dos parâmetros a e b. E qual seria uma justificativa geométrica para isso ?

Exemplos

❄ O eixo de simetria da expressão $3x^2 + 9x - 1$ é a reta de equação: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2\times 3} = -\frac{3}{2}$.

❄ O eixo de simetria da expressão $-3x^2 - 2x + 5$ é a reta de equação: $x = -\frac{(-2)}{2(-3)} = -\frac{2}{2\times 3} = -\frac{1}{3}$.

❄ O eixo de simetria da expressão $8x - 2x^2 + 3$ é a reta de equação: $x = -\frac{8}{2\times(-2)} = \frac{8}{4} = 2$.

3.3 Valores extremos de uma expressão do segundo grau

Outra conclusão importante que é explicita em (9.4) é a seguinte:

- Quando o coeficiente $a > 0$ a expressão $ax^2 + bx + c$ assume em $x = -\frac{b}{2a}$ o seu *menor valor* que é $-\frac{\Delta}{4a}$;

  Note que quando $a > 0$ tem-se que:

  $$ax^2 + bx + c = \underbrace{a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2}_{\geq 0} - \frac{\Delta}{4a} \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

  Logo, o menor valor assumido por ax^2+bx+c ocorre quando $x = -b/2a$ e vale $-\Delta/4a$.

- Quando o coeficiente $a < 0$ a expressão $ax^2 + bx + c$ assume em $x = -\frac{b}{2a}$ o seu *maior valor* que é $-\frac{\Delta}{4a}$.

  Note que quando $a < 0$ tem-se que:

  $$ax^2 + bx + c = \underbrace{a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2}_{\leq 0} - \frac{\Delta}{4a} \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, o maior valor assumido por ax^2+bx+c ocorre quando $x = -b/2a$ e vale $-\Delta/4a$.

Em ambos os casos, $-\frac{\Delta}{4a}$ é dito *valor extremo* da expressão $ax^2 + bx + c$. No caso em que $a > 0$ (resp. $a < 0$) dizemos que $x = -\frac{b}{2a}$ é o *ponto de mínimo* (resp. *de máximo*) da expressão. Note também que $-\Delta/4a$ não é, necessariamente, negativo. Seu sinal depende dos sinais de a e de Δ.

Exemplos

❄ O valor extremo assumido pela expressão $3x^2 + 9x - 1$ é:

- $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{9 \times 9 - 4 \times 3 \times (-1)}{4 \times 3} = -\dfrac{9 \times 3 - 4 \times (-1)}{4} = -\dfrac{27 + 4}{4} = -\dfrac{31}{4}$;
- o qual é assumido no ponto $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$;
- trata-se de um valor mínimo já que $a = 3$ é positivo.

❄ O valor extremo assumido pela expressão $-3x^2 + 2x + 5$ é:

- $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{2 \times 2 - 4 \times (-3) \times 5}{4 \times (-3)} = -\dfrac{1 + 3 \times 5}{(-3)} = \dfrac{16}{3}$;
- o qual é assumido no ponto $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$;
- trata-se de um valor máximo já que $a = -3$ é negativo.

3.4 Raízes e sinais de uma expressão do segundo grau

Para finalizar a solução da equação (9.3), voltemos à igualdade (9.4) e consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, a equação (9.3) não tem solução, já que $a \neq 0$ e a parte da expressão (9.4) entre chaves fica positiva pois $-\Delta > 0$. Além disso, a expressão em (9.4) nos garante o seguinte sinal para a expressão $ax^2 + bx + c$:

☛ $ax^2 + bx + c > 0$ quando $a > 0$;

☛ $ax^2 + bx + c < 0$ quando $a < 0$;

isto é, $ax^2 + bx + c$ tem sempre o sinal de a.

Assim, temos o seguinte quadro de sinais para a expressão $ax^2 + bx + c$ quando $\Delta < 0$.

$\Delta < 0$ e $a > 0$:

sinal de

+ + + + + + + + + + + + + +

$ax^2 + bx + c$

Exemplos

❄ A equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ não tem raízes reais pois seu discriminante Δ vale:
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$;
Além disso, a expressão $x^2 - 2x + 2$ é sempre positiva pois $a = 1$ é positivo.

❄ A equação $-2x^2 + x - 1 = 0$ não tem raízes reais pois seu discriminante Δ vale:
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 - 8 = -7 < 0$;
Além disso, a expressão $-2x^2 + x - 1$ é sempre negativa pois $a = -2$ é negativo.

Caso 2: $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

Nesse caso, $\sqrt{\Delta}$ está bem definido e (9.4) é um produto notável:

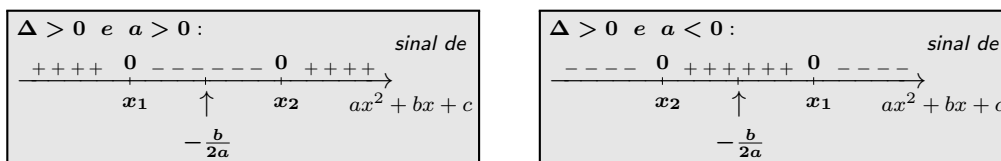
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\Big\{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big\} \\ &= a\Big(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Big)\Big(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Big) \end{aligned} \tag{9.5}$$

o que nos fornece duas soluções *distintas* para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, a saber:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{9.6}$$

Assim, a fatoração apresentada em (9.5) toma a forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{onde } x_1 \text{ e } x_2 \text{ são dados acima.}$$

De posse dessa fatoração e conhecendo a distribuição de sinais de expressões do primeiro grau, podemos concluir a seguinte distribuição de sinais para $ax^2 + bx + c$ quando $\boldsymbol{\Delta > 0}$.

Repare que (9.6) mostra que as raízes são simétricas em relação a $-b/2a$. Aliás, já havíamos descoberto na página 153 que o gráfico de uma expressão do segundo grau é simétrico em relação ao eixo de simetria $x = -b/2a$

Repare também que, como no caso de polinômios de grau 1, o sinal de um polinômio de grau 2 não muda quando estamos à direita ou a esquerda de suas raízes: ele é sempre positivo ou sempre negativo, dependendo do sinal de a. Idem para quando estamos entre suas raízes. Isso nos garante que, para conhecer o sinal da expressão à direita (resp. à esquerda) de suas raízes, basta calcular o valor da expressão num ponto qualquer situado à direita ou à esquerda

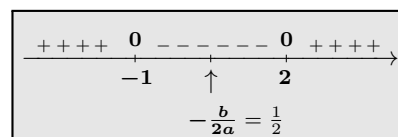
das raízes. O mesmo ocorre quando estamos entre as raízes. Observe também que $x_1 < x_2$ quando $a > 0$ e $x_1 > x_2$ quando $a < 0$.

Exemplos

❄ A equação $x^2 - x - 2 = 0$ tem duas raízes pois seu discriminante Δ vale:
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$;

Tais raízes são dadas por:

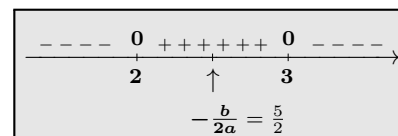
$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

ou seja, as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Além disso, como $a = 1 > 0$, a expressão $x^2 - x - 2$ tem o quadro de sinais mostrado no diagrama ao lado.

Também temos a seguinte fatoração para essa expressão: $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

❄ A equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$ tem duas raízes pois seu discriminante Δ vale:
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$;

Tais raízes são dadas por:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

ou seja, as raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$. Além disso, como $a = -1 < 0$, a expressão $-x^2 + 5x - 6$ tem o seguinte quadro de sinais.

Além dissso, temos a seguinte fatoração para a expressão: $-x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3)$.

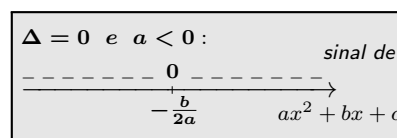
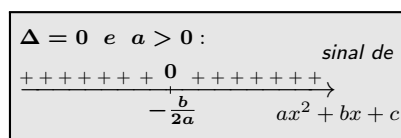
Caso 3: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Voltando a (9.4) concluímos que nessa condição:

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2. \tag{9.7}$$

Segue daí que a expressão se anula em um único ponto, a saber, $-\frac{b}{2a}$; exatamente sobre o eixo de simetria. Nesse caso, dizemos que o polinômio $ax^2 + bx + c$ tem uma única raíz e que tal raíz tem *multiplicidade 2*. Também é fácil a partir de (9.7), descrever a distribuição de sinais: ela é determinada pelo sinal de a como exibido nos diagramas a seguir.

$\Delta = 0$ *e* $a > 0$: *sinal de*
+ + + + + + + 0 + + + + + + +
$-\frac{b}{2a}$ $ax^2 + bx + c$

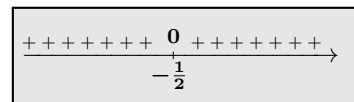
$\Delta = 0$ *e* $a < 0$: *sinal de*
− − − − − − − 0 − − − − − − −
$-\frac{b}{2a}$ $ax^2 + bx + c$

Exemplos

❄ A equação $4x^2 + 4x + 1 = 0$ tem uma única raiz pois seu discriminante Δ vale:

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$;

Tal raiz é dada por:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}.$$

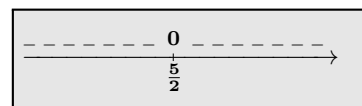
Além disso, como $a = 4 > 0$, a expressão $4x^2+4x+1$ tem o seguinte quadro de sinais.

Também temos a seguinte fatoração para a expressão: $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2x + 1\right)^2$.

❄ A equação $-4x^2 + 20x - 25 = 0$ tem uma única raiz pois seu discriminante Δ vale:

$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times (-4) \times (-25) = 20^2 - 4 \times 4 \times 5^2 = 20^2 - (4 \times 5)^2 = 0$;

Tal raiz é dada por:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{2 \times (-4)} = \frac{20}{2 \times 4} = \frac{5}{2}.$$

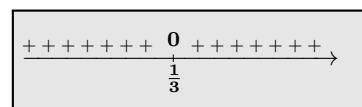
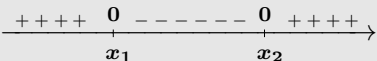
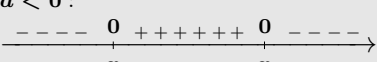
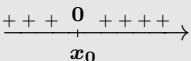
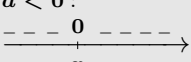
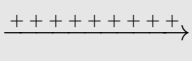
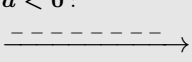
Além disso, como $a = -4 < 0$, a expressão $-4x^2+20x-25$ tem o seguinte quadro de sinais.

A expressão $-4x^2+20x-25$ admite a seguinte fatoração: $-4x^2+20x-25 = -4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = -\left(2x-5\right)^2$.

❄ A equação $-9x^2 + 6x = 1$ é equivalente a equação $9x^2 - 6x + 1 = 0$ que tem uma única raiz, pois seu discriminante Δ vale:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 6^2 - 36 = 0$;

Tal raiz é dada por:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Além disso, como $a = 9 > 0$, a expressão $9x^2 - 6x + 1$ tem o seguinte quadro de sinais.

A expressão $9x^2 - 6x + 1$ admite a seguinte fatoração: $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(3x - 1\right)^2$.

Concluímos também que a equação inicial $-9x^2 + 6x = 1$ tem uma única solução, no caso $x = 1/3$, pois é equivalente a equação $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Por sua vez, a expressão $-9x^2 + 6x - 1$ admite a seguinte fatoração: $-9x^2 + 6x - 1 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\left(3x - 1\right)^2$. O seu quadro de sinal é o quadro acima, trocando o sinal positivo pelo sinal negativo.

Apresentamos no quadro abaixo um resumo das conclusões obtidas sobre expressões do segundo grau.

$a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$			
Expressão do 2º grau: $ax^2 + bx + c$			
Equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$			
Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$			
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Raízes	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	sem raízes
Fatoração da expressão	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	
Sinal da expressão	$a > 0$: $+ + + +$ 0 (x_1) $- - - - - -$ 0 (x_2) $+ + + +$ $a < 0$: $- - - -$ 0 (x_2) $+ + + + + +$ 0 (x_1) $- - - -$	$a > 0$: $+ + +$ 0 (x_0) $+ + + +$ $a < 0$: $- - -$ 0 (x_0) $- - - -$	$a > 0$: $+ + + + + + + + +$ $a < 0$: $- - - - - - - -$

☛ **Nota:** Faz sentido falar no sinal da expressão $ax^2 + bx + c$ mas *não faz sentido falar no sinal da equação* $ax^2 + bx + c = 0$.

3.5 Equação do segundo grau e sistema de equações

Podemos transformar uma equação do segundo grau num sistema de equações a duas variáveis. Fazemos isso, da seguinte forma.

Sejam dados dois números reais $u\,,v \in \mathbb{R}$ quaisquer. Assim,

$$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv$$

ou seja, num trinômio da forma $x^2 - \boldsymbol{s}\,x + \boldsymbol{p}$ temos:

- ☛ o produto das raízes vale $\boldsymbol{p}$;
- ☛ a soma das raízes vale $\boldsymbol{s}$;

ou seja $\begin{cases} u+v = s \\ uv = p\,. \end{cases}$ $(*)$

Essa observação nos mostra que se $u = a$ e $v = b$ é solução de $(*)$ então $a\,,b$ são soluções de $x^2 - \boldsymbol{s}\,x + \boldsymbol{p}$. Algumas vêzes a solução do sistema $(*)$ pode ser feita mentalmente. Aliás, esse é o ponto que nos interessa nessa observação: encontrar as soluções da equação $x^2 - \boldsymbol{s}\,x + \boldsymbol{p}$ sem efetuar cálculos.

Exemplos

❄ Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ a soma das raízes vale 5 e o produto vale 6. Assim, as soluções $u\,,v$ do sistema a seguir são as soluções da equação dada:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u\,v = 6. \end{cases}$$

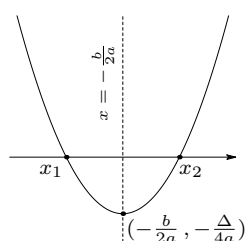
Resolvendo mentalmente esse sistema obtemos as soluções da equação, a saber: $u = 3$ e $v = 2$

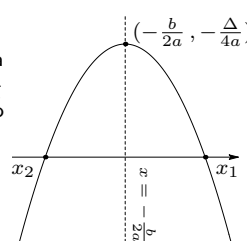
❄ Na equação $x^2 + 4x + 3 = 0$ a soma das raízes vale -4 e o produto vale 3. Resolvendo mentalmente o sistema associado obtemos as soluções da equação, a saber: -1 e -3.

3.6 Gráfico de uma expressão do segundo grau

O gráfico de uma expressão do segundo grau é uma curva chamada *parábola*. Exibiremos agora os modelos desses gráficos[5] nos casos em que as expressões possuem:

☞ Duas raízes reais distintas:

$E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $\Delta > 0$ e $a > 0$

A reta vertical tracejada de equação $x = -\frac{b}{2a}$ é o *eixo de simetria* do gráfico da expressão.

$E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $\Delta > 0$ e $a < 0$

Vimos que o gráfico de uma expressão do segundo grau tem a reta $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria. Além disso, sendo $\Delta > 0$, suas raízes tem a forma $-\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou seja, elas são simétricas em relação a esse eixo.

Vimos também que:

- *Quando* $\Delta > 0$ *e* $a > 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} < 0$;

- *Quando* $\Delta > 0$ *e* $a < 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} > 0$.

[5]Note que não faz sentido falar em gráfico de uma equação.

☞ Uma única raiz real:

$E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $\Delta = 0$ e $a > 0$

$E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $\Delta = 0$ e $a < 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$(-\frac{b}{2a}\,, 0\,)$

A reta vertical tracejada de equação $x = -\frac{b}{2a}$ é o *eixo de simetria* do gráfico da expressão.

$(-\frac{b}{2a}\,, 0\,)$

$x = -\frac{b}{2a}$

Aqui temos uma única raiz real dada por $x = -\frac{b}{2a}$. Além disso, segue da igualdade em (9.4) que:

- *Quando* $\Delta = 0$ *e* $a > 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a 0;

- *Quando* $\Delta = 0$ *e* $a < 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a 0.

☞ Sem raízes reais:

Aqui não temos raízes reais o que é refletido no fato que o gráfico da expressão não intersecta o eixo das abcissas. Além disso, temos também que:

- *Quando* $\Delta < 0$ *e* $a > 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *menor valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} > 0$;

- *Quando* $\Delta < 0$ *e* $a < 0$:

  A expressão $E(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ assume seu *maior valor* em $x = -\frac{b}{2a}$ e tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a} < 0$.

Exemplos

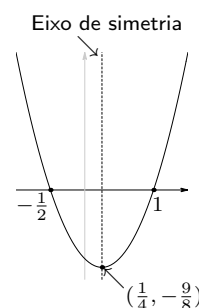
❄ As raízes do trinômio $2x^2 - x - 1$ são:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}\,.$$

Isto é, $x_1 = -1/2$ e $x_2 = 1$. Podemos também concluir que

$$2x^2 - x - 1 = 2\Big(x - 1\Big)\Big(x + \frac{1}{2}\Big) = (x-1)(2x+1)\,.$$

O sinal desse trinômio é mostrado no quadro a seguir.

sinal de
$+ + + +$ **0** $- - - - - -$ **0** $+ + + +$
$\mathbf{-1/2}$ $\mathbf{1}$ $2x^2 - x - 1$

Por outro lado, completando quadrado em $2x^2 - x - 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2\Big(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\Big) = 2\Big[\Big(x - \frac{1}{4}\Big)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\Big] \\ &= 2\Big[\Big(x - \frac{1}{4}\Big)^2 - \frac{9}{16}\Big] \end{aligned}$$

Segue daí que:

- a reta de equação $x = 1/4$ é o eixo de simetria do gráfico da expressão mostrado na figura acima ;
- o menor valor que a expressão assume é $-9/8$ o qual é assumido no ponto $1/4$.

❄ A equação $x^2 + x + 1 = 0$ não tem raízes (reais) pois $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Como o coeficiente to termo de segundo grau é positivo, o sinal do trinômio $x^2 + x + 1$ é sempre positivo.

Note que estamos falando do sinal do trinômio $x^2 + x + 1$ e não do sinal da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

sinal de
$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +$
$x^2 + x + 1$

❄ Os pontos onde a expressão $4x^2 - 12x + 9$ se anula são:

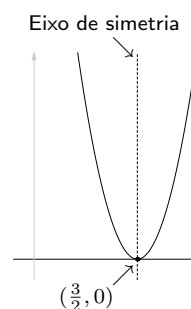
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{3}{2}\,.$$

Portanto, a expressão em estudo se anula em um único ponto. Ou seja, a equação $4x^2 - 12x + 9 = 0$ tem uma única solução, a saber, $3/2$.

Além disso, podemos escrever:

$$4x^2 - 12x + 9 = 4\Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2 = (2x - 3)^2 \tag{9.8}$$

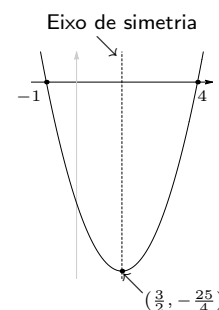
Conseqüentemente, temos a seguinte tabela de sinais:

De (9.8) concluímos que o menor valor que a expressão assume é zero e isso ocorre no ponto $3/2$. Seu eixo de simetria é a reta de equação $x = 3/2$. O gráfico dessa expressão é mostrado na figura ao lado.

❄ As raízes do trinômio $x^2 - 3x - 4$ são: $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$ pois $x_1 \times x_2 = -4$ e $x_1 + x_2 = 3$. Logo, temos a fatoração $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$ e o sinal desse trinômio é:

$++++$	$\mathbf{0}$	$------$	$\mathbf{0}$	$++++$	sinal de
	$\mathbf{-1}$		$\mathbf{4}$		$x^2 - 3x - 4$

Completanto quadrados na expressão $x^2 - 3x - 4$ obtemos:

$$x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Segue agora que o eixo de simetria é a reta de equação $x = 3/2$. O menor valor assumido por essa expressão é $-25/4$ e ocorre no ponto $3/2$. Seu gráfico é mostrado na figura ao lado.

❄ A expressão $-x^2 + 2x + 2$ se anula nos seguintes pontos:

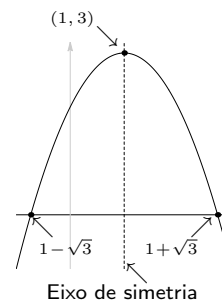
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 \mp \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{3}}{2} = 1 \mp \sqrt{3} = 1 \pm \sqrt{3}\,.$$

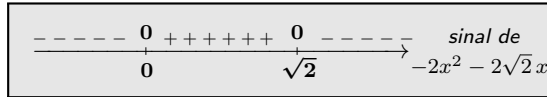
Assim sendo, podemos escrever a fatoração: $-x^2 + 2x + 2 = -\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)$ e temos o seguinte quadro de sinais.

$----$	$\mathbf{0}$	$++++++$	$\mathbf{0}$	$----$	sinal de
	$\mathbf{1 - \sqrt{3}}$		$\mathbf{1 + \sqrt{3}}$		$-x^2 + 2x + 2$

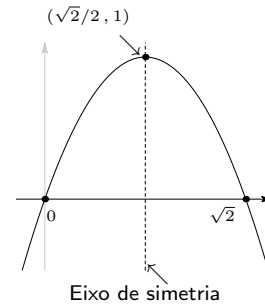
Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 2 &= -(x^2 - 2x - 2) \\ &= -[(x-1)^2 - 1 - 2] = -[(x-1)^2 - 3] \\ &= -(x-1)^2 + 3\,. \end{aligned}$$

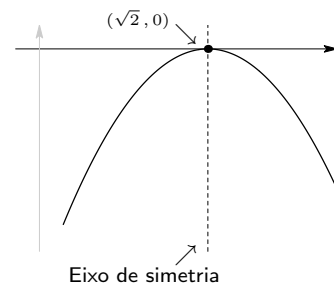
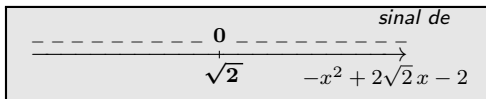
Conseqüentemente, o eixo de simetria é a reta de equação $x = 1$. Além disso, o maior valor que a expressão assume é 3 e isso ocorre no ponto 1. Seu gráfico é mostrado na figura ao lado.

❄ Considere a expresssão $-2x^2 + 2\sqrt{2}\,x$. Temos que $-2x^2 + 2\sqrt{2}\,x = 2x\,(\sqrt{2} - x)$ o que nos garante

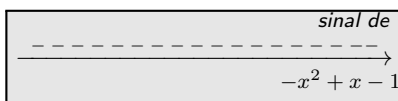
que os pontos onde a expressão se anula são: 0 e $\sqrt{2}$. O sinal dessa expressão é mostrado na figura a seguir.

Por outro lado, completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2\sqrt{2}\,x &= -(2x^2 - 2\sqrt{2}\,x) \\ &= -[(\sqrt{2}\,x - 1)^2 - 1] = -(\sqrt{2}\,x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

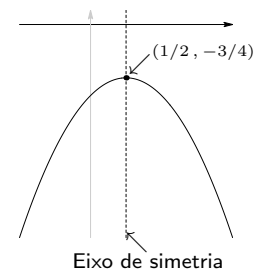
Conseqüentemente, o eixo de simetria é a reta de equação $\sqrt{2}\,x = 1$. O maior valor que a expressão assume é 1 e isso ocorre no ponto $1/\sqrt{2}$. Na figura ao lado exibimos o gráfico da expressão.

❄ Completando quadrado na expressão $-x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2$ obtemos:

$$-x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2 = -(x - \sqrt{2})^2\,. \tag{9.9}$$

Concluímos daí que a referida expressão se anula somente no ponto $\sqrt{2}$. Como o coeficiente do termo de segundo grau é negativo, o sinal da expressão $-x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2$ é:

Além disso, concluímos de (9.9) que o maior valor assumido por essa expressão ocorre em $\sqrt{2}$ e vale zero. O eixo de simetria do gráfico dessa expressão é a reta de equação $x = \sqrt{2}$.

❄ A expressão $-x^2 + x - 1$ não se anula pois o seu discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3 < 0$. Como o coeficiente to termo de segundo grau é negativo, o sinal dessa expressão é:

Completanto quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} -x^2 + x - 1 &= -(x^2 - x + 1) \\ &= -\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} + 1\Big] = -\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Logo, a expressão em questão assume seu maior valor no ponto $1/2$ e esse valor é $-3/4$.

4 Mudança de variável

Considere a equação

$$(x^2-1)^2 = 3\,. \tag{9.10}$$

Vamos simplificar essa equação escrevendo-a em termos de uma *nova variável* y. Para isso, precisamos dizer qual a relação entre y e x. Além disso, precisamos de uma relação que, de fato, simplifique a equação. Vamos descobrí-la, claro, na própria equação.

Coloquemos então a seguinte relação entre y e x:

$$y = x^2 - 1\,. \tag{9.11}$$

A equação inicial, descrita em termos da nova variável y, toma a forma:

$$y^2 = 3 \tag{9.12}$$

a qual sabemos resolver, com facilidade: $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$.

Acabamos de resolver a equação (9.10), só que a solução está descrita em termos da nova variável y. Precisamos agora expressar essas soluções em termos da variável x usando a fórmula (9.11), dita *fórmula de mudança de variável* para a equação em questão.

Para finalizar a solução do problema, precisamos executar dois passos.

- ☞ **Passo 1:** para $y = \sqrt{3}$.

  Nesse caso temos:

  $\sqrt{3} = x^2 - 1 \iff x^2 = \sqrt{3} + 1 \iff x = \pm\sqrt{\sqrt{3}+1}\,.$

- ☞ **Passo 2:** para $y = -\sqrt{3}$.

  Nesse caso teremos: $-\sqrt{3} = x^2 - 1 \iff x^2 = -\sqrt{3} + 1 < 0\,.$

  Isso significa que não temos soluções da equação (9.10) relacionadas a $y = -\sqrt{3}$.

Resulta então que o conjunto solução da equação (9.10) é:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{\sqrt{3}+1}\ ,\ \sqrt{\sqrt{3}+1} \right\}.$$

Exercícios resolvidos

1. **Determine o valor de b sabendo que a média aritmética entre b , 12 e 7 vale 15.**

Solução Da definição de média aritmética[6] temos que

$$\frac{b+12+7}{3}=15 \iff b+19=45 \iff b=26\,.$$

2. **Se a soma de quatro múltiplos consecutivos de 3 vale x , quanto vale em termos de x, o menor desses números ?**

Solução Seja p o menor desses múltiplos de 3. Assim,

$$p+(p+3)+(p+6)+(p+9)=x \iff 4p=x-18 \iff p=\frac{x-18}{4}\,.$$

3. **Resolva as equações**

(a) $\boldsymbol{2x+1=7}$ **(b)** $\boldsymbol{2(x-1)=3(2-x)}$ **(c)** $\boldsymbol{\dfrac{2x-3}{1-x^2}=0}$ **.**

Solução Temos que:

(a) $2x+1=7 \iff 2x=6 \iff x=3 \quad \therefore \quad \mathcal{S}=\{3\}$.

(b) $2(x-1)=3(2-x) \iff 2x-2=6-3x \iff 5x=8 \iff x=8/5 \quad \therefore \quad \mathcal{S}=\{8/5\}$.

(c) Começamos determinando os pontos onde o numerador da expressão se anula. Temos então:

$$2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=3/2\,.$$

Por outro lado, nesse ponto o denominador da expressão não se anula. Portanto, $\mathcal{S}=\{3/2\}$.

4. **Determine a expressão da média aritmética entre os números reais x , 5 , 11 e 4 e mostre que ela é uma expressão do primeiro grau na variável x.**

Solução Da definição de média aritmética segue que sua expressão é dada, nesse caso, por:

$$\frac{x+5+11+4}{4}=\frac{1}{4}x+5\,.$$

Assim, a expressão procurada é $\frac{1}{4}x+5$ a qual é uma expressão do primeiro grau.

[6] A média aritmética de $a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n$ é definida por $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ onde n é um inteiro positivo.

5. **Volte ao exercício acima e determine os valores de x para os quais média aritmética:**
   - **é nula ;**
   - **é positiva ;**
   - **é negativa.**

Solução Vimos no exercício anterior que a média aritmética tem a expressão $\frac{1}{4}x + 5$ a qual:

- *se anula quando*:
  $\frac{1}{4}x + 5 = 0 \iff \frac{1}{4}x = -5 \iff x = -20\,;$
- *é positiva quando*:
  $\frac{1}{4}x + 5 > 0 \iff \frac{1}{4}x > -5 \iff x > -20\,;$
- *é negativa quando*:
  $\frac{1}{4}x + 5 < 0 \iff \frac{1}{4}x < -5 \iff x < -20\,.$

6. **Uma quantia Q em reais deve ser distribuída entre três pessoas. A primeira delas recebe $2/5$ dessa quantia, a segunda recebe $62{,}5\%$ do que recebeu a primeira e o restante foi dado a terceira pessoa. Sabendo que essa última recebeu 350 reais, determine a quantia Q e quanto recebeu as duas primeiras pessoas.**

Solução A primeira pessoa recebeu $\frac{2}{5}Q$. A segunda recebeu $62{,}5\%$ de $\frac{2}{5}Q$, ou seja, $\frac{62{,}5}{100}\left(\frac{2}{5}Q\right)$.

Resulta então que:

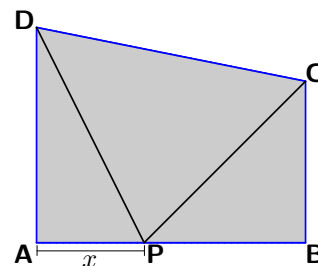
$$\frac{2}{5}Q + \frac{62{,}5}{100}\left(\frac{2}{5}Q\right) + 350 = Q \iff \frac{2}{5}Q + \frac{1}{4}Q + 350 = Q \iff Q - \frac{2}{5}Q - \frac{1}{4}Q = 350$$

$$\iff \frac{20-8-5}{20}Q = 350 \iff Q = \frac{350 \times 20}{7} = 1000\,.$$

Consequentemente:

☛ $Q = 1000\,reais\,;$ ☛ A primeira pessoa recebeu: $\frac{2}{5} \times 1000 = 400\,reais\,;$

☛ A segunda pessoa recebeu: $1000 - 400 - 350 = 250\,reais.$

7. **O trapézio $ABCD$ é retângulo em A e B, e P é um ponto do lado AB como mostrado na figura ao lado. Sabendo que $AB = 5$, $BC = 3$, $AD = 4$ e que o comprimento do segmento AP vale x, determine:**
   (a) **o intervalo de variação de x ;**
   (b) **a área do triângulo APD ;**
   (c) **a área do triângulo PBC ;**
   (d) **a área do triângulo PCD ;**
   (e) **e mostre que as expressões das áreas dos triângulos acima são expressões do primeiro grau.**

Solução

(a) Como $AB = 5$ segue que o intervalo de variação de x é o intervalo $[0, 5]$.

Note que as áreas dos triângulos **APD**, **PBC** e **PCD** dependem[7] da posição do ponto **P**, isto é, dependem da variável $x \in [0, 5]$. Note também que para $x = 0$ temos uma situação degenerada, pois nesse caso, **APD** não é um triângulo já que o lado **AP** se reduz a um ponto. Situação semelhante ocorre com **PBC** quando $x = 5$: o lado **PB** se reduz a um ponto

(b) A área do triângulo **APD** vale: $\dfrac{4x}{2} = 2x$. **(c)** A área do triângulo **PBC** vale: $\dfrac{3(5-x)}{2}$.

(d) A área do triângulo **PCD** é a diferença entre a área do trapézio e as áreas dos outros dois triângulos. Para isso precisamos calcular a área do trapézio.

Área do trapézio: $5 \times 3 + \dfrac{5 \times (4-3)}{2} = \dfrac{30}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{35}{2}$.

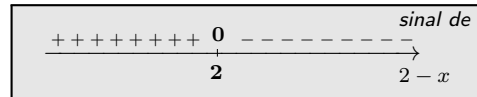
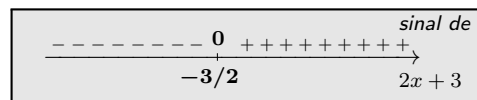
Conseqüentemente, a área do triângulo **PCD** será: $\dfrac{35}{2} - \dfrac{4x}{2} - \dfrac{15-3x}{2} = \dfrac{20-x}{2}$.

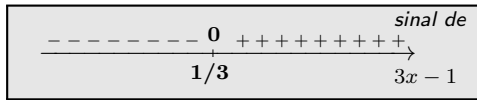
(e) As expressões das áreas dos triângulos acima são: $2x$, $-\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$, $-\dfrac{1}{2}x + 10$, as quais são expressões do primeiro grau.

8. Estude o sinal das expressões:

(a) $\mathbf{2 - x}$ **(b)** $\mathbf{2x + 3}$ **(c)** $\mathbf{3x - 1}$.

Solução Note que essas expressões são todas do primeiro grau. Vamos então usar as regras que construímos na página 149.

(a) Temos que: $2 - x = 0 \iff x = 2$.
Como o coeficiente do termo de primeiro grau é negativo, segue o seguinte quadro de sinais para $2 - x$:

(b) Temos que: $2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$.
Como o coeficiente do termo de primeiro grau é positivo, temos o seguinte quadro de sinais para $2 - x$:

sinal de
− − − − − − − − 0 + + + + + + + + +
−3/2
2x + 3

(c) Temos que: $3x - 1 = 3(x - \frac{1}{3})$.
Portanto, a expressão é positiva à direta de $1/3$, é negativa à esquerda e nula em $x = 1/3$.

sinal de
− − − − − − − − 0 + + + + + + + + +
1/3
3x − 1

9. Estude o sinal das expressões:

(a) $\mathbf{2|x| - 5}$ **(b)** $\mathbf{3 - 5|x|}$.

[7]Note que, mesmo antes de calcular a área do triângulo **APD** podemos concluir que sua área *tende* à zero a medida que **P** se aproxima de **A**. Essa informação estará contida na expressão da área do referido triângulo. O mesmo vale para o triângulo **PBC** quando **P** se aproxima de **B**.

Solução Note que essas expressões não são do primeiro grau na variável x. Sendo assim, não podemos aplicar as regras construídas na página 149. No entanto, vamos voltar à página 149 e fazer algo semelhante ao que fizemos lá para estudar o sinal dessas novas expressões.

(a) Temos que: $2|x| - 5 = 2(|x| - 5/2)$.

Essa expressão se anula em:

$$|x| - 5/2 = 0 \iff |x| = 5/2 \iff x = \pm 5/2 .$$

Ela será positiva quando:

$$|x| - 5/2 > 0 \iff |x| > 5/2 \iff x \in (-\infty, -5/2) \cup (5/2, \infty) .$$

Ela será negativa quando:

$$|x| - 5/2 < 0 \iff |x| < 5/2 \iff x \in (-5/2, 5/2) .$$

Seu quadro de sinais é então o seguinte:

sinal de $2|x| - 5$: + + + + + **0** − − − − − − **0** + + + + +, com zeros em $-5/2$ e $5/2$.

(b) Temos que: $3 - 5|x| = -5(|x| - 3/5)$.

Da simplificação acima, concluímos que a expressão $3 - 5|x|$ se anula em:

$$|x| - 3/5 = 0 \iff |x| = 3/5 \iff x = \pm 3/5 .$$

Ela será positiva quando:

$$|x| - 3/5 < 0 \iff |x| < 3/5 \iff x \in (-3/5, 3/5) .$$

Ela será negativa quando:

$$|x| - 3/5 > 0 \iff |x| > 3/5 \iff x \in (-\infty, -3/5) \cup (3/5, \infty) .$$

Logo, seu quadro de sinais é o seguinte:

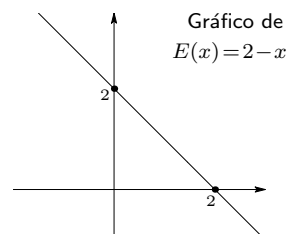
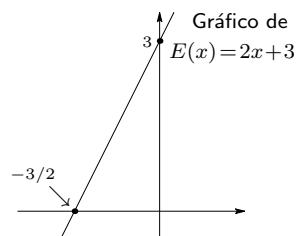
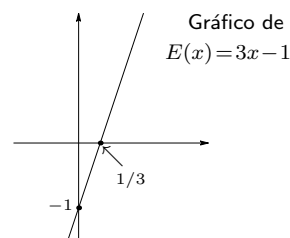
sinal de $3 - 5|x|$: − − − − − **0** + + + + + + **0** − − − − −, com zeros em $-3/5$ e $3/5$.

☛ **Nota:** Não pudemos aplicar a regra da página 149 mas resolvemos a questão usando o processo que nos levou a tal regra. Isso nos mostra que além das regras, é importante conhecer o processo usado para obtê-las pois ele pode nos ajudar a resolver questões às quais a regra não se aplica, como no presente caso.

10. Esboce o gráfico das seguintes expressões indicando os pontos onde o gráfico intersecta o eixos das abcissas e o eixo das ordenadas.

(a) $\mathbf{2 - x}$ **(b)** $\mathbf{2x + 3}$ **(c)** $\mathbf{3x - 1}$ **.**

Solução No exercício 8, determinamos os pontos onde tais expressões se anulam. Agora vamos usar as informações que obtivemos na página 149 para esboçar seus respectivos gráficos.

(a) Como a expressão $E(x) = 2 - x$ se anula em $x = 2$ segue que seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(2, 0)$. Por outro lado, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 2$.
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(0, 2)$. Conseqüentemente, o gráfico da expressão é a reta mostrada na figura ao lado.

(b) A expressão $E(x) = 2x + 3$ se anula em $x = -3/2$. Logo, seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(-3/2, 0)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 3$.
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(0, 3)$. Conseqüentemente, o gráfico da expressão é a reta mostrada na figura ao lado.

(c) A expressão $E(x) = 3x - 1$ se anula em $x = 1/3$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas no ponto $(1/3, 0)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = -1$.
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(0, -1)$. O gráfico dessa expressão é a reta mostrada na figura ao lado.

11. **Esboce o gráfico das seguintes expressões indicando os pontos onde o gráfico intersecta o eixos das abcissas e o eixo das ordenadas.**

(a) $\mathbf{2|x| - 5}$ **(b)** $\mathbf{3 - 5|x|}$ **.**

Solução Já observamos que tais expressões não são do primeiro grau. Logo, não podemos aplicar diretamente o processo do exercício anterior. Vamos, primeiramente, analizar essas expressões para $x > 0$ e $x < 0$.

(a) Vimos no exercício 9 que a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ se anula em $x = \pm 5/2$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos $(-5/2, 0)$ e $(5/2, 0)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = -5$.

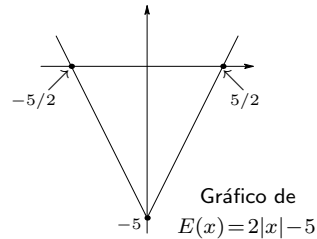
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(0, -5)$.

Para esboçar o gráfico dessa expressão precisamos analizá-la em intervalos onde ela coincide com uma expressão do primeiro grau. Para isso, consideremos os dois casos:

Caso 1: $x \geq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ toma a forma

$$E(x) = 2|x| - 5 = 2x - 5\,.$$

Caso 2: $x \leq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 2|x| - 5$ toma a forma

$$E(x) = 2|x| - 5 = -2x - 5\,.$$

Logo, sabemos esboçar o gráfico da expressão em estudo: é o gráfico de $-2x-5$ quando $x \leq 0$ seguido do gráfico de $2x - 5$ quando $x \geq 0$. Esse gráfico é mostrado na figura acima.

(b) Vimos que a expressão $E(x) = 3-5|x|$ se anula em $x = \pm 3/5$. Assim, seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos $(-3/5\,,0)$ e $(3/5\,,0)$. Além disso, no ponto $x = 0$ a expressão vale: $E(0) = 3$.

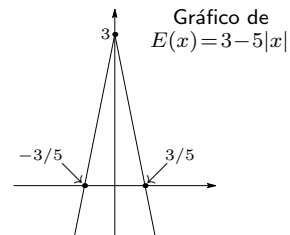
Logo, o eixo das ordenadas será cortado pelo gráfico da expressão no ponto $(0\,,3)$.

Para esboçar o gráfico dessa expressão precisamos analizá-la em intervalos onde ela tem a forma de uma expressão do primeiro grau. Para isso, consideremos os dois casos:

Caso 1: $x \geq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 3 - 5|x|$ toma a forma

$$E(x) = 3 - 5|x| = 3 - 5x\,.$$

Caso 2: $x \leq 0$.
Nessa condição a expressão $E(x) = 3 - 5|x|$ toma a forma

$$E(x) = 3 - 5|x| = 3 + 5x\,.$$

Novamente, sabemos esboçar o gráfico da expressão em estudo: é o gráfico de $3 + 5x$ quando $x \leq 0$ seguido do gráfico de $3 - 5x$ quando $x \geq 0$. Esse gráfico é mostrado na figura acima.

12. **Considere as expressões:**

(a) $\mathbf{2 - x - x^2}$ **(b)** $\mathbf{x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2}$ **(c)** $\mathbf{-x + 1 + x^2}$ **(d)** $\mathbf{3 + x + 2x^2}$**.**

Determine:
(1) O coeficiente do termo de segundo grau;
(2) O coeficiente do termo de primeiro grau;
(3) O termo independente;
(4) O discriminante;
(5) O número de raízes (reais), caso existam.

Solução Temos que:

(a) (1) o coeficiente do termo de segundo grau é -1;
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é -1;
(3) o termo independente vale 2;
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$;
(5) a expressão tem duas raízes reais distintas.

(b) (1) o coeficiente do termo de segundo grau é 1;
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau vale $-2\sqrt{2}$;
(3) o termo independente vale 2.
(4) o discriminante $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0$;
(5) a expressão tem um único zero.

(c) (1) o coeficiente do termo de segundo grau é 1;
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é -1;
(3) o termo independente é 1;
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$;
(5) a expressão não tem raízes (reais).

(d) (1) o coeficiente do termo de segundo grau é 2;
(2) o coeficiente do termo de primeiro grau é 1;
(3) o termo independente vale 3;
(4) o discriminante $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$;
(5) a expressão não tem raízes (reais).

13. **Resolva a equação $\boldsymbol{2 - 3x = 2x^2}$.**

Solução Para isso, devemos resolver a equação $2 - 3x - 2x^2 = 0$.
As soluções são:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times 2}}{2 \times (-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = -\frac{3 \pm 5}{4} \quad \therefore \quad \mathcal{S} = \big\{-2\,, 1/2\big\}\,.$$

14. **Fatore as expressões:**
(a) $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 2}$ **(b)** $\boldsymbol{9x^2 + 12x + 4}$ **(c)** $\boldsymbol{x^2 + (2 - a)x - 2a}$ **onde** $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ **.**

Solução Analizemos o discriminante desses trinômios.

(a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$. Assim, as raízes são

$$\lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \quad \iff \quad \lambda = 2 \;\text{ ou }\; \lambda = -1/2$$

e temos a decomposição $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x + \frac{1}{2}) = (x - 2)(2x + 1)$.

(b) $\Delta = (12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$. Logo, a raíz será $\lambda = -\frac{12}{2\times 9} = -2/3$. Nesse caso temos a seguinte decomposição:

$$9x^2 + 12x + 4 = 9\Big(x + \frac{2}{3}\Big)^2 = (3x + 2)^2\,.$$

(c) $\Delta = (2-a)^2 - 4\times(-2a) = (2-a)^2 + 8a = a^2 - 4a + 4 + 8a = (a+2)^2$. As raízes da equação são:

$$\lambda = \frac{-(2-a) \pm \sqrt{(a+2)^2}}{2} = \frac{(a-2) \pm |a+2|}{2} = \frac{(a-2) \pm (a+2)}{2}\,,\ \text{isto é,}$$

$$\lambda = \frac{(a-2)+(a+2)}{2} = a \ \text{ ou } \ \lambda = \frac{(a-2)-(a+2)}{2} = -2\,.$$

Assim, a fatoração toma a forma $x^2 + (2-a)x - 2a = (x-a)(x+2)$.

☛ **Nota:** Cuidado !! Repare que na solução acima trocamos $\pm|a+2|$ por $\pm(a+2)$. Isso é possivel por causa da igualdade: $\{|a+2|\,,-|a+2|\} = \{a+2\,,-(a+2)\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Igualmente temos: $\{|x|\,,-|x|\} = \{x\,,-x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Também podemos observar que a soma das raízes vale $a-2$ e o produto vale $-2a$. Logo, as raízes são -2 e a !!

15. Fatore as expressões a seguir sem fazer cálculos:

(a) $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}$ **(b)** $\boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$ **(c)** $\boldsymbol{x^2 + x - 6}$ **.**

Solução Temos que:

(a) A soma das raízes vale 5 e o produto vale 6. Logo, as raízes são: 2 e 3 e a fatoração é dada por: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

(b) A soma das raízes vale -4 e o produto vale 4. Logo, as raízes são: -2 e -2 e a fatoração é dada por: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2) = (x+2)^2$.

(c) A soma das raízes vale -1 e o produto vale -6. Logo, as raízes são: -3 e 2 e a fatoração é dada por: $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$.

16. Considere as expressões:

(1) $\boldsymbol{x^2 - x - 2}$ **(2)** $\boldsymbol{-x^2 - x + 2}$ **(3)** $\boldsymbol{x^2 - 3x + 9/4}$ **(4)** $\boldsymbol{-x^2 - x - 1}$ **.**

Para cada uma delas :

(a) Determine o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas ;
(b) Complete quadrado para colocá-la na forma $\boldsymbol{a(x+b)^2 + c}$ **;**
(c) Determine o eixo de simetria do gráfico ;
(d) Determine os pontos onde a expressão se anula ;
(e) Determine o menor ou maior valor, conforme o caso, que essa expressão assume e exiba o ponto do domínio onde isso ocorre ;
(f) Esboce o gráfico dessa expressão, indicando os pontos onde ela se anula, seu eixo de simetria e o menor ou maior valor assumido pela expressão.

Solução

(1.a) Consideremos a expressão $E(x) = x^2 - x - 2$. Temos que $E(0) = -2$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0\,,-2)$.

(1.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = x^2 - x - 2 = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{9}{4} \tag{9.13}$$

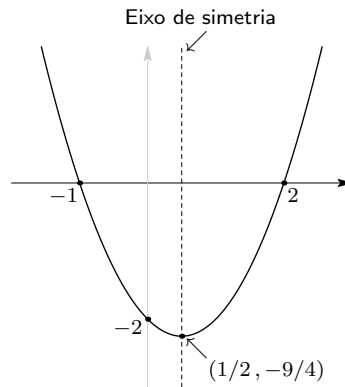
(1.c) Concluímos de (9.13) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x - 1/2 = 0 \iff x = 1/2$.

(1.d) Ainda de (9.13) resulta que:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 = 0 &\iff \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{9}{4} = 0 \iff \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \iff x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2 . \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas nos pontos: -1 e 2 .

(1.e) Voltando a (9.13) concluímos que o menor valor que a expressão pode assumir é $-9/4$ e isso ocorre no ponto $1/2$ já que a parcela $(x - 1/2)^2 \geq 0$ e só se anula em $1/2$.

(1.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura a seguir.

(2.a) Para a expressão $E(x) = -x^2 - x + 2$ temos que $E(0) = 2$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0, 2)$.

(2.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2) = -\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} - 2\Big] = -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} \tag{9.14}$$

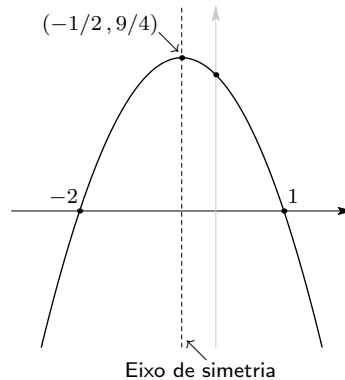
(2.c) Feito isso, concluímos de (9.14) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x + 1/2 = 0 \iff x = -1/2$.

(2.d) Ainda de (9.14) resulta que:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 1\,. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas nos pontos: -2 e 1.

(2.e) Voltando a (9.14) concluímos que o maior valor que a expressão pode assumir é $9/4$ e isso ocorre no ponto $-1/2$ já que a parcela $-(x + 1/2)^2 \leq 0$ e só se anula em $-1/2$.

(2.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura a seguir.

(3.a) Na expressão $E(x) = x^2 - 3x + 9/4$ temos que $E(0) = 9/4$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(\,0\,,9/4\,)$.

(3.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = x^2 - 3x + 9/4 = \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2. \tag{9.15}$$

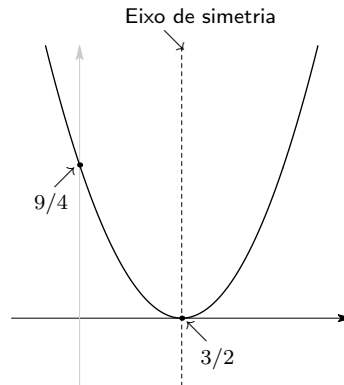
(3.c) Assim, concluímos de (9.15) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x - 3/2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3/2$.

(3.d) Ainda de (9.15) resulta que:

$$x^2 - 3x + 9/4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(x - \frac{3}{2}\Big)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3/2\,.$$

Portanto, a expressão em estudo se anula apenas no ponto: $3/2$.

(3.e) Voltando a (9.15) concluímos que o menor valor que a expressão pode assumir é *zero* e isso ocorre no ponto $3/2$ já que $(x - 3/2)^2 \geq 0$ e só se anula em $3/2$.

(3.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura a seguir.

(4.a) Consideremos a expressão $E(x) = -x^2 - x - 1$. Temos que $E(0) = -1$. Logo, seu gráfico intersectará o eixo das ordenadas no ponto $(0, -1)$.

(4.b) Completando quadrado, obtemos:

$$E(x) = -x^2 - x - 1 = -(x^2 + x + 1) = -\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} + 1\Big] = -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4} \tag{9.16}$$

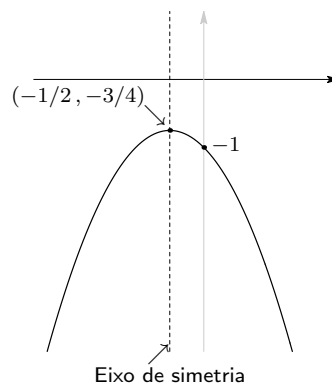
(4.c) Feito isso, concluímos de (9.16) que o eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo é a reta vertical de equação: $x + 1/2 = 0 \iff x = -1/2$.

(4.d) Ainda de (9.16) resulta que:

$$-x^2 - x - 1 = 0 \iff -\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4} = 0 \iff \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 = -\frac{3}{4}$$

o que nos garante que a expressão em estudo não se anula.

(4.e) Voltando a (9.16) concluímos que o maior valor que a expressão pode assumir é $-3/4$ e isso ocorre no ponto $-1/2$ já que a parcela $-(x + 1/2)^2 \leq 0$ e só se anula em $-1/2$.

(4.f) De posse desses resultados podemos esboçar o gráfico da parábola correspondente, o qual é mostrada na figura a seguir.

17. Faça o gráfico da expressão $x|x| - |x| + x - 1$.

Solução Para analizar essa expressão vamos considerar dois casos.

Caso 1: $x \geq 0$.

Nesse caso a expressão toma a forma

$$x|x| - |x| + x - 1 = x^2 - 1\,. \tag{9.17}$$

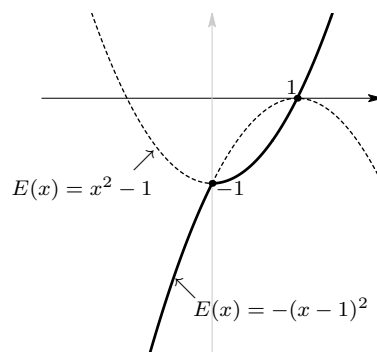
Assim, para $x \geq 0$ o gráfico da expressão inicial é o gráfico de $x^2 - 1$ o qual sabemos desenhar.

Caso 2: $x \leq 0$.

Nesse caso a expressão toma a forma

$$x|x| - |x| + x - 1 = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2\,. \tag{9.18}$$

Assim, para $x \leq 0$ o gráfico da expressão inicial é o gráfico de $-(x-1)^2$ o qual sabemos esboçar.

Juntando esses dois gráficos obtemos o gráfico da expressão desejada. Note que a parte tracejada não faz parte do gráfico da expressão inicial. Ela serve apenas para ajudar a vizualizar as parábolas envolvidas no gráfico da expressão inicial, a qual é desenhada em traço contínuo.

18. Um trinômio do segundo grau possui termo independente nulo. Determine a forma desse trinômio sabendo que ele também possui -1 como raíz.

Solução Um trinômio do segundo grau é uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$. Como o termo independe se anula, sua forma se reduz a: $ax^2 + bx = x(ax + b)$. Como $x = -1$ é raíz, segue que:

$$(-1)\big(a \times (-1) + b\big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b\,.$$

Assim, o trinômio em questão, tem a forma $ax(x+1)$ onde $a \neq 0$.

19. Construa uma expressão do segundo grau cujas raízes são 1 e π.

Solução A expressão $(x-1)(x-\pi)$ é uma expressão do segundo grau pois é da forma $x^2 - (1+\pi)x + \pi$ e possui $x = 1$ e $x = \pi$ como raízes.

20. Considere uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$ onde $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Suponha que essa expressão nunca se anula. Pergunta-se: a expressão será positiva quando $c > 0$ e será negativa quando $c < 0$?

Solução Vimos que uma expressão do segundo grau que nunca se anula ou é sempre positiva, ou é sempre negativa e que o sinal pode ser obtido avaliando-se essa expressão em algum ponto conveniente da reta, por exemplo, o ponto $x = 0$. E nesse ponto a expressão em questão vale c.

Assim, quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, podemos concluir que:

- $ax^2 + bx + c$ será positivo para todo x real quando $c > 0$;
- $ax^2 + bx + c$ será negativo para todo x real quando $c < 0$;

respondendo positivamente a questão colocada.

☛ **Nota:** Quando $\Delta < 0$ o termo independente c não pode ser nulo. Quando o termo independente se anula o trinômio tem pelo menos $x = 0$ como raiz pois sua expressão toma a forma $ax^2 + bx$.

21. Descreva todos os polinômios de grau 2 que têm a seguinte propriedade: uma das raízes é o inverso da outra.

Solução Seja λ um número real não nulo. Precisamos descrever os polinômios $p(x)$ de grau 2 que possuem λ e $1/\lambda$ como raízes. Resulta então que

$$p(x) = a\,(x - \lambda)(x - 1/\lambda) \quad \text{onde} \quad a\,, \lambda \neq 0\,.$$

A expressão acima descreve todos os trinômios do segundo grau que possuem a propriedade requerida.

22. Resolva a equação $x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

Solução A equação acima não é uma equação do segundo grau pois não é da forma (9.3).

No entanto, como $x^2 = |x|^2$, ela pode ser escrita da seguinte maneira:

$$|x|^2 - 3|x| + 1 = 0\,. \tag{9.19}$$

Fazendo a mudança de variável $y = |x|$, a equação (9.19) toma a forma de uma equação do segundo grau, a saber:

$$y^2 - 3y + 1 = 0\,. \tag{9.20}$$

Suas soluções são:

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Para voltar a equação inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Assim,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = |x| \iff x = \pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Passo 2: $y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Assim,

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = |x| \iff x = \pm\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

☛ **Nota:** Observe que $3-\sqrt{5} > 0$. Conseqüentemente, a equação $|x| = (3-\sqrt{5})/2$ tem soluções.

23. Fatore as expressões

(a) $x^2 - 3|x| + 2$ **(b)** $|x|^3 + x^2 - 6|x|$.

Solução Primeiramente observemos que:

$$x^2 - 3|x| + 2 = |x|^2 - 3|x| + 2 \quad \text{e} \quad |x|^3 + x^2 - 6|x| = |x|^3 + |x|^2 - 6|x|\,.$$

Assim, fazendo $y = |x|$, obtemos:

(a) $x^2 - 3|x| + 2 = y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1) = (|x|-2)(|x|-1)$.

Conseqüentemente, $x^2 - 3|x| + 2 = (|x|-2)(|x|-1)$.

(b) $|x|^3 + x^2 - 6|x| = y^3 + y^2 - 6y = y(y^2 + y - 6) = y(y+3)(y-2) = |x|(|x|+3)(|x|-2)$.

Logo, $|x|^3 + x^2 - 6|x| = |x|(|x|+3)(|x|-2)$.

24. Determine as soluções da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = x^2$ transformamos a equação inicial na seguinte equação do segundo grau:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

cujas soluções são: $y = 3$; $y = 2$. Voltando à variável inicial, teremos:

Passo 1: $y = 3$.

$3 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

Passo 2: $y = 2$.

$2 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

Finalizando, concluímos que $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

25. Determine qual deve ser o valor de λ para que a dízima periódica $1{,}2888\ldots$ seja solução da equação $45x^2 + (45-\lambda)x - \lambda = 0$.

Solução Primeiramente, vamos determinar a geratriz da dízima periódica $1{,}2888\ldots$
Para isso, seja: $z = 1{,}2888\ldots$
Assim, $10\,z = 12{,}888\ldots$ e $100\,z = 128{,}888\ldots$ donde obtemos:

$$\begin{aligned} 100\,z - 10\,z &= 128{,}888\ldots - 12{,}888\ldots = 128 + 0{,}888\ldots - (12 + 0{,}888\ldots) \\ &= 128 + 0{,}888\ldots - 12 - 0{,}888\ldots = 128 - 12 = 116 = 2^2 \times 29. \end{aligned}$$

Resulta daí que:

$$90\,z = 2^2 \times 29 \iff z = \frac{2^2 \times 29}{90} = \frac{2^2 \times 29}{3^2 \times 2 \times 5} = \frac{58}{45}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $58/45$. Assim sendo, para que $1{,}2888\ldots$ seja solução de $45x^2 + (45 - \lambda)x - \lambda = 0$ devemos ter:

$$\begin{aligned} 45\Big(\frac{58}{45}\Big)^2 + (45 - \lambda)\frac{58}{45} - \lambda = 0 \quad &\iff \quad 45\Big(\frac{58}{45}\Big)^2 + 45\frac{58}{45} = \lambda\frac{58}{45} + \lambda \\ &\iff \quad 45 \times \frac{58}{45} \times \Big(\frac{58}{45} + 1\Big) = \Big(\frac{58}{45} + 1\Big)\lambda \\ &\iff \quad \lambda = 58 \end{aligned}$$

mostrando assim que o valor procurado é $\lambda = 58$.

26. Determine para quais valores de x a expressão $2x - \sqrt{x}$ assume o valor 2.

Solução Para isso devemos resolver a equação

$$2x - \sqrt{x} = 2. \tag{9.21}$$

Façamos a mudança de variável $y = \sqrt{x}$. Nesse caso, a equação acima toma a forma

$$2y^2 - y - 2 = 0$$

cujas soluções são:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2 \times 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Agora, façamos:

Passo 1: $y = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$.

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{4} = \sqrt{x} \iff x = \Big(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\Big)^2.$$

Passo 2: $y = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$.

$\dfrac{1 - \sqrt{17}}{4} = \sqrt{x}$. No entanto, $\dfrac{1 - \sqrt{17}}{4} < 0$. Isso significa que a equação (9.21) não tem soluções associadas ao valor $y = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução da equação proposta é $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^2 \right\}$.

27. **Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{2-x}{x^4 - x^3 - 2x^2}$ e os pontos onde ela se anula.**

Solução Para conhecer o domínio da expressão precisamos determinar quando $x^4 - x^3 - 2x^2$ se anula. Temos que:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2) = x^2(x-2)(x+1)\,.$$

Conseqüentemente, o denominador da expressão se anula apenas em $\{0\,,-1\,,2\}$. Além disso, o numerador da expressão está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, o domínio de definição da expressão proposta é o conjunto $\mathbb{R} - \{2\,,0\,,-1\}$.

O numerador da expressão dada só se anula em $x = 2$ mas nesse ponto a expressão não está definida. Concluímos então que a expressão em questão nunca se anula em seu domínio de definição.

28. **Calcule as dimensões do retângulo cuja área vale $3\,m^2$ sabendo que um dos lados excede o outro de $1\,m$.**

Solução Seja x o lado menor do retângulo, dado em metros. Assim, o lado maior vale $x+1$ metros. Afirmar que a área do retângulo vale $3\,m^2$ é o mesmo que afirmar

$x\,(x+1) = 3$ | x
$x+1$

$$x\,(x+1) = 3\,.$$

Resolvendo essa equação obtemos:

$$x(x+1) = 3 \iff x^2 + x - 3 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

obtendo as soluções: $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} > 0$ e $-\dfrac{\sqrt{13}+1}{2} < 0$.

Conseqüentemente, as dimensões do retângulo são:

o lado menor mede $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\,m$ e o lado maior mede $1 + \dfrac{\sqrt{13}-1}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{\sqrt{13}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\,m$.

29. **Por ocasião de uma maratona, uma quantia em prêmios no valor de 9.600,00 reais deve ser igualmente repartida entre aqueles que terminassem a maratona num tempo inferior a 3 horas. Dois dos participantes que terminaram a corrida em menos de 3 horas decidiram não comparecer para receber o prêmio o que fez com que o prêmio de cada um dos restantes aumentasse em 400 reais. Quantos participantes terminaram a corrida no tempo previsto e quanto recebeu cada um deles ?**

Solução Denotemos por x o número de participantes que terminaram a corrida no tempo previsto. Cada um deles deveria receber $\dfrac{9.600}{x}$. No entanto, a desistência de 2 ganhadores fez com que o prêmio

de cada um deles passasse a ser $\frac{9.600}{x-2}$. A relação entre a quantia que cada um deveria receber e a quantia que cada um acabou recebendo é:

$$\frac{9.600}{x} + 400 = \frac{9.600}{x-2} \iff \frac{24}{x} + 1 = \frac{24}{x-2}\,.$$

Repare que x é um inteiro maior do que 2. Nessas condições, simplificando a equação acima, obtemos:

$$24(x-2) + x(x-2) = 24x \iff x^2 - 2x - 48 = 0$$

cujas soluções são: -6 e 8. Descartada a solução negativa, concluímos que o número de participantes que conseguiram terminar a corrida no tempo previsto foi: 8. Deles, apenas 6 receberam o prêmio, cabendo a cada um o montante de

$$\frac{9.600}{6} = 1.600\ reais\,.$$

30. Quais são as dimensões de um terreno retangular de $189\,m^2$ de área, cujo perímetro mede $60\,m$.

Solução Sejam x e y as dimensões dos lados do terreno retangular. Assim, temos:

$xy = 189$
$2x + 2y = 60$
y
x

Perímetro: $2x + 2y = 60$ e **Área:** $xy = 189$.

Consequentemente, $y = 30 - x$ e $x(30-x) = 189$. Agora, temos:

$$x(30-x) = 189 \iff x^2 - 30x + 189 = 0 \iff x = \frac{30 \pm \sqrt{900-756}}{2} \iff x = \frac{30 \pm 12}{2}\,.$$

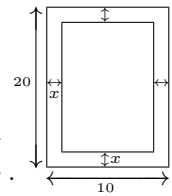
Assim, as dimensões do terreno são: $x = 21\,m$ e $y = 30 - x = 9\,m$. Outra forma de descrever as dimensões é: $x = 9\,m$ e $y = 30 - x = 21\,m$.

31. Um quadro com moldura possue $10\,cm$ de base e $20\,cm$ de altura. Sabendo que a moldura ocupa $56{,}25\,cm^2$ da área total do quadro e que tem largura uniforme, calcule as dimensões da moldura.

Solução Seja x a largura da moldura. Assim, temos:

20
x
x
10

$$2(20x) + 2(10-2x)x = 112{,}5 \iff 4x^2 - 60x + 112{,}5 = 0$$

$$\iff x = \frac{60 \pm \sqrt{1800}}{8} = \frac{60 \pm 30\sqrt{2}}{8} = \frac{30 \pm 15\sqrt{2}}{4}\,.$$

Assim, a largura da moldura vale $\frac{30-15\sqrt{2}}{4}\,cm$ já que o valor $\frac{30+15\sqrt{2}}{4}$ é superior à largura do quadro. Concluímos então que as dimensões da moldura são: $10\,cm$ de base, $20\,cm$ de altura e $\frac{30-15\sqrt{2}}{4}\,cm$ de espessura.

32. Para quais valores de λ a equação $2x^2 - 3x + \lambda = 0$ tem duas soluções distintas ?

Solução Temos que $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times \lambda = 9 - 8\lambda$. Conseqüentemente, a equação tem duas soluções se, e somente se:

$$\Delta = 9 - 8\lambda > 0 \iff 8\lambda < 9 \iff \lambda < 9/8\,.$$

33. Determine para quais valores do parâmetro λ a equação $\dfrac{\lambda}{x-2} + x = \lambda$ tem exatamente duas soluções distintas.

Solução Para $x \neq 2$ temos que:

$$\frac{\lambda}{x-2} + x = \lambda \iff \frac{\lambda}{x-2} + \frac{x(x-2)}{x-2} = \lambda \iff \frac{\lambda + x(x-2)}{x-2} = \lambda$$
$$\iff \lambda + x^2 - 2x = \lambda x - 2\lambda \iff x^2 - (2+\lambda)x + 3\lambda = 0. \qquad (9.22)$$

Assim para que a equação inicial tenha duas soluções distintas, o discriminante $\Delta = (2+\lambda)^2 - 4\times 1\times(3\lambda)$ deve ser positivo, desde que tais valores de λ não introduzam $x = 2$ como raiz de (9.22).

Portanto, devemos ter:

$$(2+\lambda)^2 - 4\times 1\times(3\lambda) > 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 12\lambda > 0 \iff \lambda^2 - 8\lambda + 4 > 0.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \iff x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\times 1\times 4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}\,.$$

Logo,

$$\lambda^2 - 8\lambda + 4 > 0 \iff \lambda \in \big(-\infty\,, 4 - 2\sqrt{3}\,\big) \cup \big(\,4 + 2\sqrt{3}\,, \infty\big).$$

Para finalizar a solução, resta saber se para algum valor de $\lambda \in \big(-\infty\,, 4 - 2\sqrt{3}\,\big) \cup \big(\,4 + 2\sqrt{3}\,, \infty\big)$ pode ocorrer $x = 2$ como raíz de (9.22). Para que isso ocorra, devemos ter

$$2^2 - (2+\lambda)2 + 3\lambda = 0 \iff 4 - 4 - 2\lambda + 3\lambda = 0 \iff \lambda = 0\,.$$

Isso significa que $x = 2$ é solução de (9.22) quando $\lambda = 0$. Bem sabemos que $x = 2$ não pode ser solução da equação inicial. Logo, precisamos retirar o valor $\lambda = 0$ de $\big(-\infty\,, 4 - 2\sqrt{3}\,\big) \cup \big(\,4 + 2\sqrt{3}\,, \infty\big)$. Aliás, quando $\lambda = 0$ a equação inicial tem uma única solução, a saber, a solução $x = 0$.

Concluímos assim que a equação dada tem duas soluções distintas se, e somente se

$$\lambda \in \big(-\infty\,, 0\big) \cup \big(0\,, 4 - 2\sqrt{3}\,\big) \cup \big(\,4 + 2\sqrt{3}\,, \infty\big).$$

☛ Note que $0 < 4 - 2\sqrt{3}$ já que: $0 < 4 - 2\sqrt{3} \iff 2\sqrt{3} < 4 \iff 12 < 16.$

34. Resolva a equação $\sqrt{x^2 - 2x} = 1$.

Solução Fazendo a mudança de variável $y = x^2 - 2x$ obtemos a equação $\sqrt{y} = 1$. Assim,

$$\sqrt{y} = 1 \iff y = 1 .$$

Para voltar à variável inicial façamos:

Passo 1: $y = 1$.

Nese caso:

$$1 = x^2 - 2x \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$\iff x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \iff x = 1 \pm \sqrt{2} .$$

Assim, $\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{2} , 1 + \sqrt{2}\}$.

35. Resolva a equação $(|x| - 3)^4 = 2$.

Solução Façamos a mudança de variável $y = |x| - 3$. A equação inicial toma a forma $y^4 = 2$. Resolvendo-a:

$$y^4 = 2 \iff y = \pm\sqrt[4]{2} .$$

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = \sqrt[4]{2}$.

Assim: $\sqrt[4]{2} = |x| - 3 \iff |x| = 3 + \sqrt[4]{2} \iff x = \pm(3 + \sqrt[4]{2})$.

Passo 2: $y = -\sqrt[4]{2}$.

Assim[8]: $-\sqrt[4]{2} = |x| - 3 \iff |x| = 3 - \sqrt[4]{2} \iff x = \pm(3 - \sqrt[4]{2})$.

Conseqüentemente, $\mathcal{S} = \Big\{ -3 - \sqrt[4]{2} , 3 + \sqrt[4]{2} , -3 + \sqrt[4]{2} , 3 - \sqrt[4]{2} \Big\}$.

36. Determine os valores de λ para os quais $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução Completando quadrados, temos:

$$2x^2 - \lambda x + 2\lambda = 2\Big\{x^2 - \frac{\lambda}{2}x + \lambda\Big\} = 2\Big\{\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2 - \frac{\lambda^2}{16} + \frac{16\lambda}{16}\Big\} = 2\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2 + \frac{16\lambda - \lambda^2}{8} .$$

Portanto, $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se $\frac{16\lambda - \lambda^2}{8} \geq 0$ ou seja, quando e somente quando $\lambda^2 - 16\lambda \leq 0$. Para finalizar a questão, precisamos estudar o sinal de $\lambda^2 - 16\lambda$.

Como $\lambda^2 - 16\lambda = \lambda(\lambda - 16)$ obtemos a seguinte tabela de sinais ao lado. Assim, $\lambda^2 - 16\lambda \leq 0$ se, e somente se $\lambda \in [0, 16]$.

+ + + +	0	- - - - - - -	0	+ + + +	*sinal de*
	0		16		$\lambda^2 - 16\lambda$

[8] Note que $3 - \sqrt[3]{2} > 0$ e por isso a equação $|x| = 3 - \sqrt[4]{2}$ tem solução.

Assim, $2x^2 - \lambda x + 2\lambda \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ quando, e somente quando $\lambda \in [\,0\,,16\,]$.

Outra forma de resolver o problema é considerar os valores de λ para os quais o discriminante Δ de $2x^2 - \lambda\, x + 2\lambda$ satisfaz a condição $\Delta \leq 0$.

37. Resolva a equação $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x-1} = 1$.

Solução Para $x \neq 1$ temos que:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} = 1 \iff \frac{x(x-1)+2}{2(x-1)} = 1 \iff x^2 - x + 2 = 2x - 2$$

$$\iff x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Por outro lado, o discriminante de $x^2 - 3x + 4$ vale $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 < 0$. Logo, a equação $x^2 - 3x + 4 = 0$ não tem soluções (reais). Conseqüentemente, a equação

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad \text{não admite soluções reais.}$$

38. Qual é o menor valor que a expressão $2x - \sqrt{x}$ assume?

Solução A expressão em questão está definida para $x \geq 0$. Fazendo $z = \sqrt{x}$ obtemos:

$$2x - \sqrt{x} = 2z^2 - z = 2\Big[(z - 1/4)^2 - 1/16\Big] = 2\bigg[\Big(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\Big)^2 - \frac{1}{16}\bigg] = 2\underbrace{\Big(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\Big)^2}_{\geq 0} - \frac{1}{8}\,.$$

Além disso, a expressão $\sqrt{x} - 1/4$ se anula quando $x = 1/16$. Agora, podemos concluir que a expressão em estudo assume $-1/8$ como menor valor possível e isso ocorre quando $x = 1/16$.

39. Qual é o maior valor que a expressão $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - 3$ assume?

Solução A expressão em questão está definida para $x > 0$. Fazendo $z = 1/\sqrt{x}$ obtemos:

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - 3 = -\Big(\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\Big) = -(z^2 - 4z + 3) = -\Big[(z-2)^2 - 4 + 3\Big]$$

$$= -\bigg[\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\Big)^2 - 1\bigg] = -\underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\Big)^2}_{\geq 0} + 1\,.$$

Lembramos também que a expressão $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2$ se anula quando $x = 1/4$. Assim, podemos concluir que a expressão em estudo assume o valor 1 como seu maior valor e isso ocorre quando $x = 1/4$.

40. Qual é o menor valor que a expressão $(x^2 - 2x + 2)^2 + 1$ assume e quando isso ocorre ?

Solução A expressão dada está definida para todo x real. Além disso, $(x^2 - 2x + 2)^2 \geq 0$. No entanto, não podemos garantir que o menor valor que expressão $(x^2 - 2x + 2)^2 + 1$ assume é 1. Para determinar esse menor valor, precisamos determinar o menor valor que $(x^2 - 2x + 2)^2$ assume. E para isso, temos que:

$$(x^2 - 2x + 2)^2 = \Big[\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1\Big]^2 .$$

Agora, podemos garantir que o menor valor assumido por $(x^2 - 2x + 2)^2$ é 1 e isso ocorre quando $x = 1$. Logo, o menor valor assumido por $(x^2 - 2x + 2)^2 + 1$ é 2 e ocorre quando $x = 1$.

41. Fixemos um número real $\lambda > 0$ e consideremos o conjunto $\mathcal{R}$ de todos os retângulos de área λ. Nessas condições :

(a) Determine as dimensões do retângulo de $\mathcal{R}$ que possui o menor perímetro ;

(b) Será que existe em $\mathcal{R}$ um retângulo de perímetro máximo ?

Solução Considere um retângulo em $\mathcal{R}$ de dimensões $x, y > 0$. Assim, $xy = \lambda$ e o perímetro p fica dado por:

$$p = 2(x+y) = 2\Big(x + \frac{\lambda}{x}\Big) = 2\Big[\underbrace{\Big(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}\Big)^2}_{\geq 0} + 2\sqrt{\lambda}\Big]. \qquad (9.23)$$

Além disso, a expressão $\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}$ se anula em $x = \sqrt{\lambda}$. Consequentemente, voltando a (9.23) concluímos que o menor valor que o perímetro p pode assumir é $4\sqrt{\lambda}$ e isso ocorre quando um dos lados do retângulo vale $\sqrt{\lambda}$. Como o perímetro do retângulo vale $4\sqrt{\lambda}$, também concluímos que o retângulo procurado é um quadrado de lado $\sqrt{\lambda}$ e o item (a) está terminado.

Para o item (b) a resposta é NÃO, pois tomando uma das dimensões do retângulo muito pequena, a outra dimensão terá que ser muito grande para que o produto delas continue sendo λ. E isso produzirá um retângulo de perímetro muito grande.

Mais precisamente, dado um número real $K \geq 4\sqrt{\lambda}$ (perímetro mínimo), podemos construir um retângulo de perímetro K da seguinte forma. Se x, y são as dimensões desse retângulo, devemos ter:

$$xy = \lambda \quad \text{e} \quad p = 2x + \frac{2\lambda}{x} = K .$$

Além disso, temos que:

$$2x^2 + 2\lambda = Kx \iff 2x^2 - Kx + 2\lambda = 0 \iff x = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 16\lambda}}{4} .$$

Portanto, o retângulo de dimensões:

$$\frac{K+\sqrt{K^2-16\lambda}}{4} \quad ; \quad \frac{K-\sqrt{K^2-16\lambda}}{4}$$

tem perímetro K. Isso mostra que podemos construir retângulos com área λ, possuindo perímetros tão grandes quanto quizermos... e a solução do item (b) está terminada.

42. Fixemos um número real $\lambda > 0$ e consideremos o conjunto $\mathcal{R}$ de todos os retângulos de perímetro λ. Nessas condições :

(a) Será que existe em $\mathcal{R}$ um retângulo que possui área máxima ?

(b) Será que existe em $\mathcal{R}$ um retângulo de área mínima ?

Solução Considere um retângulo em $\mathcal{R}$ de dimensões $x, y > 0$. Assim, $2x + 2y = \lambda$ e a área A é dada por:

$$\begin{aligned} A = xy = x\Big(\frac{\lambda - 2x}{2}\Big) &= \frac{\lambda x}{2} - x^2 = -\Big(x^2 - \frac{\lambda x}{2}\Big) \\ &= -\Big[\underbrace{\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2}_{\geq 0} - \frac{\lambda^2}{16}\Big] = -\Big(x - \frac{\lambda}{4}\Big)^2 + \frac{\lambda^2}{16}. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Concluímos daí que a expressão do segundo grau dada em (9.24) assume $\lambda^2/16$ como valor máximo e isso ocorre quando $x = \lambda/4$. Concluímos então que existe um retângulo de área máxima em $\mathcal{R}$ e suas dimensões são:

$$x = \lambda/4 \quad \text{e} \quad y = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} = \lambda/4 .$$

Ou seja, é um quadrado de lado $\lambda/4$. E a solução do item (a) está completa.

Sobre o item (b) podemos dizer o seguinte.

Note que, num retângulo de $\mathcal{R}$ de dimensões x, y temos que $2x$ é positivo e menor do que o perímetro λ, ou seja, $0 < x < \lambda/2$. Quando tomamos o valor de x muito próximo de $\lambda/2$, o valor de $y = \frac{\lambda}{2} - x$ deve ficar muito próximo de zero, para que o perímetro continue valendo λ. Nesse caso, a área $A = xy$ deve ficar muito pequena, pois ela é dada pelo produto de um número próximo de $\lambda/2$ por um número próximo de zero. Isso parece nos dizer que não existe em $\mathcal{R}$ um retângulo com área mínima, isto é, existem retângulos em $\mathcal{R}$ com área tão próxima de zero quanto quizermos !!

De forma mais precisa: seja dado um número $0 < \epsilon < \lambda^2/16$. Vamos exibir um retângulo de $\mathcal{R}$ cuja área vale, exatamente, ϵ. Isso feito, teremos mostrado que não existe em $\mathcal{R}$ um retângulo de área mínima.

Vamos, agora, determinar as dimensões x, y do retângulo de perímetro λ e área igual a ϵ. Temos que:

$$2x + 2y = \lambda \quad \text{e} \quad \epsilon = xy = x\Big(\frac{\lambda - 2x}{2}\Big) = \frac{\lambda x}{2} - x^2.$$

Além disso,

$$x^2 - \frac{\lambda x}{2} + \epsilon = 0 \iff x = \frac{\lambda}{4} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{16} - \epsilon}\ .$$

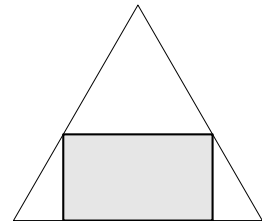
Assim, o triângulo de dimensões

$$\frac{\lambda}{4} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{16} - \epsilon} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda}{4} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{16} - \epsilon}$$

tem área, exatamente, igual a ϵ e a análise da questão (b) está terminada.

43. Um retângulo está inscrito num triângulo equilátero de lado $l > 0$ como exibido na figura abaixo.

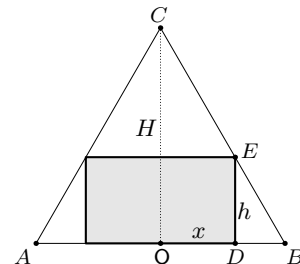
(a) Mostre que a área desse retângulo é menor ou igual a $l^2\sqrt{3}/8$;

(b) Mostre que essa área assume o valor $l^2\sqrt{3}/8$ quando a base do retângulo for igual a metade do lado do triângulo.

Solução Comecemos fixando os pontos $A\,,B\,,C\,,D$ e O no triângulo em questão.

Para termos uma estimativa da área do retângulo vamos, primeiramente, determinar uma expressão para tal área, usando como variável o comprimento do segmento OD. Para isso, fixemos as seguintes notações:

- $x =$ comprimento do segmento OD ;
- $h =$ comprimento do segmento DE ;
- $H =$ comprimento do segmento OC.

Note que a base do retângulo depende da variável x e vale exatamente, $2x$. Assim, a área $\mathcal{A}(x)$ do retângulo fica dada por:

$$\mathcal{A}(x) = 2x \times h \quad \text{onde } 0 < x < l/2.$$

Por outro lado, temos:

- Como o triângulo COB é retângulo, segue do *Teorema de Pitágoras* que

$$H^2 + \Big(\frac{l}{2}\Big)^2 = l^2 \iff H^2 = \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

  e, portanto,

$$H = l\sqrt{3}/2\,;$$

- Da semelhança dos triângulos COB e EDB segue que

$$\frac{H}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} \iff \frac{H}{h} = \frac{l}{l - 2x} \iff \frac{l\sqrt{3}}{2h} = \frac{l}{l - 2x}$$

e portanto,

$$h = \frac{(l-2x)\sqrt{3}}{2}\,.$$

Assim, a expressão da área do retângulo, fica dada por

$$\mathcal{A}(x) = x(l-2x)\sqrt{3} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, l/2)\,.$$

Completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= x(l-2x)\sqrt{3} = \sqrt{3}\big(xl - 2x^2\big) = -2\sqrt{3}\left[x^2 - \frac{l}{2}x\right] \\ &= -2\sqrt{3}\left[\Big(x-\frac{l}{4}\Big)^2 - \frac{l^2}{16}\right] = -2\sqrt{3}\,\Big(x-\frac{l}{4}\Big)^2 + \frac{\sqrt{3}\,l^2}{8}\end{aligned}$$

ou seja,

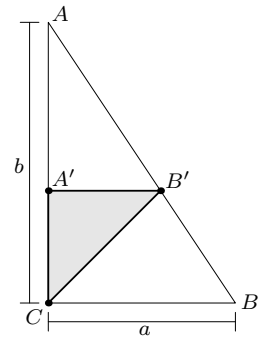
$$\mathcal{A}(x) = -2\sqrt{3}\,\Big(x-\frac{l}{4}\Big)^2 + \frac{\sqrt{3}\,l^2}{8} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, l/2).$$

Agora, podemos concluir que o maior valor que a área do retângulo pode assumir é $l^2\sqrt{3}/8$ e esse valor ocorre quando, e somente quando, $x = l/4$, isto é, quando, e somente quando, a base do quadrado $(= 2x = 2\frac{l}{4} = l/2)$ for igual a metade do lado do triângulo. E isso responde os itens (a) e (b) da questão.

44. **Considere um triângulo retângulo de catetos $a\,, b > 0$. Inscrito nesse triângulo, como mostrado na figura abaixo, temos um triângulo hachurado de vértices A', B' e C, o qual é retângulo em A'.**

(i) Mostre que a área do triângulo inscrito vale, no máximo, $ab/8$;

(ii) Mostre que essa área assume o valor $ab/8$ se, e somente se, $|A'B'| = a/2$.

Solução Para ter uma estimativa da área do triângulo inscrito vamos, primeiramente, determinar uma expressão para tal área, usando como variável o comprimento do segmento $A'B'$.

Para isso, fixemos as seguintes notações:

- x = comprimento do segmento $A'B'$;
- h = comprimento do segmento CA'.

A área $\mathcal{A}$ do triângulo inscrito fica então dada por:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\,x \times h \quad \text{onde } 0 < x < a.$$

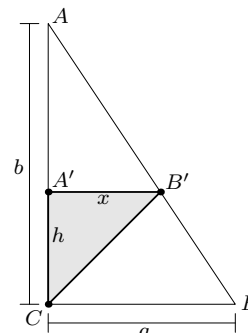
Por outro lado, da semelhança dos triângulos $AA'B'$ e ACB resulta que:

$$\frac{b-h}{b} = \frac{x}{a} \iff b-h = \frac{b\,x}{a} \iff h = b\Big(1-\frac{x}{a}\Big)$$

Assim, a expressão da área do triângulo inscrito, toma a forma

$$\mathcal{A}(x) = \frac{b}{2}\left(x - \frac{x^2}{a}\right) \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, a\,)\,.$$

Completando quadrados, obtemos:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{b}{2}\left(x - \frac{x^2}{a}\right) = -\frac{b}{2}\left(\frac{x^2}{a} - x\right) = -\frac{b}{2}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}\right]$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{b}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 + \frac{ab}{8} \quad \text{onde} \quad x \in (\,0\,, a).$$

Agora, podemos concluir que o maior valor que a área do triângulo inscrito pode assumir é $ab/8$ e esse valor ocorre quando, e somente quando:

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{2} = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \iff x = a/2\,.$$

E isso responde os itens (i) e (ii) da questão.

5 Equação (Expressão A)×(Expressão B)=0

A abordagem inicial da equação

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = 0$$

onde $\boxed{\text{Expressão A}}$ e $\boxed{\text{Expressão B}}$ são expressões numa mesma variável, é feita usando a propriedade estudada na seção 4 da Lição 7. Essa propriedade nos garante que: dados números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ então

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 0 \iff a_1 = 0 \quad \text{ou} \quad a_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \cdots \quad \text{ou} \quad a_n = 0\,.$$

Assim, para iniciar o processo de solução da equação em estudo, fazemos:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = 0 \tag{9.25}$$

☞ **1º Passo:**

Determinamos todos os valores da variável para os quais pelo menos uma das expressões **não** está bem definida.

☞ **2º Passo:**

Resolvemos a equação $\boxed{\text{Expressão A}} = 0$.

☞ **3º Passo:**

Resolvemos a equação $\boxed{\text{Expressão B}} = 0$.

O conjunto solução da equação (9.25) é a união das soluções obtidas nos 2 últimos passos, retirados dessa união os pontos que foram obtidos no primeiro passo.

De forma semelhante, podemos aplicar esse processo quando temos três ou mais expressões numa mesma variável como em:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} \times \boxed{\text{Expressão C}} = 0 \,.$$

Com essa técnica também podemos iniciar o estudo de equações do tipo:

$$\boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão B}} = \boxed{\text{Expressão A}} \times \boxed{\text{Expressão C}} \,. \tag{9.26}$$

Para isso, basta passar o segundo membro para o primeiro (trocando seu sinal) e colocar o termo $\boxed{\text{Expressão A}}$ em evidência. Feitas essas operações vamos nos deparar com uma equação do tipo (9.25).

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a equação $x^2(x^2-2)^3 = 0$.**

Solução Seguindo a regra vista nessa lição, devemos analizar o domínio e os zeros das expressões: x^2 e $(x^2-2)^3$.

Passo 1: As expressões x^2 e $(x^2-2)^3$ estão bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Passo 2: Resolvendo a equação $x^2 = 0$.

$x^2 = 0 \iff x = 0$.

Passo 3: Resolvendo a equação $(x^2 - 2)^3 = 0$.

$(x^2 - 2)^3 = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

Consequentemente, o conjunto solução da equação em estudo é: $\mathcal{S} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. **Resolva a equação $(2x - \pi)(x^2 - x - 2)(1 - 2\sqrt{x}) = 0$.**

Solução Para isso, devemos resolver as três seguintes equações.

(a) $2x - \pi = 0 \iff x = \pi/2$.

(b) $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$.

(c) $1 - 2\sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = 1/2 \iff x = 1/4$.

No entanto, $\sqrt{x}$ não está definido para $x < 0$. Portanto, o conjunto solução da equação inicial é: $\mathcal{S} = \{\pi/2, 2, 1/4\}$.

3. **Resolva a equação $(1 - 2|x|)(x^2 - x)^3 = 0$.**

Solução Colocando x em evidência obtemos

$(1 - 2|x|)(x^2 - x)^3 = 0 \iff (1 - 2|x|)[x(x-1)]^3 = 0 \iff (1 - 2|x|) \times x^3 \times (x-1)^3 = 0$.

Devemos agora dar os seguintes passos.

Passo 1: As três expressões $1 - 2|x|$, x^3 e $(x-1)^3$ envolvidas estão bem definidas em toda a reta.

Passo 2: Resolver a equação $1 - 2|x| = 0$.

$1 - 2|x| = 0 \iff 2|x| = 1 \iff |x| = 1/2 \iff x = \pm 1/2$.

Passo 3: Resolver a equação $x^3 = 0$.

$x^3 = 0 \iff x = 0$.

Passo 4: Resolver a equação $(x-1)^3 = 0$.

$(x-1)^3 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Portanto, $\mathcal{S} = \{-1/2, 0, 1/2, 1\}$.

4. **Resolva a equação $(x + 1)(2x - x^2) = x + 1$.**

Solução As expressões envolvidas estão bem definidas em toda a reta. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}(x+1)(2x - x^2) = x + 1 &\iff (x+1)(2x - x^2) - (x+1) = 0 \\ &\iff (x+1)(2x - x^2 - 1) = 0 \\ &\iff (x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $x + 1 = 0$.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Passo 2: Resolvendo a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$.

$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.

Portanto, o conjunto solução da equação inicial será: $\mathcal{S} = \{1, -1\}$.

5. **Resolva a equação $(|x| - 1)(2 - x) = 1 - |x|$.**

Solução As expressões envolvidas estão bem definidas em toda a reta. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
(|x|-1)(2-x) = 1-|x| &\iff (|x|-1)(2-x) - (1-|x|) = 0 \\
&\iff (|x|-1)(2-x) + (|x|-1) = 0 \\
&\iff (|x|-1)(2-x+1) = 0 \\
&\iff (|x|-1)(3-x) = 0 .
\end{aligned}$$

Passo 1: Resolvendo a equação $|x| - 1 = 0$.

$|x| - 1 = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$.

Passo 2: Resolvendo a equação $3 - x = 0$.

$3 - x = 0 \iff x = 3$.

Portanto: $\mathcal{S} = \{1, -1, 3\}$.

6. **Resolva a equação $(4x^2 - 1)(3 - x) - (1 - 2x)(x^2 + 1) = 0$.**

Solução Comecemos simplificando a equação:

$$\begin{aligned}
(4x^2-1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0 &\iff (2x-1)(2x+1)(3-x) - (1-2x)(x^2+1) = 0 \\
&\iff (2x-1)(2x+1)(3-x) + (2x-1)(x^2+1) = 0 \\
&\iff (2x-1)\big[(2x+1)(3-x) + (x^2+1)\big] = 0 \\
&\iff (2x-1)[6x - 2x^2 + 3 - x + x^2 + 1] = 0 \\
&\iff (2x-1)(-x^2 + 5x + 4) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(4x^2 - 1)(3 - x) - (1 - 2x)(x^2 + 1) = 0$ se, e somente se,

$$2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 + 5x + 4 = 0$$

isto é:

$$x = 1/2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-1) \times 4}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{-2} = \frac{5 \mp \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{41}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2} . \end{cases}$$

Assim, a equação dada tem três soluções distintas, a saber:

$$\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{5-\sqrt{41}}{2} \quad ; \quad \frac{5+\sqrt{41}}{2}\,.$$

7. **Determine onde a expressão a seguir se anula e o seu domínio de definição:**

$$\frac{\mathbf{1-3x-2x^2}}{\mathbf{x-4\sqrt{x}+2}}\,. \tag{9.27}$$

Solução O numerador dessa fração está bem definido para todo x real. Já o denominador só está bem definido para $x \geq 0$ e precisamos agora saber para quais desses valores o denominador se anula. Para isso temos que resolver a equação

$$x - 4\sqrt{x} + 2 = 0\,. \tag{9.28}$$

Seja $y = \sqrt{x}$. Com essa mudança de variável a equação (9.28) toma a forma:

$$y^2 - 4y + 2 = 0 \iff y = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \iff y = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \iff y = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

Para voltar a variável x, façamos:

Passo 1: $y = 2 + \sqrt{2}$.

$2 + \sqrt{2} = \sqrt{x} \iff x = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$.

Passo 2: $y = 2 - \sqrt{2} > 0$.

$2 - \sqrt{2} = \sqrt{x} \iff x = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Assim, as soluções de (9.28) são: $6+4\sqrt{2}$ e $6-4\sqrt{2}$ ambos, positivos. Conseqüentemente, o domínio da expressão (9.27) é:

$$\left[\,0\,, 6-4\sqrt{2}\right) \cup \left(6-4\sqrt{2}\,, 6+4\sqrt{2}\right) \cup \left(6+4\sqrt{2}\,, \infty\right).$$

Por outro lado, o numerador $1-3x-2x^2$ da expressão (9.27) só se anula quando

$$\begin{aligned} 1-3x-2x^2 = 0 &\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{-4} \iff x = -\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{17}+3}{4}\,. \end{aligned}$$

No entanto, o denominador não está bem definido para $x = -\dfrac{\sqrt{17}+3}{4}$.

Portanto, a expressão (9.27) só se anula[9] em $x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$.

[9] Note que $\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$ é positivo e distinto de $6 \pm 4\sqrt{2}$.

Exercícios

1. Resolva as equações:

   (a) $2x-3=x+2$ (b) $x-2=3x$
   (c) $5x+2=x-3$ (d) $\pi x-3=x-2$.

2. Mostre que $2/3$ pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2}+1$ para algum real α. Determine α.

   Mostre que todo número racional pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2}+1$ para algum número real α. Determine α.

   Você pode ir mais adiante?

3. Mostre que todo número real pode ser colocado na forma $\pi\lambda-1/\sqrt{2}$ para algum real λ. Determine o valor de λ para cada real dado.

4. Esboce o gráfico das seguintes expressões:

   (a) $2x-1$ (b) $4-5x$
   (c) $3x+4$ (d) $-2x+4/5$.

5. Estude o sinal das seguintes expressões:

   (a) $2x-1/5$ (b) $4-5x/2$
   (c) $3x+4/5$ (d) $2-\sqrt{2}x$.

6. Seja $\lambda\in\mathbb{R}$. Em cada item a seguir, determine para quais valores do parâmetro λ as equações têm soluções e quais são essas soluções.

   (a) $\lambda x-1/3=0$ (b) $4-\lambda x/2=0$
   (c) $3x+4/\lambda=0$ (d) $\sqrt{2}-x/\lambda=\lambda$.

7. Sejam $a, b\in\mathbb{R}$ tais que $a\neq b$. Resolva a equação
   $$a(x+b)=bx+a^2\,.$$

8. Nas equações a seguir determine λ como uma expressão na variável x e diga qual o domínio das expressões encontradas.

   (a) $\lambda x-1/x=1$ (b) $4-\lambda x/2=\lambda$
   (c) $3x+4/\lambda=2$ (d) $\sqrt{2}/\lambda-x=1$.

9. Esboce o gráfico das seguintes expressões:
   (a) $2x-5$ (b) $1-3x$
   (c) $2-|x|$ (d) $3+2|x|$.

10. Esboce o gráfico da expressão $ax+b$ nas seguintes situações:
    (1) $a>0$ e $b<0$
    (2) $a>0$ e $b/a>0$
    (3) $a<0$ e $b/a>0$.

11. Resolva as equações:
    (a) $x^2+x-2=0$ (b) $x-2x^2=1$
    (c) $2x=3-x^2$ (d) $1+x=3x^2$.

12. Resolva as equações:
    (a) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x+2}=1$
    (b) $\dfrac{1-x}{3}+\dfrac{2}{2x-1}+1=x$
    (c) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x^2}{x+2}=2$
    (d) $\dfrac{2x-5}{x+1}=2+\dfrac{1}{x-2}$.

13. Estude o sinal das expressões:
    (a) x^2+x-2 (b) $x-2x^2-1$
    (c) $-2x+3-x^2$ (d) $1+x-3x^2$.

14. Considere as expressões
    (1) $4x^2+2$ (2) $3x^2+5x-7$
    (3) $5x+3x^2$ (4) $-x^2+3x+10$
    (5) $-2-x^2-x$ (6) $1-x-3x^2$.

    (a) Determine o ponto onde o gráfico da expressão corta o eixo das ordenadas;
    (b) Complete quadrados para colocá-la na forma $a(x+b)^2+c$;
    (c) Determine a equação cartesiana do eixo de simetria do gráfico da expressão em estudo;
    (d) Determine o valor extremo que essa expressão assume, classifique-o e exiba o ponto do domínio onde isso ocorre;
    (e) Determine os pontos onde o gráfico da expressão corta o eixo das abcissas, caso existam;
    (f) Esboce o gráfico dessa expressão, indicando as informações acima obtidas.

15. Resolva a equação
    $$\frac{x}{2-x}+\frac{x-1}{2}=x+1\,.$$

16. Resolva a equação

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{2x+1}{x^2-7x+12}=\frac{6}{x^2-6x+8}\,.$$

17. Quais números reais podem ser colocados na forma $2\lambda + 1/\lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$?

18. Mostre que todo número real pode ser colocado na forma $\lambda - 1/\lambda$ para algum $\lambda > 0$.

19. Construa uma expressão do segundo grau cujos zeros são $2 \pm \sqrt{3}$. Descreva todas as expressões do segundo grau que têm essa propriedade.

20. Construa uma expressão do segundo grau cujo gráfico passa pelos pontos $(-1\,,2)$ e $(3\,,2)$ e que se anula em um único ponto. Quantas dessas expressões existem ?

21. Descreva todas as expressão do segundo grau cujos gráficos passam pelos pontos $(-1\,,2)$ e $(3\,,2)$. Esboce o gráfico dessas expressões.

22. Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$. Construa uma expressão do segundo grau que se anula somente nos pontos a e b .

Você poderia descrever todas as expressões do segundo grau que posssuem essa propriedade ?

23. Construa uma expressão do segundo grau que assuma π como valor máximo e tenha -1 e 2 como zeros.

24. Construa o gráfico de uma expressão da forma ax^2+bx+c que tenha $a>0$ e $c<0$.

25. Faça esboços gráficos da expressão $x^2+\lambda$ quando:
(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $[0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

26. Faça esboços gráficos da expressão λx^2 quando:
(a) λ varia no intervalo $[-1\,,1]$;
(b) λ varia no intervalo $(0\,,\infty)$;
(c) λ varia em toda a reta.

27. Considere a expressão ax^2+bx+c onde $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Mostre que se a e c têm sinais contrários então essa expressão se anula em dois pontos distintos.

28. Trocando c por b no exercício anterior, podemos concluir o mesmo resultado ?

29. Considere a expressão $2x^2+bx+b$. Sob que condições podemos garantir que essa expressão possui:
(1) duas raízes distintas ;
(2) uma única raiz ;
(3) nenhuma raiz.

30. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a equação do segundo grau $x^2-\lambda x+16=0$. Determine o domínio de variação de λ afim de que essa equação não tenha raízes reais.

31. Considere a equação $x^2-ax-\lambda=0$. Determine a dependência entre λ e a para que a equação tenha uma única raiz.

32. Determine os valores de k para que a equação $x^2+2(k+2)x+9k=0$ tenha uma única raiz.

33. Sejam α e β as raízes da equação do segundo grau $x^2-bx+c=0$. Determine $\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$. Determine também, $\alpha^2+\beta^2$ e $\alpha^3+\beta^3$.

34. Dado um número real x denotamos por $[x]$ o *maior inteiro que é menor ou igual a* x .

Calcule $[x]$ quando:

(a) $x=1{,}2$ (b) $2x=-3{,}45$
(c) $x=\sqrt{10}$ (d) $x^3=-7$
(e) $x=-\pi$ (f) $x^2=\sqrt{101}$.

35. Esboce o gráfico da expressão $E(x)=[x]$. Esboce os gráficos de $E(x)=[x]$ e de $F(x)=x$ num mesmo quadro e compare-os.

36. Esboce, num mesmo quadro, os gráficos de $E(x)=2x$ e de $F(x)=[2x]$. Compare-os.

37. Esboce, num mesmo quadro, os gráficos de $E(x)=x^2$ e de $F(x)=[x^2]$. Compare-os.

38. Mostre que a equação

$$\frac{x}{\lambda^2-x}=\frac{1}{x}$$

tem exatamente duas soluções quando $\lambda \neq 0$. Determine essas soluções. O que podemos dizer sobre as soluções dessa equação quando $\lambda = 0$?

39. Fatore as expressões:
(a) $x^2 - |x| - 2$
(b) $-x^2 + |x| + 6$
(c) $x^4 - 3x^2 - 10$
(d) $x - \sqrt{x} - 2$.

40. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$x^2 - a^2 = (|x| + a)(|x| - a)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

41. Determine para quais valores de x a expressão $2x - 3\sqrt{x}$ assume, respectivamente, os valores 2 , -2 , 6 e -5 .

42. Determine o domínio de definição das seguintes expressões e os pontos onde elas se anulam. Simplifique-as quando possível.

(a) $\dfrac{x-2}{x^2-5}$ (b) $\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-2x}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

43. Use a técnica de *mudança de variável* para resolver as seguintes equações:
(a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 1$
(b) $\sqrt{x - 5\sqrt{x} + 4} = 2$
(c) $(2 - |x|)^4 = 3$
(d) $x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$.

44. Determine o domínio e os pontos onde as expressões a seguir se anulam.
(a) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x} - 2x}$
(b) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x - 3\sqrt{x} + 2}}$.

45. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões:
(a) x/x (b) $(x-1)/|x-1|$
(c) x^2/x (d) $(x-2)^2/|x-2|$
(e) $|x^3|/x$ (f) $(x+1)^3/|x+1|$.

46. Resolva a equação $x + \sqrt{x-2} = 4$.

47. Resolva a equação

$$\sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5 .$$

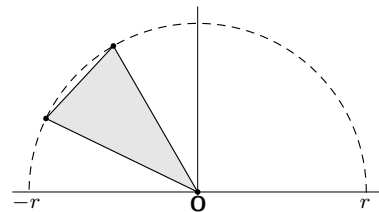
48. Mostre que um número racional pode ser colocado na forma $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ para algum λ racional positivo quando, e somente quando, ele for um quadrado perfeito, isto é, quando ele for da forma p^2/q^2 onde p, q são inteiros e $q \neq 0$.

49. Sabendo que $|3x - 2| \geq 4$ determine o menor subconjunto da reta que contém $x^2 + 2x$.

50. Prove que a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, \sqrt{2})$ não passa por nenhum ponto com ambas as coordenadas inteiras, a não ser o $(0, 0)$.

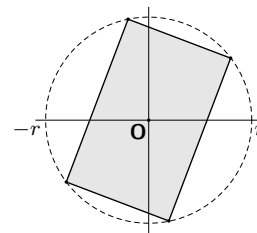
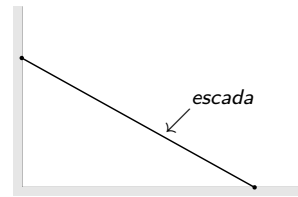
Será que ela passa por um ponto distinto de $(0, 0)$ e com ambas as coordenadas racionais ?

51. Vimos na página 154 que o eixo de simetria da parábola $ax^2 + bx + c$ (onde $a \neq 0$) é a reta vertical de equação $x = -\frac{b}{2a}$. Em particular, o eixo de simetria não depende de c. Dê uma justificativa geométrica para esse fato.

52. Um triângulo está inscrito num semi-círculo de raio $r > 0$ como mostrado na figura a seguir.

Determine o valor máximo que a área desse triângulo pode assumir.

53. Considere o conjunto dos retângulos inscritos num cículo de raio $r > 0$. Pergunta-se:

(a) dentre esses retângulos, existe um de área máxima ?

(b) dentre esses retângulos, existe um de área mínima ?

54. Uma escada de comprimento L metros, mostrada na figura, deve ser encostada num muro de tal forma que a área da região triangular delimitada pela escada, pelo muro e pelo piso seja a maior possível.

A qual distância do muro, deve estar o pé da escada ?

55. Qual é o menor valor que a expressão $4x + \frac{1}{x} + 2$ assume e quando isso ocorre ?

10

Simplificando equações

Para resolver uma equação precisamos simplificá-la: essencialmente, reduzí-la a uma equação a qual sabemos resolver. Para isso, é importante saber quais operações podemos executar sobre uma equação a fim de simplificá-la já que modificar uma equação pode significar alterar o seu conjunto solução.

Vimos na lição anterior que a operação de mudança de variável pode ser extremamente conveniente para simplificar uma equação e facilitar sua resolução.

1 Operando sobre equações

Existem várias operações sobre equações que permitem simplificá-las. Nessa lição trataremos de algumas delas, classificando-as em dois grupos:

- Aquelas que modificam a equação mas não alteram o conjunto das soluções ;

- Aquelas que modificam a equação de tal forma que: a equação modificada possui todas as soluções da equação inicial mas, podem ocorrer outras soluções, ditas, *soluções estranhas à equação inicial. Nesse caso, resolvida a equação modificada, devemos testar suas soluções na equação inicial para saber, quais delas são, de fato, soluções da equação inicial.*

No que segue vamos nos referir à $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ etc que denotarão expressões numa mesma variável.

1.1 Equivalência de equações

Seja $\mathfrak{D}$ um subconjunto qualquer da reta. Dizemos que duas equações são *equivalentes em* $\mathfrak{D}$ quando elas possuem as mesmas soluções em $\mathfrak{D}$.

Se as equações

$$\boxed{\mathsf{A}} = \boxed{\mathsf{B}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\mathsf{C}} = \boxed{\mathsf{D}}$$

possuem as mesmas soluções em $\mathfrak{D}$, escrevemos:

$$\boxed{\mathsf{A}} = \boxed{\mathsf{B}} \iff \boxed{\mathsf{C}} = \boxed{\mathsf{D}} \qquad \text{em} \quad \mathfrak{D}$$

para indicar que elas são equivalentes em $\mathfrak{D}$.

Note que se duas equações são equivalentes em $\mathfrak{D}$ então elas são equivalentes em qualquer subconjunto de $\mathfrak{D}$.

Exemplos

- As equações a seguir são equivalentes em $\mathbb{R}$:

  $$2x = 0 \iff \frac{x}{x^2-1} = 0 \iff x^2 = 0 \iff \sqrt{x+1} = 1$$

  pois todas elas possuem, exatamente, as mesmas soluções em $\mathbb{R}$, a saber, a solução $x = 0$.

- As equações a seguir são equivalentes em $\mathbb{R} - \{0\}$:

  $$2x(x-1) = 0 \iff \frac{x-1}{x+1} = 0 \iff x^4 = x \iff \sqrt{x} = 1$$

  pois todas elas possuem, exatamente, as mesmas soluções em $\mathbb{R} - \{0\}$, a saber, a solução $x = 1$.

- As duas equações a seguir *não são equivalentes* em $\mathbb{R}$:

  $$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad x = 0$$

  pois zero é solução da segunda equação mas, não é solução da primeira. Note que o membro esquerdo da primeira equação nem está bem definido quando $x = 0$.

- As equações a seguir são equivalentes no intervalo $[1,2]$:

  $$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \iff x = 0$$

  pois ambas não admitem soluções em $[1,2]$.

- As equações a seguir são equivalentes em $[0,\infty)$:

  $$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \iff x^4 = 1$$

  pois ambas possuem uma única solução em $[0,\infty)$, a saber $x = 1$.

❄ Em $\mathbb{R}$ temos que:

$x\,(|x|-1)=0 \iff x\,(x^2-1)=0$

pois ambas as equações possuem zero, 1 e -1 como soluções. Portanto, elas também são equivalentes em qualquer subconjunto da reta, por exemplo, em $[\,0\,,2\,]$, em $(-1\,,2)$, em $[-1\,,1)$, etc.

Nesse contexto de simplificações de equações outro conceito importante é o seguinte. Quando toda solução da equação $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}}$ em $\mathfrak{D}$ também é solução da equação $\boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}}$ dizemos que a primeira equação implica a segunda em $\mathfrak{D}$ e escrevemos

$$\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}} \quad \text{em} \quad \mathfrak{D}$$

para indicar que a primeira equação implica a segunda em $\mathfrak{D}$.

Note que se

$$\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}} \quad \text{em} \quad \mathfrak{D}$$

então a implicação acima continua verdadeira em qualquer subconjunto de $\mathfrak{D}$.

Além disso, se duas equações são equivalentes num conjunto $\mathfrak{D}$ então uma implica a outra nesse conjunto $\mathfrak{D}$. Aliás, uma maneira de mostrar que duas equações são equivalentes em $\mathfrak{D}$ é mostrar que cada uma delas implica a outra em $\mathfrak{D}$.

1.2 Transitividade da equivalência de equações

Dadas equações $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}}$ e $\boxed{\text{E}}=\boxed{\text{F}}$ numa mesma variável, temos as seguintes propriedades de transitividade:

- se $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \iff \boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}}$ em $\mathfrak{D}$ e $\boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}} \iff \boxed{\text{E}}=\boxed{\text{F}}$ em $\mathfrak{D}$

  então $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \iff \boxed{\text{E}}=\boxed{\text{F}}$ em $\mathfrak{D}$;
- se $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}}$ em $\mathfrak{D}$ e $\boxed{\text{C}}=\boxed{\text{D}} \implies \boxed{\text{E}}=\boxed{\text{F}}$ em $\mathfrak{D}$

  então $\boxed{\text{A}}=\boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{E}}=\boxed{\text{F}}$ em $\mathfrak{D}$.

Estas são propriedades que estaremos usando, com frequência, quando da resolução de equações.

Exemplos

❄ Em $\mathbb{R}$ temos:

$$2x=0 \implies x\Big(\frac{2}{x+1}-1\Big)=0 \implies x|x-1|=0 \implies x(x^2-1)=0$$

pois na lista acima cada equação tem todas as soluções em $\mathbb{R}$, que tem a equação anterior.

❄ Em $\mathbb{R}-\{0\}$ temos:

$$x(x-1)=0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)\Big(\frac{2}{x^2+1}-1\Big)=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2|x^2-1|=0$$

pois na lista acima cada equação tem todas as soluções em $\mathbb{R}-\{0\}$, que tem a equação anterior.

❄ Em $\mathbb{R}$ temos:

$$x^2=1 \quad \not\Longrightarrow \quad x=1$$

pois a primeira equação tem 1 e -1 como soluções enquanto a segunda só tem 1 como solução. No entanto, podemos escrever que em $\mathbb{R}$ temos:

$$x=1 \quad \Longrightarrow \quad x^2=1\,.$$

❄ Em $[-2\,,2\,]$ temos:

$$(x-3)(x^2-1)=0 \quad \not\Longrightarrow \quad x\,(x-2)|x-1|=0$$

pois em $[-2\,,2\,]$ a primeira equação tem 1 e -1 como soluções enquanto que a segunda não admite -1 como solução. Logo, a primeira equação não implica a segunda em $[-2\,,2\,]$.

❄ Em $\mathbb{R}-\{1\}$ temos que:

$$(x-1)\,(|x|-1)=0 \quad \Longrightarrow \quad x\,(x^2-1)=0$$

pois a da esquerda possui apenas $x=-1$ como solução em $\mathbb{R}-\{1\}$ enquanto a da direita possui -1 e zero como soluções em $\mathbb{R}-\{1\}$. Portanto, a equação da esquerda implica a da direita em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}-\{1\}$, por exemplo, em $(-\infty\,,0\,]$, em $(-1\,,1)$, em $[-1\,,1)\cup(\,1\,,\infty)$.

1.3 Operações que não modificam o conjunto das soluções

Ao realizar essas operações sobre a equação obtemos equações eqüivalentes, i.e. preservamos as soluções da equação inicial e não introduzimos novas soluções. Nesse caso, resolvida a equação final não precisamos testar as soluções encontradas na equação inicial; todas elas são soluções da equação inicial. No entanto, para realizar essa proeza precisamos trabalhar sob algumas hipóteses. Listamos a seguir algumas dessas operações.

Seja $\mathfrak{D}$ um subconjunto qualquer da reta onde as expressões $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ e $\boxed{D}$ estão, todas elas, bem definidas. **Estaremos assumindo essa importante condição nas próximas nove regras**.

Regra 1. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{A}+\boxed{C}-\boxed{C}=\boxed{B} \iff \boxed{A}=\boxed{B}$.

Regra 2. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{A}=\boxed{B}+\boxed{C} \iff \boxed{A}-\boxed{C}=\boxed{B}$.

Regra 3. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\dfrac{\boxed{A}}{\boxed{B}}+\dfrac{\boxed{C}}{\boxed{D}}=\boxed{E} \iff \dfrac{\boxed{A}\times\boxed{D}+\boxed{B}\times\boxed{B}}{\boxed{B}\times\boxed{D}}=\boxed{E}$.

Regra 4. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} \iff \boxed{\text{A}}^n = \boxed{\text{B}}^n$
desde que n seja um inteiro ímpar positivo.

Regra 5. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} \iff \sqrt[n]{\boxed{\text{A}}} = \sqrt[n]{\boxed{\text{B}}}$
desde que n seja um inteiro ímpar positivo.

Regra 6. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{\text{A}} \times \boxed{\text{C}} = \boxed{\text{B}} \times \boxed{\text{C}} \iff \boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$
desde que $\boxed{\text{C}}$ não se anule em $\mathfrak{D}$.

Regra 7. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} = \dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} \iff \boxed{\text{A}} \times \boxed{\text{D}} = \boxed{\text{B}} \times \boxed{\text{C}}$
desde que $\boxed{\text{B}}$ e $\boxed{\text{D}}$ não se anulem em $\mathfrak{D}$.

Regra 8. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} \iff \boxed{\text{A}}^n = \boxed{\text{B}}^n$
desde que n seja um inteiro par positivo e as expressões sejam não negativas[1] em $\mathfrak{D}$.

Regra 9. Em $\mathfrak{D}$ temos : $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} \iff \sqrt[n]{\boxed{\text{A}}} = \sqrt[n]{\boxed{\text{B}}}$
desde que n seja um inteiro par positivo e as expressões sejam não negativas em $\mathfrak{D}$.

Nos exemplos a seguir, nosso objetivo é usar essas nove regras para chegar a uma equação mais simples, a qual sabemos resolver no conjunto $\mathfrak{D}$. Em cada exemplo vamos escolher como conjunto $\mathfrak{D}$ o maior subconjunto da reta onde as expressões envolvidas estão, todas elas, bem definidas. É nesse conjunto que se *escondem* todas as soluções da equação, caso existam. Evidentemente, podemos usar um conjunto menor como conjunto $\mathfrak{D}$, mas corremos o risco de perder as soluções que eventualmente poderão ocorrer fora desse conjunto menor a menos que saibamos, a priori, que não existem soluções da equação inicial, fora do conjunto $\mathfrak{D}$ escolhido.

Além disso, escolhido $\mathfrak{D}$ como sendo o maior possível, não podemos esquecer que as equivalências das equações ocorrem no conjunto $\mathfrak{D}$. Por exemplo, se $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{0\,,-1\}$ e a equação inicial é equivalente em $\mathfrak{D}$ a equação $x+1=0$ então concluímos que a equação inicial não tem solução em $\mathfrak{D}$, pois $x+1=0$ não tem solução em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{0\,,-1\}$. Veja com atenção os últimos exemplos da lista a seguir.

Exemplos

❄ $x - \dfrac{2}{x-1} = 0\,;$

[1] Lembre-se que, dizer que uma expressão é *não negativa* em $\mathfrak{D}$ é o mesmo que dizer que ela é *maior ou igual a zero* em $\mathfrak{D}$.

Tal equação só pode admitir soluções em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\}$ que é o maior subconjunto da reta onde os membros da igualdade estão, simultaneamente, bem definidos.

Assim, em $\mathbb{R} - \{1\}$ temos:

$$x - \frac{2}{x-1} = 0 \overset{\text{Regra 2}}{\iff} x = \frac{2}{x-1} \overset{\text{Regra 7}}{\iff} (x-1)x = 2\,.$$

Note que para usar a **Regra 7** precisamos que a expressão $x-1$ não se anule em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\}$, o que de fato ocorre.

Agora, estamos diante de uma equação do segundo grau a qual sabemos resolver. Vamos então resolvê-la e considerar apenas as soluções em $\mathbb{R} - \{1\}$.

Temos que:

$(x-1)x = 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1\,.$

Agora, podemos concluir que as soluções da equação inicial são: -1 e 2.

❄ $\sqrt[3]{2x^2 - x} = x\,;$

Os membros da igualdade acima estão bem definidos em toda a reta.

Portanto, em $\mathbb{R}$ temos:

$\sqrt[3]{2x^2 - x} = x \overset{\text{Regra 4}}{\iff} 2x^2 - x = x^3$ (elevando ambos os membros ao cubo).

Assim, usando a **Regra 4** chegamos numa equação que sabemos resolver. Resolvendo-a, obtemos:

$2x^2 - x = x^3 \iff x(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff x(x-1)^2 = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1\,.$

Agora podemos concluir que as soluções da equação inicial são zero e 1.

❄ $(2x+3)^3 = x^6\,;$

Os membros da igualdade acima estão bem definidos em toda a reta.

Assim, em $\mathbb{R}$ temos:

$(2x+3)^3 = x^6 \overset{\text{Regra 5}}{\iff} 2x + 3 = x^2$ (extraindo a raiz cúbica de ambos os membros).

A **Regra 5** nos permitiu chegar a uma equação do segundo grau. Resolvendo-a, obtemos:

$2x + 3 = x^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1\,.$

❄ $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x+2}\,;$

Note que os membros da igualdade acima estão, simultaneamente bem definidos em $\mathfrak{D} = [\,0\,,\infty)$. Além disso, em $[\,0\,,\infty)$ ambos os membros são não negativos. Logo, podemos aplicar a **Regra 8**.

Em $[\,0\,,\infty)$ temos:

$\sqrt{x} = \sqrt[4]{x+2} \overset{\text{Regra 8}}{\iff} x^2 = x + 2$ (elevando ambos os membros à potência 4).

Agora, precisamos resolver a equação $x^2 = x + 2$ e considerar apenas as soluções em $[\,0\,,\infty)$.

Resolvendo a equação $x^2 = x + 2$ obtemos:

$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1\,.$

No entanto, $-1 \notin [\,0\,,\infty)$. Portanto, a equação inicial tem uma única solução, a saber, $x = 2$.

❄ $x^2 = (|x| - 2)^4$;

Note que os membros da igualdade acima estão, simultaneamente bem definidos em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$. Além disso, ambos os membros da igualdade são não negativos. Logo, podemos aplicar a **Regra 9** .

Em $\mathbb{R}$ temos:

$$x^2 = (|x| - 2)^4 \overset{\text{Regra 9}}{\iff} \sqrt{x^2} = (|x| - 2)^2 \iff |x| = (|x| - 2)^2$$ (extraindo a raiz quadrada de ambos os membros).

Agora, precisamos resolver a equação $|x| = (|x| - 2)^2$.

Resolvendo a equação $|x| = (|x| - 2)^2$ obtemos:

$$|x| = (|x|-2)^2 \iff |x| = |x|^2-4|x|+4 \iff |x|^2-5|x|+4 = 0 \iff (|x|-4)(|x|-1) = 0$$
$$\iff |x| = 4 \text{ ou } |x| = 1 \iff x = \pm 4 \text{ ou } x = \pm 1 \,.$$

Portanto, as soluções da equação inicial são: $-4\,,-1\,,1$ e 4.

❄ Admitamos que $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$ tem seus dois membros bem definidos no conjunto $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{-1\,,0\}$. Suponhamos também que usando as regras listadas acima conseguimos mostrar que a equação inicial é equivalente em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{-1\,,0\}$ a equação $(x+1)(x-2) = 0$. Nesse caso, concluímos que a equação $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$ tem uma única solução em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{-1\,,0\}$: a solução $x = 2$, pois esta é a única solução de $(x+1)(x+2) = 0$ em $\mathfrak{D}$.

❄ Suponhamos que $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$ tem seus dois membros bem definidos no conjunto $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\,,0\,,-1\}$. Suponhamos também que usando as regras listadas acima conseguimos mostrar que a equação inicial é equivalente em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\,,0\,,-1\}$ a equação $x(x-1) = 0$. Nesse caso, concluímos que a equação $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$ não tem solução em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\,,0\,,-1\}$, pois $x(x-1) = 0$ não tem solução em $\mathfrak{D}$.

❄ $\dfrac{x}{3x - x^2 - 2} = \dfrac{1}{x-1}$;

Temos que: $3x - x^2 - 2 = (2-x)(x-1)$. Portanto, a equação acima só pode admitir soluções em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2\,,1\}$ que é o maior subconjunto da reta onde os membros da igualdade estão, simultaneamente, bem definidos.

Assim, em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2\,,1\}$ temos:

$$\frac{x}{3x - x^2 - 2} = \frac{1}{x-1} \overset{\text{Regra 7}}{\iff} x(x-1) = (2-x)(x-1) \overset{\text{Regra 6}}{\iff} x = 2 - x \,.$$

Note que para usar a **Regra 7** precisamos que as expressões $x-1$ e $3x - x^2 - 2 = (2-x)(x-1)$ não se anulem em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2\,,1\}$, o que de fato ocorre. E para usar a **Regra 6** precisamos que $x-1$ não se anule em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2\,,1\}$ o que também ocorre.

Feitas as simplificações, estamos diante de uma equação extremamente simples de resolver. Só que devemos resolvê-la em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2\,,1\}$. Mas nesse conjunto a equação $x = 2 - x$ não tem solução. Logo, a equação inicial não tem soluções.

1.4 Operações que modificam o conjunto das soluções

Ao realizar essas operações sobre a equação inicial não perdemos soluções mas podemos introduzir *soluções estranhas* à equação inicial. Nesse caso, resolvida a equação modificada precisamos testar as soluções encontradas para saber se elas são, de fato, soluções da equação inicial.

Veremos nesta seção que tais operações parecem mais fáceis de serem administradas, pois as hipóteses serão muito mais simples. No entanto, podemos ter que pagar um preço caro por isso: é que teremos que testar todas as soluções encontradas, o que pode ser uma tarefa difícil e trabalhosa. Listamos agora algumas dessas operações.

Em todas essas regras o conjunto $\mathfrak{D}$ será sempre assumido como sendo toda a reta $\mathbb{R}$. Assim, pode ocorrer que as expressões envolvidas não estejam bem definidas em alguns pontos ou intervalos de $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

Regra 10. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos: $\boxed{\text{A}} + \boxed{\text{C}} - \boxed{\text{C}} = \boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}}$.

Regra 11. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos: $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} + \boxed{\text{C}} \implies \boxed{\text{A}} - \boxed{\text{C}} = \boxed{\text{B}}$.

Regra 12. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos: $\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} + \dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} = \boxed{\text{E}} \implies \dfrac{\boxed{\text{A}} \times \boxed{\text{D}} + \boxed{\text{B}} \times \boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{B}} \times \boxed{\text{D}}} = \boxed{\text{E}}$.

Note que essas três regras são mais gerais que as **Regras 1** , **2** e **3**. Nas **Regras 1 ,2 ,3** tínhamos hipóteses sobre as expressões $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ e $\boxed{\text{D}}$: precisavam estar bem definidas em $\mathfrak{D}$. Aqui, abandonamos essa hipótese, no entanto, precisamos testar as soluções encontradas na equação inicial.

Regra 13. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos: $\boxed{\text{A}} = \boxed{\text{B}} \implies \boxed{\text{A}}^n = \boxed{\text{B}}^n$
quando n é um inteiro positivo.

Note que essa regra é mais geral que as **Regra 4** e **8**. Por exemplo, na **Regra 8** tínhamos hipóteses sobre as expressões $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{B}}$: precisavam estar bem definidas em $\mathfrak{D}$ e serem não negativas. Aqui não exigimos isso, em contrapartida, precisamos testar as soluções encontradas na equação inicial. Além disso, n é um inteiro positivo qualquer.

Exemplos

No que segue, estamos assumindo que $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

❄ $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-2}$;

Temos que:

$\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-2} \overset{\text{Regra 13}}{\Longrightarrow} x-2 = x^2-2$ (elevando ambos os membros ao quadrado).

Agora, precisamos resolver a equação $x-2 = x^2-2$ e testar as soluções na equação inicial.

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} x-2 = x^2-2 &\iff x^2-x=0 \\ &\iff x(x-1)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=1. \end{aligned}$$

Voltando a equação inicial verificamos que nem $x=0$, nem $x=1$ são soluções da equação inicial. Consequentemente, a equação inicial não tem soluções.

❄ $\sqrt{2|x|-1} = x$;

Temos que:

$\sqrt{2|x|-1} = x \overset{\text{Regra 13}}{\Longrightarrow} 2|x|-1 = x^2$ (elevando ambos os membros ao quadrado).

Agora, precisamos resolver a equação $2|x|-1 = x^2$ e testar as soluções na equação inicial.

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} 2|x|-1 = x^2 &\iff |x|^2-2|x|+1=0 \iff (|x|-1)^2=0 \\ &\iff |x|=1 \iff x=\pm 1. \end{aligned}$$

Voltando a equação inicial, verificamos que $x=1$ é de fato solução mas, $x=-1$ não é solução.

❄ $x = \sqrt{3x-2}$;

Temos que:

$x = \sqrt{3x-2} \overset{\text{Regra 13}}{\Longrightarrow} x^2 = 3x-2$ (elevando ambos os membros ao quadrado).

Agora, precisamos resolver a equação $x^2 = 3x-2$ e testar as soluções na equação inicial.

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 = 3x-2 &\iff x^2-3x+2=0 \iff (x-1)(x-2)=0 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=2. \end{aligned}$$

Testando esses valores na equação inicial, verificamos que ambos são soluções dessa equação.

Regra 14. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos: $\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}} = \dfrac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}} \Longrightarrow \boxed{\mathsf{A}} \times \boxed{\mathsf{D}} = \boxed{\mathsf{B}} \times \boxed{\mathsf{C}}$..

Note que essa regra é mais geral que a **Regra 7**. Na **Regra 7** tínhamos hipóteses sobre as expressões $\boxed{\mathsf{A}}$, $\boxed{\mathsf{B}}$, $\boxed{\mathsf{C}}$ e $\boxed{\mathsf{D}}$: precisavam estar bem definidas em $\mathfrak{D}$ e além disso, $\boxed{\mathsf{B}}$ e $\boxed{\mathsf{D}}$ deveriam ser não nulas em $\mathfrak{D}$. Aqui não exigimos nada disso, no entanto, precisamos testar as soluções encontradas na equação inicial.

Exemplos

No que segue, estamos assumindo que $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

❄ $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}$;

Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos que:

$\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} \overset{\text{Regra 14}}{\Longrightarrow} x(x-1) = x^2 - 1$.

Agora, precisamos resolver a equação $x(x-1) = x^2 - 1$ e testar as soluções na equação inicial.

Resolvendo-a, obtemos:

$x(x-1) = x^2 - 1 \iff x^2 - x = x^2 - 1 \iff x = 1.$

Voltando a equação inicial verificamos que $x = 1$ não é solução da equação inicial. Consequentemente, a equação inicial não tem soluções.

❄ $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{3}{5(x-2)}$;

Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos que:

$\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{3}{5(x-2)} \overset{\text{Regra 14}}{\Longrightarrow} 5(x^2-2x) = 3x^2 - 12$.

Agora, precisamos resolver a equação $5(x^2-2x) = 3x^2 - 12$ e testar as soluções na equação inicial.

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} 5(x^2-2x) = 3x^2 - 12 &\iff 2x^2 - 10x + 12 = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3\,. \end{aligned}$$

Voltando a equação inicial verificamos que $x = 2$ não é solução da equação inicial mas, $x = 3$ é solução. Consequentemente, a equação inicial tem uma única solução, a saber, $x = 3$.

Regra 15. Suponha que a equação inicial tenha um termo do tipo $|E|$. Então, teremos:

$$\boxed{\text{Equação inicial}} \Longrightarrow \begin{cases} \text{equação obtida trocando } |E| \text{ por } E \text{ na equação inicial} \\ ou \\ \text{equação obtida trocando } |E| \text{ por } -E \text{ na equação inicial.} \end{cases}$$

Resolvidas as duas novas equações devemos testar todas as soluções para saber qual delas é solução da equação inicial.

Exemplos

Novamente, estamos assumindo que $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

❄ $|x+1| = 2x$;

Aplicando a regra acima temos que:

$$|x+1| = 2x \Longrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x \\ ou \\ -(x+1) = 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ 3x = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = -1/3\,. \end{cases}$$

Voltando a equação inicial, verificamos que $x = 1$ *é solução*. No entanto, $x = -1/3$ *não é solução* dessa equação. Assim, $\mathcal{S} = \{1\}$.

❄ Para a equação $x|x| + 2x = 1$ temos:

$$x|x| + 2x = 1 \implies \begin{cases} x^2 + 2x = 1 \\ ou \\ -x^2 + 2x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ ou \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\ ou \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ ou \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ ou \\ x = 1\,. \end{cases}$$

Testando as soluções na equação inicial concluímos:

- ☞ $x = 1$ não é solução;
- ☞ $x = -1 - \sqrt{2}$ não é solução pois é facil observar que um número negativo não pode ser solução da equação inicial;
- ☞ Para $x = \sqrt{2} - 1$ temos:

  $$x|x| + 2x\Big]_{x=\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1\,.$$

Portanto, $x = \sqrt{2} - 1$ é a única solução da equação proposta.

1.5 Resolvendo equações com módulo

A aplicação sucessiva da **Regra 15** nos permite resolver equações envolvendo módulo de expressões bem mais sofisticadas do que as apresentadas nos exemplos anteriores. A seguir damos uma receita para tal método.

☞ **1º Passo:**

Para cada expressão do tipo $|E|$, na expressão inicial, construímos 2 equações: uma trocando $|E|$ por E e outra trocando $|E|$ por $-E$.

☞ **2^o Passo:**

Aplicar o passo acima até eliminar todos os módulos.

Note que para cada módulo retirado construímos 2 equações. Se tivermos de retirar 2 módulos, obtermos 2^2 equações; se tivermos de retirar 3 módulos, obteremos 2^3 equações, e assim por diante.

☞ **3^o Passo:**

Retirados todos os módulos resolvemos as equações resultantes. Depois, testamos todas as soluções na equação inicial pois esse processo, baseado na **Regra 15**, pode introduzir soluções estranhas à equação inicial.

Exemplo

❄ $2 - \Big| x + |2x+1| - 2 \Big| = 2 + x\,;$

Para resolver essa equação usando a receita que acabamos de descrever, devemos fazer:

☞ Retirar um primeiro módulo, obtendo:
$2 - |x + 2x + 1 - 2| = 2 + x \quad ; \quad 2 - |x - (2x+1) - 2| = 2 + x\,.$

☞ Retirando os módulos restantes, obtemos:
$2 - (x + 2x + 1 - 2) = 2 + x \quad ; \quad 2 - \big(x - (2x+1) - 2\big) = 2 + x$
$2 + (x + 2x + 1 - 2) = 2 + x \quad ; \quad 2 + \big(x - (2x+1) - 2\big) = 2 + x\,.$

Agora, para encontrar as soluções da equação inicial devemos, resolver as quatro equações acima e testar as soluções encontradas para saber quais delas são soluções da equação inicial. Nesse processo, encontraremos todas as soluções da equação inicial.

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a equação** $\boldsymbol{x + \dfrac{x-1}{x} = 0\,.}$

Solução Os membros da equação em estudo estão bem definidos em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{0\}\,.$

Assim, em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ temos:

$$x + \frac{x-1}{x} = 0 \overset{\text{Regra 2}}{\iff} \frac{x-1}{x} = -x \overset{\text{Regra 7}}{\iff} x - 1 = -x^2 .$$

Note que podemos usar a **Regra 7** já que a expressão x não se anula em $\mathfrak{D}$.

Isso feito, precisamos resolver a equação $x - 1 = -x^2$ e considerar apenas as solução em $\mathfrak{D}$. Assim,

$$x - 1 = -x^2 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \neq 0 .$$

Logo, a equação inicial tem duas soluções: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2. **Resolva a equação $\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 1} = x + 1$.**

Solução Os membros dessa equação estão bem definidos para todo x real. Assim, seja $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos então que:

$$\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 1} = x + 1 \overset{\text{Regra 4}}{\iff} 5x^2 + 4x + 1 = (x+1)^3 .$$

Agora, precisamos resolver a equação $5x^2 + 4x + 1 = (x+1)^3$. Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 4x + 1 = (x+1)^3 &\iff 5x^2 + 4x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \iff x^3 - 2x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x^2 - 2x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} . \end{aligned}$$

Logo, as soluções da equação inicial são: zero , $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$.

3. **Resolva a equação $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{3}{x^2+1} = 1$.**

Solução O maior subconjunto da reta onde ambos os membros dessa equação estão bem definidos é $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\}$. Assim, em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{1\}$ temos:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2+1} = 1 \overset{\text{Regra 3}}{\iff} \frac{x^3 + x + 3x - 3}{(x-1)(x^2+1)} = 1 \overset{\text{Regra 7}}{\iff} x^3 + 4x - 3 = (x-1)(x^2+1) .$$

Note que podemos usar a **Regra 7** pois a expressão $(x-1)(x^2+1)$ não se anula em $\mathfrak{D}$.

Agora basta resolver a equação $x^3 + 4x - 3 = (x-1)(x^2+1)$ e considerar somente as soluções em $\mathfrak{D}$. Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x - 3 = (x-1)(x^2+1) &\iff x^3 + 4x - 3 = x^3 + x - x^2 - 1 \\ &\iff x^2 + 3x - 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \neq 1 . \end{aligned}$$

Portanto, a equação inicial tem duas soluções: $\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ e $-\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

4. **Resolva a equação $\sqrt{1-2x} = x+1$.**

Solução Nesse caso vamos usar a **Regra 13** . Assim, resolvida a equação simplificada, devemos testar suas soluções na equação inicial para saber se não estamos diante de uma solução estranha a equação inicial. Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos que:

$$\sqrt{1-2x} = x+1 \implies 1-2x = x^2+2x+1 \implies x^2+4x = 0 \implies x(x+4) = 0\,.$$

Assim, $x = 0$ ou $x = -4$. Testando esses valores na equação inicial, verificamos que zero é solução mas -4 não o é. Portanto, $\mathcal{S} = \{0\}$.

5. **Resolva a equação $\sqrt{2-x^4} = x$.**

Solução Novamente, faremos uso da **Regra 13** . Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x^4} = x &\implies 2-x^4 = x^2 \implies x^4+x^2-2 = 0 \implies x^2 = \tfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \tfrac{-1\pm 3}{2} \\ &\implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1\,. \end{aligned}$$

Voltando à equação inicial, verificamos que $x = 1$ é solução mas, $x = -1$ não o é. Assim, $\mathcal{S} = \{1\}$.

6. **Resolva a equação $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{12}$.**

Solução Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$ temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{12} &\iff \sqrt{5+x} = \sqrt{12} - \sqrt{5-x} \\ &\implies 5+x = 12 - 2\sqrt{12}\,\sqrt{5-x} + 5 - x \\ &\iff 2x - 12 = -2\sqrt{12(5-x)} \iff x-6 = -\sqrt{12(5-x)} \\ &\implies x^2 - 12x - 36 = 60 - 12x \iff x^2 = 24 \\ &\iff x = \pm 2\sqrt{6}\,. \end{aligned}$$

Resta agora verificar se esses valores são, de fato, soluções da equação inicial já que em algumas passagens utilizamos operações que podem ter introduzido soluções estranhas à equação inicial.

Primeiramente observamos que a equação tem *simetria em relação a origem*, isto é, trocando x por $-x$ a equação não se altera. Isso significa que se b é solução então $-b$ também o é, e vice-versa.

Vamos mostrar que $2\sqrt{6}$ é solução[2]:

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\,\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 10+2\sqrt{25-24} = 12\,.$$

Isso mostra que $2\sqrt{6}$ é solução. Da simetria da equação, segue que as soluções são: $2\sqrt{6}$ e $-2\sqrt{6}$.

7. **Resolva a equação $\sqrt{2x-2} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x}$.**

Solução Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

[2] Note que $5 > 2\sqrt{6}$.

$$\sqrt{2x-2}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x} \implies 2x-2+2-x+2\sqrt{(2x-2)(2-x)}=x$$
$$\implies 2\sqrt{(2x-2)(2-x)}=0 \implies x=1 \text{ ou } x=2\,.$$

Testando esses valores na equação inicial, concluímos que ambos são soluções. Portanto, o conjunto solução da equação inicial é $\mathcal{S}=\{1\,,2\}$.

8. Determine as soluções de $\sqrt[3]{2x(x-4)}=\sqrt{2x}$.

Solução Elevando ambos os membros à sexta[3] potência, teremos:

$$\sqrt[3]{2x(x-4)}=\sqrt{2x} \implies 2^2x^2(x-4)^2=2^3x^3 \iff x^2(x-4)^2=2x^3\,.$$

Agora, devemos resolver a equação $x^2(x-4)^2=2x^3$ e testar as soluções encontradas na equação inicial já que uma das operações utilizadas para simplificar a equação inicial pode ter introduzido soluções estranhas. Temos que:

$$x^2(x-4)^2=2x^3 \iff x^2(x-4)^2-2x^3=0 \iff x^2\{(x-4)^2-2x\}=0$$
$$\iff x^2=0 \text{ ou } (x-4)^2-2x=0\,.$$
$$\iff x=0 \text{ ou } (x-4)^2-2x=0\,.$$

Agora, resolvendo a equação $(x-4)^2=2x$ obtemos:

$$(x-4)^2=2x \iff x^2-8x+16=2x \iff x^2-10x+16=0$$
$$\iff x=2 \text{ ou } x=8$$

Voltando à equação $\sqrt[3]{2x(x-4)}=\sqrt{2x}$ e testando $x=0$, $x=2$ e $x=8$, concluímos que zero e 8 são soluções mas 2 não o é.

9. Resolva a equação $|x-1|+2x=|x|$.

Solução: Aqui vamos usar a **Regra 15** que diz respeito à simplificação de equações com módulo.

Operando sobre o primeiro módulo obtemos as equações
$x-1+2x=|x|\ \ ;\ \ -(x-1)+2x=|x|$.

Operando sobre o segundo módulo, obtemos:

$x-1+2x=x\ \ ;\ \ x-1+2x=-x\ \ ;\ \ -(x-1)+2x=x\ \ ;\ \ -(x-1)+2x=-x.$

Resolvendo as equações resultantes:

(a) $x-1+2x=x \iff 2x=1 \iff x=1/2\,;$

(b) $x-1+2x=-x \iff 4x=1 \iff x=1/4\,;$

(c) $-(x-1)+2x=x \iff -x+1+2x=x \iff 1=0$ (equação sem solução);

(d) $-(x-1)+2x=-x \iff -x+1+2x=-x \iff 2x=-1 \iff x=-1/2\,.$

[3] Elevar a sexta potência corresponde a elevar ao quadrado por três vezes.

Testando as soluções na equação inicial, concluímos:

- $|x-1|+2x\Big]_{x=1/2} = |x|\Big]_{x=1/2} \iff |\frac{1}{2}-1|+2\times\frac{1}{2} = |\frac{1}{2}| \iff \frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$
  e portanto $x=1/2$ não é solução;
- $|x-1|+2x\Big]_{x=1/4} = |x|\Big]_{x=1/4} \iff |\frac{1}{4}-1|+2\times\frac{1}{4} = |\frac{1}{4}| \iff \frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$
  e portanto $x=1/4$ não é solução;
- $|x-1|+2x\Big]_{x=-1/2} = |x|\Big]_{x=-1/2} \iff |-\frac{1}{2}-1|-2\times\frac{1}{2} = |-\frac{1}{2}| \iff \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$
  e portanto $x=-1/2$ é solução.

Consequentemente, a equação inicial tem apenas uma solução, a saber: $-1/2$.

☛ **Nota:** O próximo exercício mostra como pode ser traiçoeira essa técnica de simplificar equações usando operações que introduzem soluções alheias a equação inicial. Já imaginou se na equação simplificada todos os números reais são soluções ? Como descobrir, dentre eles, aqueles que de fato são soluções da equação inicial ? Esse problema aparece na próxima equação.

10. Resolva a equação $|x|+1=x+1$.

Solução Seguindo a técnica apresentada nessa lição, consideremos as equações $x+1=x+1$ e $-x+1=x+1$ obtidas trocando $|x|$ por x e $-x$ respectivamente na equação inicial. Resolvendo-as:

(a) $x+1=x+1$. Todo número real é solução dessa equação ;

(b) $-x+1=x+1 \iff 2x=0 \iff x=0$.

Devemos então, testar na equação inicial, todas as soluções encontradas.

No entanto, todo número real é solução da primeira das equações resultantes da simplificação. E agora? Claro, não vamos testar todos os números reais para saber quais deles são soluções da equação inicial. O que precisamos é encontrar uma técnica mais adequada a esse tipo de equação. Veremos isso na próxima lição.

Verificamos com facilidade que $x=0$ é solução da equação inicial. Consequentemente, o que podemos concluir no momento é: $\mathcal{S}\supset\{0\}$.

De fato a equação em estudo é bastante simples e somos capazes de dizer quais são as suas soluções, sem precisar de técnica nenhuma. E qual é essa solução ?

Exercícios

1. Resolva as equações:
   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1 = \sqrt{x}\,;$
   (b) $\dfrac{1}{x-1} + 1 = \dfrac{1}{x} - 1\,;$
   (c) $\sqrt[4]{x^2+1} = x\,;$
   (d) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\;;$
   (e) $\sqrt[3]{x^2-1} = x - 1\,.$

2. Resolva a equação:
   $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+4}} + 1 = x\,.$

3. Resolva a equação:
   $\dfrac{2x^2}{x-1} - \dfrac{2x+7}{3} + 1 = \dfrac{6x-4}{x-1}\,.$

4. Resolva as equações:
   (a) $|4+x| = x\,;$
   (b) $|x+2| = 2 - |x|\,;$
   (c) $\big||x+8| - x\big| = 0\,;$
   (d) $\big||x+4| + |x|\big| = 3\,;$
   (e) $\big||x-1| + x^2\big| = 1\,.$

5. Resolva:
   (a) $x^2 - |x| = 0\,;$
   (b) $x^3 + |x| = 0\,.$

6. Resolva a equação $\big||3-x| - |x+1|\big| = 0\,.$

7. Resolva as equações:
   (a) $\sqrt{2x^2-9} = x$
   (b) $\sqrt{4x^2-1} = x^2$
   (c) $\sqrt{3x^2-x} = 2x-1$
   (d) $\sqrt{3-2x} = 3 - \sqrt{2x+2}$
   (e) $\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} = 2$

8. Sejam $a\,,b \in (\,0\,,\infty)$. Resolva a equação
   $$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\,.$$

9. Resolva as equações:
   (a) $\sqrt{x^2+x-2} = x$
   (b) $\sqrt{2x^2+x-2} = x$
   (c) $\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{1+x}.$

10. Determine as soluções de:
    (a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$
    (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = 0$
    (c) $\sqrt[4]{2x^2-1} = x$
    (d) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x^2-2x}$
    (e) $\sqrt{\dfrac{1+x}{2+x}} = \sqrt{\dfrac{x}{3-x}}$

11. Resolva as seguintes equações:
    (a) $x^2 + |x| = |1-x|$
    (b) $\big||x-2| - 2x\big| = 2 - 4x$
    (c) $\sqrt{1 - |x-1| + x^2} = 1$
    (d) $\sqrt{|x-2x^2|} = \sqrt{2+x}\,.$

12. Determine os pontos da reta cuja distância ao ponto 1 é igual ao quadrado da sua distância ao ponto 4.

13. Determine o domínio de definição da expressão
    $$\frac{|2x-1| - x^2}{1 + x - 2x^2}$$
    e os pontos onde ela se anula.

14. Idem para a expressão
    $$\frac{|x| - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,.$$

15. Determine os pontos da reta cujo quadrado da sua distância ao ponto 1 é o dobro da distância ao ponto 3.

16. Determine os pontos da reta cujo quadrado, transladado de 5, coincide com o triplo de sua distância ao ponto 1.

17. Determine os pontos da reta cuja raiz quadrada do seu transladado por 3 coincide com a distância da raiz quadrada desse ponto ao ponto 2.

18. *Resolva a equação* $\sqrt[4]{x} = -2$.

Solução:

De: $\sqrt[4]{x} = -2$;
segue que: $(\sqrt[4]{x})^4 = (-2)^4 = 16$.
Logo: $x = 16$.
Portanto: $\mathcal{S} = \{16\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

19. *Resolva a equação* $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = 1$.

Solução:

Temos que: $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2}$.
Além disso: $\sqrt{x^2} = |x|$.
Logo,
de: $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = 1$
segue que: $|x| = 1$.
Portanto: $\mathcal{S} = \{\pm 1\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

11

Estudando o sinal de expressões

Nessa lição vamos aprender como analisar o *sinal de uma expressão*, isto é, determinar onde a expressão é positiva, onde ela é negativa e onde ela se anula. Essas são informações importantes no estudo de uma expressão.

No curso de Cálculo I você vai utilizar esse tipo de análise para determinar os intervalos nos quais as expressões estudadas são crescentes e os intervalos onde elas são decrescentes.

Comecemos com a expressão:

$$(x-1)(3-x) \tag{11.1}$$

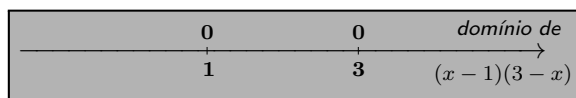
cujo domínio é toda a reta.

Primeiramente, vamos determinar os pontos onde essa expressão se anula. Para isso, devemos resolver o que chamamos de *equação associada à expressão*:

$$(x-1)(3-x)=0 \tag{11.2}$$

cujo conjunto solução é $\mathcal{S}=\{1\,,\,3\}$.

Na figura ao lado exibimos o domínio e os zeros da expressão:

0	0	domínio de
1	3	$(x-1)(3-x)$

Passemos agora a análise do sinal de $(x-1)(3-x)$ nos intervalos:

$$(-\infty\,,1\,) \quad ; \quad (\,1\,,3\,) \quad \text{e} \quad (\,3\,,\infty).$$

1 Uma regra fundamental

Na seção 3 da Lição 9 aprendemos a analizar o sinal do trinômio do segundo grau e conseqüentemente, sabemos analizar com facilidade o sinal da expressão em estudo. No entanto, vamos introduzir uma regra geral que permitirá fazer a análise do sinal de expressões bem mais complexas do que a de um trinômio do segundo grau.

Para fazer essa análise, vamos utilizar o seguinte resultado:

Se em todos os pontos de um dado intervalo da reta uma expressão está bem definida e não se anula nesse intervalo então : ou ela é sempre positiva ou ela é sempre negativa nesse intervalo.

Muito cuidado ao usar essa regra: é que ela só é verdadeira para expressões que *variam continuamente em seus domínios de definição*, isto é, expressões *contínuas*. Lembre-se também que essa regra se aplica a intervalos e não a subconjuntos quaisquer da reta.

Convenção: Salvo menção explícita em contrário, todas as expressões com as quais vamos trabalhar são expressões que variam continuamente em seus domínios de definição e sobre as quais, consequentemente, podemos aplicar o resultado que acabamos de enunciar. Os polinômios, por exemplo, são expressões contínuas. Também são expressões contínuas em seus domínios de definição: a soma, a diferença, o produto, o quociente, potências, raízes, módulo, etc de expressões contínuas. Você estudará o conceito de continuidade no curso de Cálculo I.

Convenção feita, não quer dizer que você nunca mais deve questionar a continuidade das expressões usadas no Curso de Matemática Básica. **Você deve fazer isso sempre**. Veremos mais tarde algumas expressões que não variam continuamente. Para tais expressões, claro, não podemos aplicar o resultado sobre a variação de sinal que acabamos de enunciar.

Referências para o conceito e resultados gerais sobre continuidade você pode encontrar em [1, 5, 6, 9, 10, 12, 13].

Voltando a expressão $(x-1)(3-x)$ e aplicando a regra acima, concluímos que a expressão tem um único sinal à esquerda de $x = 1$.

Como descobrir esse sinal ?

Ora, avaliando a expressão em qualquer ponto à esquerda de 1 , por exemplo, em $x = 0$, ou senão, em $x = -\pi$. Evidentemente, escolhemos um valor para a variável com o qual é mais simples fazer os cálculos. Com o mesmo processo descobriremos o sinal da expressão nos intervalos $(1, 3)$ e $(3, \infty)$. Assim,

☞ **Sinal em** $(-\infty\,,1\,)$:
Avaliando a expressão em $x = 0 \in (-\infty\,,1\,)$ temos:

$$(x-1)(3-x)\,\big]_{x=0} = (0-1)(3-0) = -3 < 0 \;\; (-)$$

☞ **Sinal em** $(\,1\,,3\,)$:
Avaliando a expressão em $x = 2 \in (\,1\,,3\,)$ temos:
$(x-1)(3-x)\big]_{x=2} = (2-1)(3-2) = 1 > 0 \;\; (+)$

☞ **Sinal em** $(\,3\,,\infty)$:
Avaliando a expressão em $x = 4 \in (\,3\,,\infty)$ temos:
$(x-1)(3-x)\big]_{x=4} = (4-1)(3-4) = -3 < 0 \;\; (-)$.

Assim, $(x-1)(3-x)$ tem o seguinte quadro de sinais, exibido abaixo:

☞ é positiva em $(\,1\,,3\,)$;

☞ é negativa em $(-\infty\,,1\,)\cup(\,3\,,\infty)$;

☞ se anula em $\mathcal{S} = \{1\,,3\}$.

Exemplo

Para conhecer o sinal de $2x+3$ usando a técnica acima descrita, devemos:

☞ Resolver a equação: $2x+3=0$:
$2x+3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=-3/2$.

☞ Estudar o sinal de $2x+3$ em $(-\infty\,,-3/2\,)$ e $(-3/2\,,\infty)$.

Sinal em $(-\infty\,,-3/2)$:
Avaliando $2x+3$ em $-2 \in (-\infty\,,-3/2)$ temos:
$2x+3\,\big]_{x=-2} = 2(-2)+3 = -1 < 0 \;(-)$

Sinal em $(-3/2\,,\infty)$:
Avaliando $2x+3$ em $0 \in (-3/2\,,\infty)$ temos:
$2x+3\,\big]_{x=0} = 2\times 0+3 = 3 > 0 \;(+)$.

− − − − − − − − 0 + + + + + + sinal de
$-\frac{3}{2}$ $2x+3$

Assim, a expressão $2x+3$:

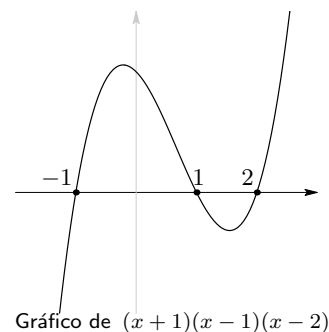
☞ é positiva em $(-3/2\,,\infty)$;

☞ é negativa em $(-\infty\,,-3/2)$;

☞ se anula em $\mathcal{S} = \{-\,3/2\}$.

Dado o gráfico de uma expressão, temos:

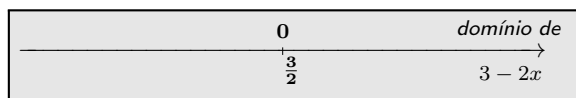
- os pontos onde a expressão *se anula* estão situados sobre o eixo das abcissas; na figura esses pontos são $-1, 1, 2$.
- nos pontos onde a expressão é *positiva* seu gráfico fica acima do eixo das abcissas; na figura, a expressão é positiva nos intervalos $(-1\,,1\,)$ e $(\,2\,,\infty)$.
- e nos pontos onde a expressão é *negativa* seu gráfico fica abaixo do eixo das abcissas; na figura a expressão é negativa nos intervalos $(-\infty\,,-1\,)$ e $(\,1\,,2\,)$.

Gráfico de $(x+1)(x-1)(x-2)$

Exercícios resolvidos

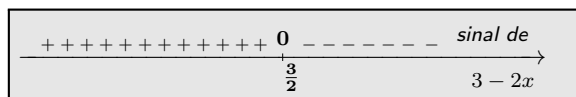
1. **Estude o sinal da expressão $3-2x$.**

Solução Para isso precisamos:

☞ Resolver a equação $3-2x=0$:
$3-2x=0 \iff x=3/2$.

$\mathbf{0}$ — *domínio de* $3-2x$ — $\frac{3}{2}$

☞ Testar o sinal em $(-\infty\,,3/2\,)$:
Em $x=0\in(-\infty\,,3/2\,)$ temos:
$3-2x\,\big]_{x=0}=3-2\times 0=3>0\ (+)$

☞ Testar o sinal em $(\,3/2\,,\infty)$:
Em $x=2\in(\,3/2\,,\infty)$ temos:
$3-2x\,\big]_{x=2}=3-2\times 2=-1<0\ (-)$

+ + + + + + + + + + + + $\mathbf{0}$ − − − − − − − *sinal de* $3-2x$ — $\frac{3}{2}$

Agora, podemos concluir que a expressão $3-2x$ tem a seguinte distribuição de sinal:

☞ é positiva em $(-\infty\,,3/2\,)$ ☞ é negativa em $(\,3/2\,,\infty)$ ☞ se anula em $x=3/2$.

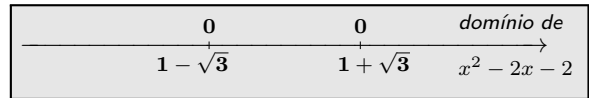
2. **Estude o sinal da expressão x^2-2x-2 .**

Solução Para esse estudo precisamos:

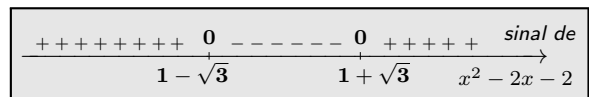
☞ Resolver a equação associada: $x^2-2x-2=0$.
Para isso, completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2-2x-2=0 &\iff (x-1)^2-1-2=0 \iff (x-1)^2=3 \\ &\iff x-1=\pm\sqrt{3} \iff x=1\pm\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula em: $1-\sqrt{3}$ e $1+\sqrt{3}$.

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	*domínio de*
$\mathbf{1-\sqrt{3}}$	$\mathbf{1+\sqrt{3}}$	x^2-2x-2

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, 1-\sqrt{3})$:
Em $x=-1 \in (-\infty\,, 1-\sqrt{3})$ temos:
$x^2-2x-2\,\big]_{x=-1} = (-1)^2 - 2\times(-1) - 2 = 1 > 0 \ \ (+)$

☞ Teste de sinal em $(1-\sqrt{3}\,, 1+\sqrt{3})$:
Em $x=0 \in (1-\sqrt{3}\,, 1+\sqrt{3})$ temos:
$x^2-2x-2\,\big]_{x=0} = 0^2 - 2\times 0 - 2$
$= -2 < 0 \ \ (-)$

☞ Teste de sinal em $(1+\sqrt{3}\,, \infty)$:
Em $x=3 \in (1+\sqrt{3}\,, \infty)$ temos:
$x^2-2x-2\,\big]_{x=3} = 3^2-2\times 3-2 = 1 > 0 \ \ (+)$

Finalizando, concluímos que x^2-2x-2 satisfaz:

- ☞ é positiva em $(-\infty\,, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}\,, \infty)$;
- ☞ é negativa em $(1-\sqrt{3}\,, 1+\sqrt{3})$;
- ☞ se anula em $\mathcal{S} = \left\{1-\sqrt{3}\ ,\ 1+\sqrt{3}\right\}$.

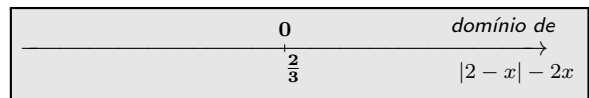
Claro, poderíamos ter usado as regras que descrevem o sinal de um polinômio do segundo grau para obter este mesmo resultado. No entanto, o objetivo aqui é exercitar a nova técnica apresentada.

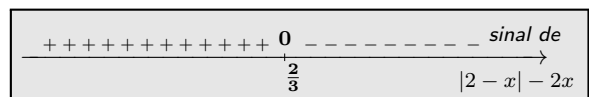
3. **Estude o sinal da expressão $|2-x|-2x$.**

Solução Para estudar o sinal dessa expressão precisamos:

☞ Resolver a equação associada: $|2-x|-2x=0$.
Eliminando o módulo obtemos as equações:
$(2-x)-2x=0 \quad ; \quad -(2-x)-2x=0$.
Resolvendo-as:
(a) $(2-x)-2x=0 \iff 2-3x=0 \iff x=2/3$;
(b) $-(2-x)-2x=0 \iff -2-x=0 \iff x=-2$.

Testando essas soluções na equação inicial, verificamos que -2 não é raiz e que $2/3$ é raiz. Portanto, a expressão inicial se anula apenas em $x=2/3$.

$\mathbf{0}$	*domínio de*
$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\lvert 2-x\rvert-2x$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, 2/3)$:
Em $x=0 \in (-\infty\,, 2/3)$ temos:
$|2-x|-2x\,\big]_{x=0} = |2-0| - 2\times 0 = 2 > 0 \ \ (+)$

☞ Teste de sinal em $(2/3\,, \infty)$:
Em $x=1 \in (2/3\,, \infty)$ temos:
$|2-x|-2x\,\big]_{x=1} = |2-1| - 2 = 1-2$
$= -1 < 0 \ \ (-)$

Finalizando, concluímos que $|2-x|-2x$ tem a seguinte distribuição de sinal:

☞ é positiva em $(-\infty\,,2/3\,)$ ☞ é negativa em $(\,2/3\,,\infty)$ ☞ se anula em $x=2/3$.

4. Estude o domínio e o sinal da expressão $\dfrac{4-x^2}{x}$.

Solução Começamos esse estudo determinando onde a expressão está bem definida.

☞ A expressão só não está bem definida quando $x=0$. Sendo assim, seu domínio de definição é o conjunto $(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)$.

☞ A expressão se anula quando
$4-x^2=0 \iff x=\pm 2$.

0	nd	0	*domínio de*
-2	0	2	$(4-x^2)/x$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2\,)$:
Em $x=-3\in(-\infty\,,-2\,)$ temos:
$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=-3}=\frac{4-(-3)^2}{-3}=5/3>0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-2\,,0\,)$:
Em $x=-1\in(-2\,,0\,)$ temos:
$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=-1}=\frac{4-(-1)^2}{-1}=-3<0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,2\,)$:
Em $x=1\in(\,0\,,2\,)$ temos:
$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=1}=\frac{4-1^2}{1}=3>0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x=3\in(\,2\,,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{4-x^2}{x}\right]_{x=2}=\frac{4-3^2}{3}=-5/3<0\ (-).$$

Finalizando, exibimos no quadro ao lado o sinal da expressão em estudo.

+ + + + + 0	− − − − nd	− − − − 0	+ + + +	*sinal de*
-2	0	2		$(4-x^2)/x$

5. Determine o domínio da expressão $\sqrt{2+x-x^2}$.

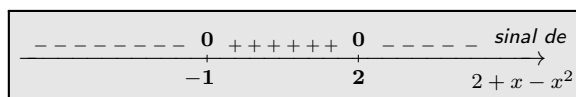
Solução Para isso, devemos determinar os valores da variável x para os quais a expressão $2+x-x^2$ é maior ou igual a zero. Temos que:

☞ A expressão $2+x-x^2$ se anula em:
$$2+x-x^2=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times 2}}{2\times(-1)}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\frac{1\mp 3}{2}$$
isto é, quando $x=-1$ ou quando $x=2$.

☞ Teste do sinal em $(-\infty\,,-1\,)$:
Em $x=-2\in(-\infty\,,-1\,)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=-2}=2+(-2)-(-2)^2$
$=-4<0\;(-)$

☞ Teste do sinal em $(-1\,,2\,)$:
Em $x=0\in(-1\,,2\,)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=0}=2+0-(0)^2=2>0\;(+)$

☞ Teste do sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x=3\in(\,2\,,\infty)$ temos:
$2+x-x^2\,\big]_{x=3}=2+3-(3)^2=-4<0\;(-)$

– – – – – – – – 0 + + + + + + 0 – – – – – *sinal de* $2+x-x^2$
-1 2

Agora, podemos concluir que o domínio de definição da expressão $\sqrt{2+x-x^2}$ é o intervalo $[-1\,,2\,]$.

6. **Estude o sinal da expressão** $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$.

Solução Vejamos onde a expressão dada está bem definida. Para isso devemos resolver a equação:

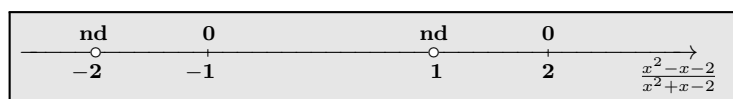
$$x^2+x-2=0 \iff x=-2 \text{ ou } x=1\,.$$

Assim, a expressão em questão só não está bem definida para $x\in\{-2\,,1\}$. Portanto, seu domínio de definição é o conjunto $(-\infty\,,-2\,)\cup(-2\,,1\,)\cup(\,1\,,\infty)$.

Para determinar os pontos onde a expressão se anula, precisamos resolver:

$$x^2-x-2=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=2\,.$$

Logo, a expressão se anula, somente em $\{-1\,,2\}$. O domínio e os zeros da expressão são mostrados no diagrama abaixo.

nd 0 nd 0
-2 -1 1 2 $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2\,)$:
Em $x=-3\in(-\infty\,,-2\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\,\big]_{x=-3}=\frac{(-3)^2-(-3)-2}{(-3)^2+(-3)-2}=\frac{10}{4}>0\;(+)$

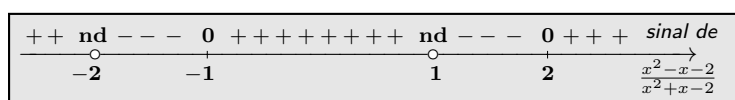
☞ Teste de sinal em $(-2\,,-1\,)$:
Em $x=-3/2\in(-2\,,-1\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\,\big]_{x=-3/2}=\frac{(-3/2)^2-(-3/2)-2}{(-3/2)^2+(-3/2)-2}$
$=-\frac{7/4}{5/4}<0\;(-)$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x=0\in(-1\,,1\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\,\big]_{x=0}=\frac{0^2-0-2}{0^2+0-2}=1>0\;(+)$

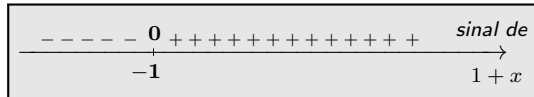
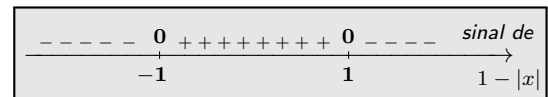
☞ Teste de sinal em $(\,1\,,2\,)$:
Em $x=3/2\in(\,1\,,2\,)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\,\big]_{x=3/2}=\frac{(3/2)^2-(3/2)-2}{(3/2)^2+(3/2)-2}$
$=-\frac{5/4}{7/4}<0\;(-)$

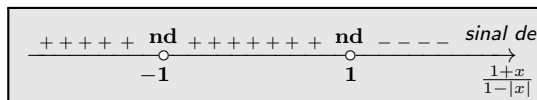
☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x=3\in(\,2\,,\infty)$ temos:
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\,\big]_{x=3}=\frac{3^2-3-2}{3^2+3-2}=\frac{4}{10}>0\;(+)$.

Finalizando o estudo do sinal da expressão, apresentamos o diagrama:

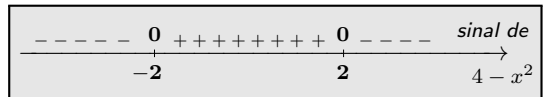
+ + nd – – – 0 + + + + + + + + + nd – – – 0 + + + *sinal de* $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$
-2 -1 1 2

7. **Estude o sinal de $\dfrac{1+x}{1-|x|}$ e o seu domínio.**

Solução Para estudar o sinal de uma expressão dada como quociente de duas outras basta estudar o sinal de cada uma delas e depois construir o estudo do sinal da expressão quociente usando a regra de quociente de sinais.

Sinal de $1+x$:

Sinal de $1-|x|$:

Compondo os sinais dos quadros acima, obtemos o sinal de $(1+x)/(1-|x|)$ mostrado no próximo quadro.

+ + + + + nd + + + + + + + nd – – – – sinal de
-1 $\quad 1 \quad \frac{1+x}{1-|x|}$

Note que o denominador se anula em $x = \pm 1$. Logo, o domínio da expressão $(1+x)/(1-|x|)$ é $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

8. **Estude o domínio e o sinal de $|x| - \sqrt{4-x^2}$.**

Solução A expressão só estará bem definida quando o radicando $4-x^2$ for maior ou igual a zero, ou seja, quando $x \in [-2\,,2\,]$ como mostra o quadro de sinais da expressão $4-x^2$ exibido ao lado. Assim, o domínio da expressão $|x|-\sqrt{4-x^2}$ é o intervalo $[-2\,,2\,]$.

Estudo do sinal de $|x| - \sqrt{4-x^2}$:

☞ Resolvendo a equação $|x| - \sqrt{4-x^2} = 0$:
$|x| - \sqrt{4-x^2} = 0 \iff |x| = \sqrt{4-x^2} \implies x^2 = 4 - x^2 \implies x = \pm\sqrt{2}$.
Testando esses valores, verificamos que são, de fato, soluções de $|x| - \sqrt{4-x^2} = 0$.
Portanto, a expressão $|x| - \sqrt{4-x^2}$ se anula somente em $x = \pm\sqrt{2} \in [-2\,,2\,]$.

☞ Teste de sinal em $[-2\,,-\sqrt{2}\,)$:
Em $x = -2 \in [-2\,,-\sqrt{2}\,)$ temos:

$$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=-2} = |-2| - \sqrt{4-(-2)^2} = 2 > 0 \ (+)$$

☞ Teste de sinal em $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$:
Em $x = 0 \in (-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$ temos:

$$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=0} = |0| - \sqrt{4-0^2} = -2 < 0 \ (-)$$

☞ Teste de sinal em $(-\sqrt{2}\,,2\,]$:
Em $x = 2 \in (-\sqrt{2}\,,2\,]$ temos:

$$|x| - \sqrt{4-x^2}\,\Big]_{x=2} = |2| - \sqrt{4-2^2} = 2 > 0 \ (+)$$

O quadro a seguir mostra a variação do sinal de $|x| - \sqrt{4 - x^2}$.

nd	+ + + **0** − − − − − − − − − − − **0** + + +	nd	sinal de
−2	$-\sqrt{2}$ ... $\sqrt{2}$	**2**	$|x| - \sqrt{4 - x^2}$

Finalizando, concluímos que $|x| - \sqrt{4 - x^2}$ satisfaz às seguintes condições:

- ☞ tem o intervalo $[-2\,,2\,]$ como domínio de definição ;
- ☞ é positiva em $[-2\,,-\sqrt{2}\,) \cup (\,\sqrt{2}\,,2\,]$;
- ☞ é negativa em $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$;
- ☞ se anula em $x = \pm\sqrt{2}$.

Exercícios

1. Estude o sinal e o domínio das expressões:

(a) $1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

(b) $x - \dfrac{x}{x-1}$

(c) $\dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

(d) $1 - \dfrac{x^3 + x - 3}{x^3 - 27}$

(e) $\dfrac{x+1}{x^2-1} - x + \dfrac{1}{x-1}$

2. Estude o sinal de:

(a) $|x+1| - \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

(b) $\dfrac{x}{4-x^2} + \dfrac{1}{x-2} - 1$

(c) $\dfrac{x^2+3x}{x+1} - \dfrac{x}{(x+1)^2} - 2x$.

(d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x+3} - \dfrac{x}{x-1}$

3. Estude o domínio e o sinal da expressão

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-1}{2} - x - 1\,.$$

4. Estude o domínio e o sinal das expressões a seguir.

(a) $\sqrt{2x^2-9} - x$
(b) $\sqrt{2x^2-9} - x^2$
(c) $\sqrt{x^2-3x} - 2x + 5$
(d) $\sqrt{3-2x} - 3 + \sqrt{2x+2}$
(e) $\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} - 2$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$2\sqrt{\frac{x}{a}} - 3\sqrt{\frac{b}{x}}$$

6. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$\sqrt{x^2+x-2} - x$$

7. Estude o domínio e o sinal da expressão:

$$\sqrt{2x^2+x-2} - x$$

8. Encontre o erro na argumentação dada abaixo.

Estudando o sinal da expressão $[x] - \frac{1}{2}$.

Temos que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ e $[x] \in \mathbb{Z}$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Logo, $[x] - \frac{1}{2}$ nunca se anula em $\mathbb{R}$.

Avaliando a expressão acima em $x = 1$ obtemos:

$\left.[x] - \frac{1}{2}\right]_{x=1} = [1] - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,.$

Conseqüentemente, a expressão $[x] - \frac{1}{2}$ é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

Onde está o erro ?

Note que a conclusão está errada pois ao avaliar a expressão $[x] - \frac{1}{2}$ no ponto $x = 0$ obtemos o valor $-\frac{1}{2}$.

9. Considere a expressão

$$\sqrt[4]{x - \frac{x+2}{x-1}}\,.$$

(a) Determine o domínio de definição dessa expressão ;

(b) Determine os pontos onde essa expressão se anula.

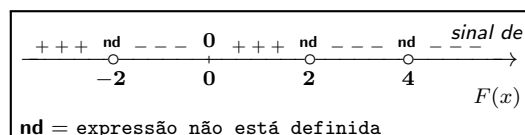
10. Uma expressão $F(x)$ tem como domínio de definição o conjunto $\mathbb{R} - \{-2\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}$. Simplificando tal expressão, obtivemos:

$$\frac{(1-x)(2x+1)(x-2)(2x-3)}{(x+2)(1+x^2)}\,.$$

(a) Analise o sinal da expressão inicial $F(x)$;
(b) Determine os pontos onde $F(x) = 0$.

11. Sobre uma determinada expressão $F(x)$ obtivemos a seguinte informação a respeito de sua distribuição de sinais:

$+++$	nd	$---$	0	$+++$	nd	$---$	nd	$---$	*sinal de* $F(x)$
	-2		0		2		4		

nd = `expressão não está definida`

O domínio da expressão é $\mathbb{R} - \{-2\,,2\,,4\}$.

Com essas informações, determine os pontos onde $F(x)$ tem a seguinte propriedade:

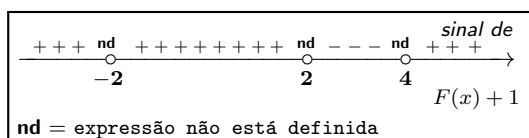
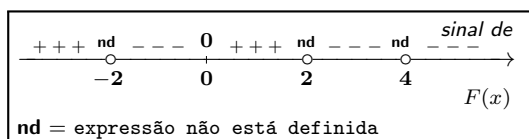
(a) $F(x) > 0$ (b) $2F(x) \leq 0$
(c) $xF(x) > 0$ (d) $(x^2 - 4)F(x) \geq 0$
(e) $(F(x))^3 > 0$ (f) $F(x-1) < 0$.

12. A informação dada no diagrama anterior sobre o sinal da expressão $F(x)$ dá a você elementos suficientes para resolver a equação $F(x) = 2$ ou pelo menos saber quantas soluções tem a equação $F(x) = 2$, ou quem sabe menos ainda, saber se a equação $F(x) = 2$ tem alguma solução ?

A resposta deve vir com uma *justificativa precisa* e essa justificativa precisa passa pela construção de exemplos.

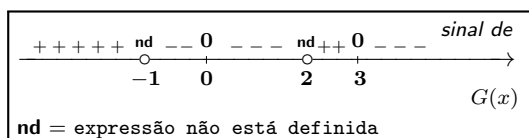
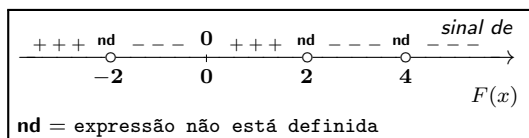
13. Os diagramas a seguir mostram a variação de sinal de uma expressão $F(x)$ e da expressão $F(x) + 1$ cujo domínio é $\mathbb{R} - \{-2\,,2\,,4\}$.

$+\,+\,+$ nd $-\,-\,-$ 0 $+\,+\,+$ nd $-\,-\,-$ nd $-\,-\,-$ *sinal de*
-2 0 2 4 $F(x)$
nd = `expressão não está definida`

$+\,+\,+$ nd $+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$ nd $-\,-\,-$ nd $+\,+\,+$ *sinal de*
-2 2 4 $F(x)+1$
nd = `expressão não está definida`

A partir desses dados o que podemos concluir sobre a expressão $F(x)$ nos intervalos $(-2\,,0)$ e $(4\,,\infty)$?

14. Analizando o sinal das expressões $F(x)$ e $G(x)$ obtivemos as seguintes informações:

$+\,+\,+$ nd $-\,-\,-$ 0 $+\,+\,+$ nd $-\,-\,-$ nd $-\,-\,-$ *sinal de*
-2 0 2 4 $F(x)$
nd = `expressão não está definida`

$+\,+\,+\,+\,+$ nd $-\,-$ 0 $-\,-\,-$ nd $+\,+$ 0 $-\,-\,-$ *sinal de*
-1 0 2 3 $G(x)$
nd = `expressão não está definida`

Aqui, os domínios das expressões $F(x)$ e $G(x)$ são respectivamente $\mathbb{R} - \{-2\,,2\,,4\}$ e $\mathbb{R} - \{-1\,,2\}$.

(a) Qual o domínio de definição das expressões:
 (i) $F(x) - G(x)$ (ii) $F(x) \times G(x)$
 (iii) $\frac{F(x)}{xG(x)}$.
(b) Estude o sinal das espressões:
 (i) $F(x) \times G(x)$ (ii) $\frac{F(x)}{xG(x)}$.
(c) Resolva as inequações:
 (i) $F(x) \cdot G(x) \leq 0$ (ii) $\frac{F(x)}{xG(x)} \geq 0$.
(d) Você saberia dizer qual o sinal da expressão $F(x) - 2$?
(e) Construa expressões $F(x)$ que tenham quadros de sinais como mostrado nesse exercício.

15. Se na expressão $F(x)$ do exercício anterior substituirmos x por $y+1$ obteremos uma expressão em y , a qual denotaremos por $A(y)$.

Conhecido o sinal de $F(x)$, como dado no exercício anterior:

(a) determine os pontos onde $A(y)$ não está bem definida ;
(b) resolva a equação $A(y) = 0$;
(c) determine os pontos onde $A(y) > 0$;
(d) descreva o quadro de sinais de $A(y)$;
(e) dê exemplo de uma expressão $F(x)$ como no exercício anterior e construa a correspondente expressão $A(y)$.

16. Repita os itens (a) , (b) , (c) e (d) do exercício 15 trocando x por $1/y$.

17. Repita os itens (a) , (b) , (c) e (d) do exercício 15 trocando x por $1/y^2$.

18. Considere a expressão $F(x)$ dada no exercício 14.

(a) Resolva as equações:
 (i) $F(y^2 - 1) = 0$;
 (ii) $F(y^2 - 1) \times F(y + 2) = 0$.
(b) Estude o sinal e o domínio de definição de
 (i) $F(y^2 - 1)$;
 (ii) $F(y^2 - 1) \times F(y + 2)$.

19. Repita os itens (a) , (b) , (c) e (d) do exercício 15 agora trocando x por $y^2 - 2y - 3$.

12

Resolução de inequações

Uma *inequação* é uma desigualdade na qual figura uma *incógnita*. *Resolver* uma inequação em $\mathbb{R}$ é encontrar os *valores reais da incógnita* que satisfazem a desigualdade. O conjunto formado por esses valores é chamado *conjunto solução da inequação* e será frequentemente denotado pela letra $\mathcal{S}$. Nesse texto estaremos interessados em resolver inequações à uma variável real.

1 Um exemplo modelo

Como resolver a inequação $x^2 - 2x < 2$?

Passando o segundo membro para o primeiro (e trocando o sinal) a questão se resume a:

Como resolver a inequação $x^2 - 2x - 2 < 0$?

Para responder essa questão, basta saber onde a expressão $x^2 - 2x - 2$ é negativa. Mas isso é exatamente o que aprendemos fazer na lição anterior. Na págima 220, fizemos um estudo do sinal da expressão $x^2 - 2x - 2$, exibido no quadro abaixo:

+ + + + + + + +	**0**	− − − − − −	**0**	+ + + + +	*sinal de*
	$\mathbf{1-\sqrt{3}}$		$\mathbf{1+\sqrt{3}}$		$x^2 - 2x - 2$

Concluímos então que:

$$x^2 - 2x - 2 < 0 \iff x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}).$$

Eqüivalentemente,

$$x^2 - 2x < 2 \iff x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

resolvendo assim a inequação proposta.

De fato, de posse do quadro de sinais de $x^2 - 2x - 2$ podemos concluir que:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 2 \leq 0 &\iff x \in [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]; \\ x^2 - 2x - 2 > 0 &\iff x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty); \\ x^2 - 2x - 2 \geq 0 &\iff x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \leq 2 &\iff x \in [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}] \\ x^2 - 2x > 2 &\iff x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty) \\ x^2 - 2x \geq 2 &\iff x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty). \end{aligned}$$

Em resumo, para resolver uma inequação, seja lá qual for o sinal da desigualdade, devemos seguir os seguintes passos:

☞ **Passo 1:**
Transponha o membro da direita para a esquerda (trocando o sinal) reduzindo a inequação dada a uma inequação com o membro da direita nulo. O membro da esquerda dessa nova inequação é dito *expressão associada a inequação*.

☞ **Passo 2:**
Determine o domínio da expressão associada a inequação.

☞ **Passo 3:**
Determine onde essa expressão se anula.

☞ **Passo 4:**
Avalie essa expressão nos pontos necessários para conhecer o seu sinal.

☛ **Nota:** *Estamos assumindo que podemos aplicar a regra fundamental enunciada na lição anterior, ou seja, que a expressão associada à inequação varia continuamente em seu domínio de definição*.

Exemplo

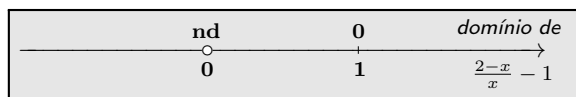
❄ Para resolver a inequação $\dfrac{2-x}{x} \geq 1$ seguindo a proposta acima, começamos com o primeiro passo:

$$\frac{2-x}{x} \geq 1 \iff \frac{2-x}{x} - 1 \geq 0.$$

Assim, para resolver a inequação inicial precisamos analisar do sinal da expressão $\dfrac{2-x}{x} - 1$:

☞ A expressão acima só não está bem definida para $x = 0$;

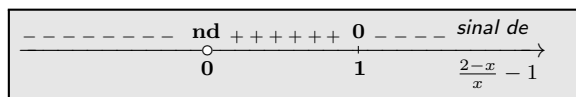
☞ Em $\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ temos:

nd 0 *domínio de*
0 1 $\frac{2-x}{x} - 1$

$$\frac{2-x}{x} - 1 = 0 \iff \frac{2-x}{x} = 1 \iff 2 - x = x \iff x = 1\,.$$

Portanto, a expressão em estudo só se anula em $x = 1$.
Essa expressão varia continuamente em seu domínio de definição. Assim, para determinar seu sinal, podemos aplicar a regra fundamental vista na lição anterior:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,0\,)$:
Em $x = -1 \in (-\infty\,,0\,)$ temos:
$$\left.\frac{2-x}{x} - 1\right]_{x=-1} = \frac{2+1}{-1} - 1 = -4 < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:
Em $x = 1/2 \in (\,0\,,1\,)$ temos:
$$\left.\frac{2-x}{x} - 1\right]_{x=\frac{1}{2}} = \frac{2-(1/2)}{1/2} - 1 = 2 > 0\ (+)$$

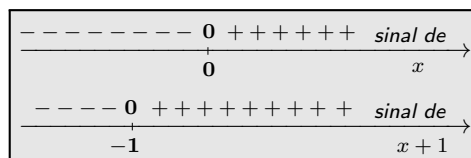
☞ Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
Em $x = 2 \in (\,1\,,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{2-x}{x} - 1\right]_{x=2} = \frac{2-2}{2} - 1 = -1 < 0\ (-)\,.$$

Agora, de posse da análise de sinais podemos concluir que

$$\frac{2-x}{x} \geq 1 \iff \frac{2-x}{x} - 1 \geq 0 \iff x \in (\,0\,,1\,]\,.$$

2 Equações e inequações com módulo

Na seção anterior aprendemos como resolver uma inequação utilizando o estudo de sinais da expressão associada. Veremos agora que essa técnica pode ser muito útil na resolução de equações e inequações envolvendo expressões com módulo. Começamos com uma equação, semelhante àquela estudada na página 214, onde tivemos dificuldade de encontrar suas soluções, usando a técnica lá apresentada.

Exemplo

❄ Vamos resolver a equação $|x| + 1 = |x+1|$.
Faremos isso, usando o estudo do sinal das parcelas x e $x+1$, o qual é mostrado no quadro ao lado.
Podemos então concluir:

☞ Para $x \in (-\infty\,, -1\,]$ a equação inicial tem a forma:
$-x+1 = -(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = -1\,.$
Logo, a equação inicial não tem soluções nesse intervalo.

☞ Para $x \in [-1\,, 0\,]$ a equação inicial toma a forma:
$-x+1 = x+1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,.$
Portanto, $x = 0 \in [-1\,, 0\,]$ é solução da equação inicial.

☞ Para $x \in [\,0\,, \infty)$ a equação inicial tem a forma:
$x+1 = x+1\,.$
Consequentemente, todo ponto do intervalo $[\,0\,, \infty)$ é solução da equação.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução da equação inicial é: $\mathcal{S} = [\,0\,, \infty)\,.$

❄ Usando a análise de sinais do exemplo anterior podemos resolver a inequação $2\,|x| + 3 > |x+1|$ da seguinte forma:

☞ Para $x \in (-\infty\,, -1\,]$ a inequação inicial toma a forma:
$-2x+3 > -(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad -x > -4 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 4\,.$
Logo, todos os pontos do intervalo $(-\infty\,, -1\,]$ são soluções da inequação inicial pois todos os pontos desse intervalo são menores do que $4\,.$

☛ Note que os pontos do conjunto $(-1\,, 4\,)$ estão fora da região onde estamos analisando a inequação, isto é, fora do intervalo $(-\infty\,, -1\,]$.

☞ Para $x \in [-1\,, 0\,]$ a inequação inicial toma a forma:
$-2x+3 > x+1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 > 3x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} > x \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}\,.$
Novamente, todos os pontos do intervalo $[-1\,, 0\,]$ são soluções da equação inicial.

☛ Note que os pontos do conjunto $(\,0\,, 2/3\,)$ estão fora da região onde estamos analisando a inequação, isto é, fora do intervalo $[-1\,, 0\,]$.

☞ Para $x \in [\,0\,, \infty)$ a inequação inicial tem a forma:
$2x+3 > x+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -2\,.$
Consequentemente, todo ponto do intervalo $[\,0\,, \infty)$ é solução da inequação inicial.

Finalizando, concluímos que a desigualdade $2\,|x| + 3 > |x+1|$ é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}\,.$

Exercícios resolvidos

1. **Resolva a inequação $2x + 1 < 0\,.$**

Solução Para isso precisamos estudar o sinal da expressão associada a essa inequação, ou seja, o sinal de $2x+1$ a qual é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição que é toda a reta.

Estudando o sinal de $2x+1$:

☞ Resolvendo a equação $2x + 1 = 0$:
$2x + 1 = 0 \iff x = -1/2$.
Portanto, a expressão associada se anula apenas em $x = -1/2$.

0 — domínio de $2x+1$ — $-\frac{1}{2}$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, -1/2\,)$:
Em $x = -1 \in (-\infty\,, -1/2\,)$ temos:
$2x + 1\,\big]_{x=-1} = 2 \times (-1) + 1 = -1 < 0$ $(-)$.

☞ Teste de sinal em $(-1/2\,, \infty)$:
Em $x = 0 \in (-1/2\,, \infty)$ temos:
$2x + 1\,\big]_{x=0} = 2 \times 0 + 1 = 1 > 0$ $(+)$.

Finalizando o estudo de sinais temos a tabela ao lado. Assim, concluímos:
$2x + 1 < 0 \iff x \in (-\infty\,, -1/2\,)$.

− − − − − − − − 0 + + + + + + — sinal de $2x+1$ — $-\frac{1}{2}$

☛ **Nota:** Fazendo o gráfico da expressão $2x + 1$ ou usando as propriedades da relação de ordem " $<$ ", poderíamos, facilmente, descobrir onde ela é negativa. No entanto, o objetivo desse exercício é exibir a aplicação da técnica que acabamos de aprender, numa situação bastante elementar.

2. **Resolva a inequação $x(4 - x) \leq 3$.**

Solução Devemos então resolver a inequação $x(4 - x) - 3 \leq 0$. Para isso, temos que fazer o estudo do sinal da expressão associada: $x(4 - x) - 3$.

Estudando o sinal de $x(4 - x) - 3$:

☞ Resolvendo a equação $x(4 - x) - 3 = 0$:

$$\begin{aligned} x(4 - x) - 3 = 0 &\iff 4x - x^2 - 3 = 0 &&\iff x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 - 4 + 3 = 0 &&\iff (x - 2)^2 = 1 \\ &\iff x - 2 = \pm 1 &&\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 1 . \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em estudo se anula somente em: 1 e 3 .

0 (em 1) — 0 (em 3) — domínio de $x(4-x)-3$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,, 1\,)$:
Em $x = 0 \in (-\infty\,, 1\,)$ temos:
$x(4 - x) - 3\,\big]_{x=0} = -3 < 0$ $(-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,1\,, 3\,)$:
Em $x = 2 \in (\,1\,, 3\,)$ temos:
$x(4 - x) - 3\,\big]_{x=2} = 1 > 0$ $(+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,3\,, \infty)$:
Em $x = 4 \in (\,3\,, \infty)$ temos:
$x(4 - x) - 3\,\big]_{x=4} = -3 < 0$ $(-)$.

Feito o estudo dos sinais, concluímos: $x(4 - x) - 3 \leq 0 \iff x \in (-\infty\,, 1\,] \cup [\,3\,, \infty)$.

Dito de outra forma,

$$x(4 - x) \leq 3 \iff x \in (-\infty\,, 1\,] \cup [\,3\,, \infty) .$$

3. **Resolva a inequação $x(2x-1)(2-x) > 0$.**

Solução Para isso, devemos fazer o estudo do sinal da expressão associada: $x(2x-1)(2-x)$.

Estudando o sinal de $x(2x-1)(2-x)$:

☞ Resolvendo a equação $x(2x-1)(2-x) = 0$:
$x(2x-1)(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1/2$ ou $x = 2$.

Portanto, a equação associada só se anula em $\mathcal{S} = \{0\,,\,1/2\,,2\}$.

0	0	0	*domínio de*
0	**1/2**	**2**	$x(2x-1)(2-x)$

Estamos diante de uma expressão que varia continuamente. Assim, podemos estudar seu sinal, fazendo:

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,0)$:
Em $x = -1 \in (-\infty\,,0)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\,\big]_{x=-1} = (-1)(-2-1)(2-(-1)) = -(-3)\times 3 = 9 > 0 \;\; (+).$

☞ Teste de sinal em $(\,0\,,\frac{1}{2}\,)$:
Em $x = \frac{1}{3} \in (\,0\,,\frac{1}{2}\,)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\,\big]_{x=1/3} = \frac{1}{3}(2\times\frac{1}{3}-1)(2-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\times(\frac{2}{3}-\frac{3}{3})(\frac{6}{3}-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{3} \;\; (-).$

☞ Teste de sinal em $(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$:
Em $x = 1 \in (\,\frac{1}{2}\,,2\,)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\,\big]_{x=1} = 1\times(2-1)\times(2-1)$
$= 1 \;\; (+).$

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x = 3 \in (\,2\,,\infty)$ temos:
$x(2x-1)(2-x)\,\big]_{x=3} = 3\times(2\times 3-1)\times(-1)$
$= -15 \;\; (-).$

Consequentemente, o conjunto solução da inequação inicial é $\mathcal{S} = (-\infty\,,0\,)\cup(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$.

+ + + +	0	− −	0	+ + + + + +	0	− − − − −	*sinal de*
	0		$\frac{1}{2}$		**2**		$x(2x-1)(2-x)$

Ou seja: $x(2x-1)(2-x) > 0 \iff x \in (-\infty\,,0\,)\cup(\,\frac{1}{2}\,,2\,)$.

4. **Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x+1}{x+2}$.**

Solução Temos que:

$$\frac{1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \iff \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0\,.$$

Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

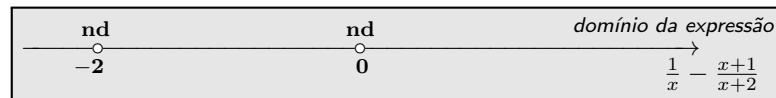
$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2}\,. \tag{12.1}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (12.1) só não está bem definida em $x = 0$ e em $x = -2$. Assim, seu domínio é:

$$(-\infty\,,-2\,)\cup(-2\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)$$

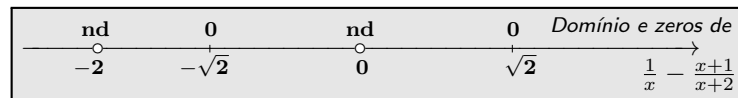
e o diagrama associado é mostrado a seguir.

nd	nd	*domínio da expressão*
-2	0	$\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}$

☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.1) para $x \neq 0\,,-2$ obtemos:

$$\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+2}{x(x+2)}-\frac{x(x+1)}{x(x+2)}=\frac{x+2-x^2-x}{x(x+2)}=\frac{2-x^2}{x(x+2)}=\frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x(x+2)}\,.$$

Concluímos então que a expressão (12.1) se anula quando, e somente quando, $x = \pm\sqrt{2}$. Temos assim o seguinte quadro de informações sobre a expressão.

nd	0	nd	0	*Domínio e zeros de*
-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}$

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (12.1) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos assim, a seguinte conclusão sobre seu sinal:

- Teste de sinal em $-3 \in (-\infty\,,-2)$:

$$\left.\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}\right]_{x=-3}=-\frac{1}{3}-\frac{-3+1}{-3+2}=-\frac{1}{3}-2<0\ \ (-)$$

- Teste de sinal em $-\frac{3}{2} \in (-2\,,-\sqrt{2})$:

$$\left.\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}\right]_{x=-3/2}=-\frac{1}{3/2}-\frac{-3/2+1}{-3/2+2}=-\frac{2}{3}+1>0\ \ (+)$$

- Teste de sinal em $-1 \in (-\sqrt{2}\,,0)$:

$$\left.\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}\right]_{x=-1}=-1-\frac{-1+1}{-1+2}=-1<0\ \ (-)$$

- Teste de sinal em $1 \in (\,0\,,\sqrt{2}\,)$:

$$\left.\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}\right]_{x=1}=1-\frac{1+1}{1+2}=1-\frac{2}{3}>0\ \ (+)$$

- Teste de sinal em $2 \in (\,\sqrt{2}\,,\infty)$:

$$\left.\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}\right]_{x=2}=\frac{1}{2}-\frac{2+1}{2+2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}<0\ \ (-)\,.$$

Temos assim, o seguinte quadro de sinais para a expressão (12.1):

$--$	nd	$+++$	0	$-----$	nd	$+++++$	0	$-----$	*sinal de*
	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x+2}$

Daí, concluímos que:

$$\frac{1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \iff \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0 \iff x \in (-2\,,-\sqrt{2}\,) \cup (\,0\,,\sqrt{2}\,)\,.$$

5. **Resolva a inequação** $\boldsymbol{\dfrac{x^2-9}{1-|x|} \geq 0}$ **.**

Solução Para isso, vamos analizar o sinal da expressão $\dfrac{x^2-9}{1-|x|}$ a qual varia continuamente em seu domínio de definição.

Estudando o sinal de $\dfrac{x^2-9}{1-|x|}$:

☞ A expressão só não está bem definida para :
$1-|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1\,.$

☞ A expressão se anula quando :
$x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3\,.$

0	nd	nd	0	*sinal de*
-3	-1	1	3	$(x^2-4)/(1-\lvert x\rvert)$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-3\,)$:
Em $x = -4 \in (-\infty\,,-3\,)$ temos:
$$\left.\frac{x^2-9}{1-|x|}\right]_{x=-4} = \frac{(-4)^2-9}{1-|-4|} = -\frac{7}{3} \quad (-).$$

☞ Teste de sinal em $(-3\,,-1\,)$:
Em $x = -2 \in (-3\,,-1\,)$ temos:
$$\left.\frac{x^2-9}{1-|x|}\right]_{x=-2} = \frac{(-2)^2-9}{1-|-2|} = 5 \quad (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x = 0 \in (-1\,,1\,)$ temos:
$$\left.\frac{x^2-9}{1-|x|}\right]_{x=0} = \frac{0^2-9}{1-|0|} = -9 \quad (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,3\,)$:
Em $x = 2 \in (\,1\,,3\,)$ temos:
$$\left.\frac{x^2-9}{1-|x|}\right]_{x=2} = \frac{2^2-9}{1-|2|} = 5 \quad (+).$$

☞ Teste de sinal em $(\,3\,,\infty)$:
Em $x = 4 \in (3\,,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{x^2-9}{1-|x|}\right]_{x=4} = \frac{4^2-9}{1-|4|} = -\frac{7}{3} \quad (-)\,.$$

Finalizando o estudo do sinal:

$---$	0	$+++$	nd	$---$	nd	$+++$	0	$---$	*sinal de*
	-3		-1		1		3		$(x^2-4)/(1-\lvert x\rvert)$

Conclusão: $\dfrac{x^2-9}{1-|x|} \geq 0 \iff x \in [-3\,,-1\,) \cup (\,1\,,3\,]\,.$

☛ **Nota:** Se estivéssemos mais atentos poderíamos ter tido menos trabalho !! Note que a expressão tem simetria em relação à origem, ou seja, assume os mesmos valores em pontos simétricos em relação à origem. Isso significa que conhecendo o sinal da expressão à esquerda da origem, também o conhecemos à direita e vice-versa.

6. **Determine o domínio das expressões:**

(a) $\sqrt[3]{x^2 - 3}$ **(b)** $\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x}}$.

Solução Passemos à análise de cada uma delas.

(a) Nesse item o radicando $x^2 - 3$ (que está bem definido para todo número real) assume valores positivos, nulos e negativos. No entanto, o índice da raíz é três (ímpar) e, consequentemente, a raíz faz sentido qualquer que seja o sinal do radicando. Assim, o domínio da expressão é todo o conjunto dos números reais.

(b) Nesse item a raíz tem índice par (no caso, 2) e portanto a expressão só estará bem definida quando o radicando for maior ou igual a zero, i.e. quando

$$x^2 - \frac{1}{x} \geq 0\,. \tag{12.2}$$

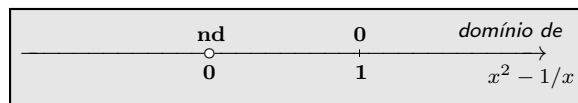
Assim, o domínio da expressão do item (b) é o conjunto solução da inequação (12.2), cuja expressão associada é $x^2 - 1/x$. Trata-se de uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição.

Estudando o sinal de $x^2 - 1/x$:

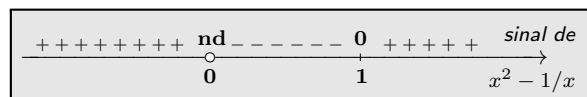
- Essa expressão está bem definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Resolvendo a equação $x^2 - 1/x = 0$:

$$x^2 - \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{x} \iff x^3 = 1 \iff x = 1\,.$$

Portanto, a expressão $x^2 - 1/x$ se anula apenas em $x = 1$.

nd   0   *domínio de*
0   1 $x^2 - 1/x$

- Teste de sinal em $(-\infty\,,0)$:
Em $x = -1 \in (-\infty\,,0)$ temos:
$$x^2 - \frac{1}{x}\Big]_{x=-1} = (-1)^2 - 1/(-1) = 2 > 0\ (+).$$

- Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:
Em $x = 1/2 \in (\,0\,,1\,)$ temos:
$$x^2 - \frac{1}{x}\Big]_{x=\frac{1}{2}} = (1/2)^2 - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{4} - 2 < 0\ (-).$$

- Teste de sinal em $(\,1\,,\infty)$:
Em $x = 2 \in (\,1\,,\infty)$ temos:
$$x^2 - \frac{1}{x}\Big]_{x=2} = 2^2 - 1/2 > 0\ (+).$$

Assim, concluímos: $x^2 - 1/x \geq 0 \iff x \in (-\infty\,,0\,) \cup [\,1\,,\infty)$. Consequentemente, o domínio da expressão

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} \quad \text{é o conjunto} \quad (-\infty\,,0\,) \cup [\,1\,,\infty)\,.$$

7. Resolva a inequação $\mathbf{1 - \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x}}$.

Solução Consideremos a expressão associada: $1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

☞ Resolvendo a equação $1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = 0$.

Para $x \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 &\iff \frac{x^2 - 1 - x}{x^2} = 0 &&\iff x^2 - x - 1 = 0 \\ &\iff \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 &&\iff \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{5}{4} \\ &\iff x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} &&\iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão associada só se anula em: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	*domínio de*
0	**nd**	**0**	$1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

☞ Teste de sinal em $\big(-\infty\,, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)$:

Para $x = -1 \in \big(-\infty\,, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)$ temos:

$$1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big]_{x=-1} = 1 - \frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(-1)} = 1 - 1 + 1 = 1 > 0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\big)$:

Para $x = -\frac{1}{2} \in \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\big)$ temos:

$$1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big]_{x=-1/2} = 1 - \frac{1}{(-1/2)^2} - \frac{1}{(-1/2)} = 1 - 4 + 2 = -1 < 0\ (-).$$

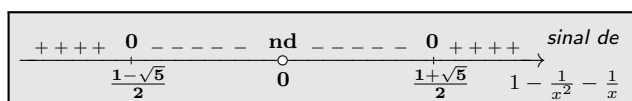
☞ Teste de sinal em $\big(0\,, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$:

Para $x = 1 \in \big(0\,, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$ temos:

$$1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big]_{x=1} = 1 - 1 - 1 = -1 < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\big)$:

Para $x = 2 \in \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\big)$ temos:

$$1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big]_{x=2} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0\ (+).$$

Finalizando, podemos afirmar que

$$1-\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x} \iff 1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\leq 0 \iff \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\right)\cup\left(0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

8. **Utilizando a técnica de análise de sinais de expressões, resolva a inequação $\boldsymbol{\frac{x-2}{x}\geq\frac{3}{3-2x}}$.**

Solução Temos que

$$\frac{x-2}{x}\geq\frac{3}{3-2x} \iff \frac{x-2}{x}-\frac{3}{3-2x}\geq 0\,.$$

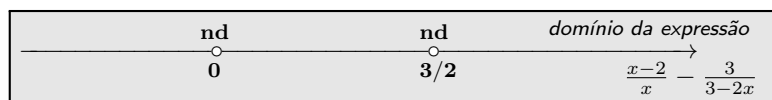
Para resolver a inequação acima, passemos a análise de sinais da expressão

$$\frac{x-2}{x}-\frac{3}{3-2x}\,. \tag{12.3}$$

☞ *Domínio da expressão*:

A expressão (12.3) só não está bem definida quando $x=0$ ou quando $x=3/2$. Assim, o domínio dessa expressão é:

$$(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,3/2\,)\cup(\,3/2\,,\infty)$$

e o diagrama associado é mostrado a seguir.

☞ *Zeros da expressão*:

Simplificando a expressão (12.3) para $x\neq 0$ e $x\neq 3/2$ obtemos:

$$\frac{x-2}{x}-\frac{3}{3-2x}=\frac{(x-2)(3-2x)-3x}{x\,(3-2x)}=\frac{-2x^2+4x-6}{x\,(3-2x)}=-\frac{2\,(x^2-2x+3)}{x\,(3-2x)}\,.$$

Por outro lado, sobre o discriminante da expressão x^2-2x+3 temos que:

$$\Delta=4-4\times 3<0\,.$$

Isso nos garante que x^2-2x+3 nunca se anula.

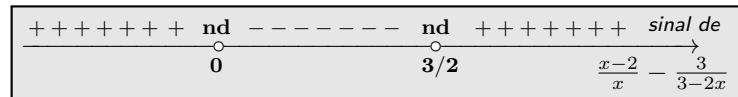
Podemos então concluir que a expressão (12.3) nunca se anula em seu domínio de definição.

☞ *Análise do sinal da expressão*:

A expressão (12.3) é uma expressão que varia continuamente em seu domínio de definição. Temos assim, a seguinte conclusão sobre seu sinal:

- Teste de sinal em $-1 \in (-\infty, 0)$:
$$\left.\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}\right]_{x=-1} = \frac{-3}{-1} - \frac{3}{3+2} = 3 - \frac{3}{5} > 0 \quad (+)$$
- Teste de sinal em $1 \in (0, 3/2)$:
$$\left.\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}\right]_{x=1} = -1 - \frac{3}{3-2} = -4 < 0 \quad (-)$$
- Teste de sinal em $2 \in (3/2, \infty)$:
$$\left.\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}\right]_{x=2} = -\frac{3}{3-4} = 3 > 0 \quad (+)$$

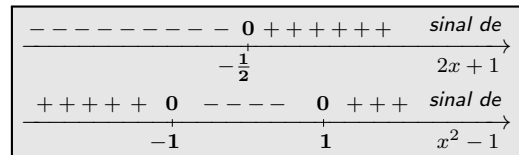
Temos assim, o seguinte quadro de sinais para a expressão (12.3):

+ + + + + + +	nd	− − − − − − − −	nd	+ + + + + + + +	*sinal de*
	0		**3/2**		$\frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x}$

Daí, concluímos que:
$$\frac{x-2}{x} \geq \frac{3}{3-2x} \iff \frac{x-2}{x} - \frac{3}{3-2x} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3/2, \infty)$$
o que finaliza a solução da questão.

9. Resolva a equação $|x^2 - 1| + 2x = |2x+1| - x^2$.

− − − − − − − − −	**0** + + + + + +	*sinal de*
	$-\frac{1}{2}$	$2x+1$

+ + + + +	**0**	− − − −	**0**	+ + +	*sinal de*
	−1		**1**		$x^2 - 1$

Solução Para isso vamos usar as informações sobre o sinal das expressões x^2-1 e $2x+1$ exibidas no quadro ao lado. Agora, podemos concluir:

☞ Para $x \in (-\infty, -1]$ a equação inicial tem a forma:
$x^2 - 1 + 2x = -(2x+1) - x^2 \iff 2x^2 + 4x = 0 \iff 2x(x+2) = 0$.
Como $0 \notin (-\infty, -1]$, concluímos que a equação inicial tem apenas a solução $x = -2$ no intervalo $(-\infty, -1]$.

☞ Para $x \in [-1, -1/2]$ a equação inicial tem a forma:
$-(x^2 - 1) + 2x = -(2x+1) - x^2 \iff 4x = -2 \iff x = -1/2$.
Nesse caso temos apenas a solução $x = -1/2$ no intervalo $[-1, -1/2]$.

☞ Para $x \in [-1/2, 1]$ a equação inicial tem a forma:
$-(x^2 - 1) + 2x = 2x + 1 - x^2 \iff -x^2 + 1 + 2x = 2x + 1 - x^2$.
Segue daí que todos os pontos do intervalo $[-1/2, 1]$ são soluções da equação.

☞ Para $x \in [1, \infty)$ a equação inicial tem a forma:
$x^2 - 1 + 2x = 2x + 1 - x^2 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1$.
Como $-1 \notin [1, \infty)$ segue que a equação tem apenas a solução $x = 1$ no intervalo $[1, \infty)$.

Finalizando, concluímos que o conjunto solução é: $\mathcal{S} = \{-2\} \cup [-1/2\,,1\,]$.

10. **Para cada número real x defina**

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x+3 & \textbf{quando } x \geq -4 \\ |x| & \textbf{quando } x < -4\,. \end{cases}$$

(a) Calcule $\langle -4 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ e $\langle -5 \rangle$;

(b) Resolva a equação $\langle 2x \rangle = 6$.

Solução

(a) Segue da definição de $\langle x \rangle$ que:

- $\langle -4 \rangle = -4+3 = -1$ pois $-4 \geq -4$;
- $\langle 2 \rangle = 2+3 = 5$ pois $2 \geq -4$;
- $\langle -5 \rangle = |-5| = 5$ pois $-5 < -4$.

(b) Para resolver a equação $\langle 2x \rangle = 6$ devemos considerar dois casos.

Caso 1: $2x \geq -4 \iff x \geq -2$.

Nesse caso, a equação $\langle 2x \rangle = 6$ toma a forma:

$$2x+3 = 6 \iff 2x = 3 \iff x = 3/2\,.$$

Assim, a única solução de $\langle 2x \rangle = 6$ em $[-2\,,\infty)$ é $3/2$.

Caso 2: $2x < -4 \iff x < -2$.

Nesse caso, a equação $\langle 2x \rangle = 6$ toma a forma:

$$|2x| = 6 \iff |x| = 3 \iff x = \pm 3\,.$$

Logo, a única solução de $\langle 2x \rangle = 6$ em $(-\infty\,,-2)$ é -3 .

Mostramos assim, que $\langle 2x \rangle = 6$ tem exatamente duas solução, a saber: $3/2$ e -3 .

11. **Resolva a inequação $|2x+1| + |x-2| > x$.**

Solução Começamos, resolvendo a equação associada $|2x+1| + |x-2| = x$. Para isso, vamos usar a distribuição de sinais das expressões $2x-1$ e $x-2$ para eliminar o módulo e resolver a equação. Da tabela de sinais ao lado concluímos que:

☞ Para $x \in (-\infty\,,-1/2\,]$ a equação associada $|2x+1| + |x-2| - x = 0$ toma a forma:
$-(2x+1) - (x-2) - x = 0 \iff 4x = 1$.
Como $1/4 \notin (-\infty\,,-1/2\,]$ segue que essa equação associada não tem soluções em $(-\infty\,,-1/2\,]$.

☞ Para $x \in [-1/2\,,2\,]$ a equação associada toma a forma:
$2x+1-(x-2)-x=0 \iff 3=0$ ou seja, a equação não tem soluções em $[-1/2\,,2\,]$.

☞ Para $x \in [\,2\,,\infty)$ a equação associada toma a forma:
$2x+1+x-2-x=0 \iff 2x=1 \iff x=1/2\,.$
Novamente, a equação associada não tem soluções em $[\,2\,,\infty)\,.$

Portanto, $|2x+1|+|x-2|-x$ nunca se anula. Para conhecer o seu quadro de sinais, basta avaliá-la em $x=0$ já que trata-se de uma expressão que varia continuamente em toda a reta. Nesse caso temos:

$$|2x+1|+|x-2|-x\Big]_{x=0} = |2\times 0+1|+|0-2|-0 = 3 > \ (+)\,.$$

Consequentemente,

$$|2x+1|+|x-2|-x>0 \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

Dito de outra forma,

$$|2x+1|+|x-2|>x \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

12. Considere a expressão $\mathbf{2-|x-2x^2|}$.

(a) Esboce o gráfico ;

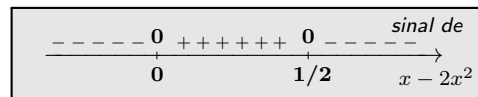
(b) Determine o maior e o menor valor que essa expressão assume no intervalo $[-1\,,1\,]$.

Solução

(a) Para esboçar o gráfico dessa expressão vamos estudar o sinal de $x-2x^2$ a fim de eliminarmos o módulo.

Temos que: $x-2x^2=0 \iff x(1-2x)=0 \iff x=0$ ou $x=1/2\,.$

Como o coeficiente do termo do segundo grau na expressão $x-2x^2$ é negativo, resulta que a distribuição de sinais dessa expressão é o exibido na figura ao lado.

sinal de $x-2x^2$	$-----$ **0** $++++++$ **0** $-----$
	0 ... **1/2**

Passemos agora a análise dos seguintes casos.

Caso 1: $x \in (-\infty\,,0\,] \cup [\,1/2\,,\infty\,)\,.$

Nesse caso a expressão $2-|x-2x^2|$ toma a forma:

$$\begin{aligned} 2-|x-2x^2| &= 2+(x-2x^2) = -2x^2+x+2 = -(2x^2-x-2)\\ &= -\Big[2\Big(x-\frac{1}{4}\Big)^2-\frac{1}{8}-2\Big] = -2\Big(x-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{17}{8}\,. \end{aligned} \qquad (12.4)$$

Sabemos que o gráfico da expressão em (12.4) é o da parábola que

- tem a reta de equação $x=1/4$ como eixo de simetria ;
- assume $17/8$ como seu maior valor ;

- e se anula em

$$-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16} \iff x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4} \iff x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Conseqüentemente, o gráfico da expressão $2-|x-2x^2|$ coincide com o da parábola acima descrita no conjunto $(-\infty\,,0\,]\cup[\,1/2\,,\infty\,)$.

Note que 0 e $1/2$ são simétricos em relação à $1/4$. Além disso, temos que

$$\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\in(-\infty\,,0\,]\cup[\,1/2\,,\infty\,).$$

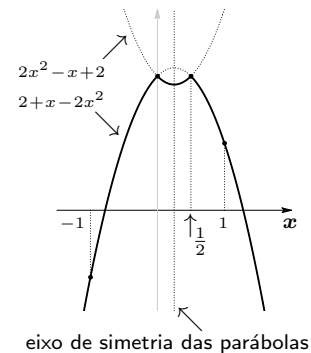
Caso 2: $x\in[\,0\,,1/2\,]$.

Nesse caso a expressão $2-|x-2x^2|$ toma a forma:

$$\begin{aligned}2-|x-2x^2| &= 2-x+2x^2=2x^2-x+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+2\\ &= 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}.\end{aligned} \tag{12.5}$$

Portanto, o gráfico da expressão em (12.5) no intervalo $[\,0\,,1/2\,]$ coincide com o da parábola que:

- tem a reta de equação $x=1/4$ como eixo de simetria ;
- assume $15/8$ como seu menor valor ;
- e nunca se anula.

Na figura ao lado o gráfico esboçado em linha contínua é o gráfico da expressão em estudo, enquanto que em linha pontilhada são mostradas as partes restantes das parábolas que usamos para compor o gráfico da expressão $2-|x-2x^2|$.

(b) Para responder o item (b) basta observa o gráfico ao lado no intervalo $[-1\,,1\,]$.

- O maior valor é assumido na origem e no ponto $1/2$ e vale 2 já que: $2+x-2x^2\,\big]_{x=0}=2=2+x-2x^2\,\big]_{x=1/2}$
- O menor valor é assumido em -1 e vale $2+x-2x^2\,\big]_{x=-1}=2-1-2=-1$.

13. **Considere a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$.**

   (a) Esboce o gráfico ;

   (b) Determine o maior e o menor valor que essa expressão assume no intervalo $[-1\,,3\,]$ e em quais pontos desse intervalo esses valores são assumidos.

Solução

(a) Para esboçar o gráfico dessa expressão vamos estudar o sinal de $x-1$ que é de fácil descrição:

- $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$;
- $x-1 \leq 0 \iff x \leq 1$;

Passemos então a análise dos seguintes casos.

Caso 1: $x \geq 1$.

Nesse caso a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ toma a forma:

$$2|x-1|-(x-1)^2 = 2(x-1)-(x-1)^2 = (x-1)[2-(x-1)] = (x-1)(3-x)\,. \tag{12.6}$$

Sabemos que o gráfico da expressão em (12.6) é o da parábola que

- tem coeficiente do termo de segundo grau negativo ;
- se anula em $x=1$ e em $x=3$;
- tem a reta de equação $x=2$ como eixo[1] de simetria ;
- assume seu maior valor em $x=2$ e tal valor é 1 .

Assim, o gráfico da expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ coincide com a parábola acima descrita em $[\,1\,,\infty\,)$.

Caso 2: $x \leq 1$.

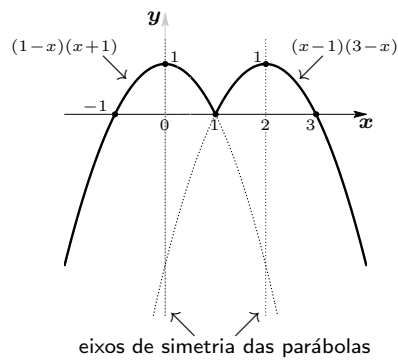
Nesse caso a expressão $2|x-1|-(x-1)^2$ toma a forma:

$$2|x-1|-(x-1)^2 = -2(x-1)-(x-1)^2 = -(x-1)(2+x-1) = -(x-1)(x+1)\,. \tag{12.7}$$

Sabemos que o gráfico da expressão (12.7) é o da parábola que

- tem coeficiente do termo de segundo grau negativo ;
- se anula em $x=1$ e em $x=-1$;
- tem a reta de equação $x=0$ como eixo de simetria ;
- assume seu maior valor em $x=0$ e tal valor é 1 .

Na figura a seguir, superpomos as duas parábolas. O gráfico esboçado em linha contínua é o gráfico da expressão em estudo, enquanto que em linha pontilhada são mostradas as partes restantes das parábolas que usamos para compor o gráfico da expressão $2|x-1|-(x-1)^2$.

[1]Lembrese que as raízes são simétrica em relação ao eixo de simetria.

(b) Para responder o item (b) basta observa o gráfico acima em $[-1\,,3\,]$.

- O maior valor é assumido na origem e no ponto 2 e vale 1 já que: $2|x-1|-(x-1)^2\big|_{x=0} = 1 = 2|x-1|-(x-1)^2\big|_{x=2}$
- O menor valor é assumido nos pontos -1 , 1 e 3 e vale zero.

Exercícios

1. Use a análise de sinais de expressões do primeiro e do segundo graus para resolver as seguintes inequações:

(a) $2x-4 \leq 5$ (b) $x^2-1 \geq 4$
(c) $y^2+5 \leq 4y$ (d) $y^2 < 18y-77$.

2. Resolva as inequações:

(a) $y^4 \leq 18y^2-77$
(b) $x-\sqrt{x} < 4$.

3. Use o estudo do sinal do trinômio do segundo grau para resolver as inequações.

(a) $2x^2-x \leq 3$
(b) $x \leq x^2-1$
(c) $x-2x^2 \geq 3x-2$
(d) $x^2-x^3 > 3x$.

4. Analize o sinal das expressões e resolva as inequações dadas:
(a) $|x-3|-2$ e $|x-3|-2 < 0$
(b) $|4-x|-x$ e $|4-x| > x$
(c) $\big||x+8|-x\big|$ e $\big||x+8|-x\big| < 0$
(d) $x^2-|x|$ e $x^2 > |x|$.

5. Resolva as inequações:
(a) $x(2-x) > x$
(b) $x(x+1) \leq x^2$
(c) $(x-1)^2(x^2-4) \leq 4(x-1)$
(d) $x(x-1)(1+x^3) < x(x-1)$.

6. Quantas soluções inteiras as inequações do exercício anterior admitem ?

7. Analise o sinal das expressões associadas as inequações a seguir e resolva essas inequações:

(a) $x \geq \dfrac{x}{x-1}$
(b) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} \leq 0$
(c) $1 \leq \dfrac{x^3+x-3}{x^3-27}$
(d) $\dfrac{x+1}{x^2-1} \leq x - \dfrac{1}{x-1}$.

8. Resolva as inequações:

(a) $\sqrt{2x^2-9} \leq x$
(b) $\sqrt{2x^2-9} > x^2$
(c) $\sqrt{x^2-3x} \geq 2x-5$
(d) $\sqrt{3-2x} < 3-\sqrt{2x+2}$.

9. Resolva a inequação

$$\sqrt{x-3} \geq 2-\sqrt{8x+1}\,.$$

10. Resolva a inequação

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x} \geq \sqrt{2x+4}\,.$$

11. Resolva a inequação

$$\sqrt{x^2+x-2} \leq x\,.$$

12. Resolva a inequação

$$\sqrt{2x^2+x-2} \leq x\,.$$

13. Resolva a inequação

$$x-6 < \frac{18-15x}{x^2+2x-3}\,.$$

14. Determine os pontos da reta cujo quadrado da sua distância ao ponto 1 é menor do que o dobro da distância ao ponto 3 .

15. Determine os pontos da reta cujo quadrado, transladado de 5 é menor ou igual ao triplo de sua distância ao ponto 1 .

16. Determine os pontos da reta cuja raiz quadrada do seu transladado por 3 é maior do que a distância da raiz quadrada desse ponto ao ponto 1 .

17. Em cada item determine os valores de x para os quais temos:

(a) $x \leq 2x-1 < |x|+1$
(b) $x+1 \geq x^2-2x \geq 1$
(c) $\sqrt{x^2-x} > 2x-1 > x^2/2$.

18. Deseja-se construir un triângulo com lados x, $x+1$ e $x+2$ onde $x \in (0, \infty)$. Pergunta-se: quais valores o parâmetro x não pode assumir?

Lembre-se que três reais positivos são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, um deles é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois. Aqui estamos entendendo que a diferença se refera a:

número maior - número menor.

Veja no Apêndice B como vizualizar geometricamente este resultado.

19. Use a técnica de completar quadrados para mostrar que:

(a) $x^3 + x^2 + x \geq 3x/4$ quando $x \geq 0$;
(b) $x^3 + x^2 + x \leq 3x/4$ quando $x \leq 0$.

20. Mostre que $(x^2 - x + 4)(x^2 + 4x + 5) \geq \frac{15}{4}$.

21. Mostre que a soma de um número real positivo com seu inverso não pode ser menor do que 2.

22. Resolva as seguintes equações:

(a) $|x-1| - x = |2x+1|$
(b) $x^2 - 2|x-1| = 2$
(c) $|x^2 - 2x| = 2x + 1$
(d) $|x^2 - 3x - 1| = |1 - 2x| + 1$.

23. Use o exercício anterior e resolva as seguintes inequações:

(a) $|x-1| - x < |2x+1|$
(b) $x^2 - 2|x-1| > 2$
(c) $|x^2 - 2x| \leq 2x + 1$
(d) $|x^2 - 3x - 1| \geq |1 - 2x| + 1$.

24. Faça o gráfico de cada uma das expressões:

(a) $|x| - \frac{x}{2} + |2x - 5| - 3$
(b) $x^2 - 2|x-1| + 2$
(c) $|x^2 - 2x| - x$
(d) $|x^2 - 3x| - |1 - x| - 1$.

25. Resolva as seguintes equações:

(a) $\dfrac{1}{|x-2|} + |1 - 2x| = 1$
(b) $\dfrac{2 - |x|}{x^2 - 2|x-1|} = 1$
(c) $\dfrac{1}{|x^2 - 2x|} = \dfrac{1}{2x+1}$.

26. Resolva as inequações a seguir usando a técnica de análise de sinais. Nos itens abaixo as expressões associadas às inequações, variam continuamente em seus respectivos domínios de definição.

(a) $\dfrac{1}{|x-2|} + |1 - 2x| < 1$
(b) $\dfrac{2 - |x|}{x^2 - 2|x-1|} > 1$
(c) $\dfrac{1}{|x^2 - 2x|} \leq \dfrac{1}{2x+1}$.

27. Determine o domínio da expressão $E(x)$ e os pontos onde ela se anula:

$$E(x) := \sqrt{\frac{x^2 - |x| - 2}{2 - |x-2|}} - 1 .$$

28. A expressão definida no exercício anterior varia continuamente em todo o seu domínio de definição. Dê a distribuição de sinais dessa expressão.

29. Esboce o gráfico da expressão $E(x)$ definida por:

$$E(x) := \begin{cases} 2x+1 & \text{quando } x \geq 0 \\ 1 & \text{quando } x \leq 0 . \end{cases}$$

30. Esboce o gráfico de

$$E(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{quando } x \leq 0 \\ x+1 & \text{quando } x > 0 . \end{cases}$$

31. Considere a expressão

$$E(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{quando } x \leq 1 \\ x+1 & \text{quando } x > 1 . \end{cases}$$

(a) Calcule $E(-1)$, $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$;
(b) Esboce o gráfico dessa expressão.

13

Potências

Nessa lição vamos relembrar a noção de potência de números reais. Uma *potência* será entendida como uma expressão da forma $\boldsymbol{a^b}$ onde $\boldsymbol{a}$ é a *base* da potência e $\boldsymbol{b}$ o *expoente*.

1 Expoentes inteiros

Dado um número real $\boldsymbol{a}$ qualquer temos:
$a^1 := a$
$a^2 := a \times a$
$a^3 := a \times a \times a$
e assim sucessivamente.

Isto é, para cada inteiro positivo n

$$a^n := \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fatores } a}$$

Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$ definimos $\boldsymbol{a^0 := 1}$. No entanto, **não definimos a potência $\boldsymbol{0^0}$**.

Se $a \neq 0$ então[1] $a^n \neq 0$. Nesse caso, $\dfrac{1}{a^n}$ está bem definido e o denotaremos por a^{-n}.

Precisamente, dado um número real $\boldsymbol{a \neq 0}$ temos:

$a^{-1} := \dfrac{1}{a}$; $a^{-2} := \dfrac{1}{a^2}$; $a^{-3} := \dfrac{1}{a^3}$

e assim sucessivamente.

Isto é, para cada inteiro positivo n

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}\,.$$

[1]Isso segue do seguinte fato: se um produto de n números reais se anula então pelo menos um dos fatores se anula. Estudamos essa propriedade na página 74.

Repare que as igualdades do quadro anterior não fazem sentido quando $a = 0$. Isso significa que $0^{-1}, 0^{-2}, 0^{-3}, \ldots$ não estão bem definidos. No entanto, 0^1 ; 0^2 ; 0^3 ; $\cdots$ e assim sucessivamente, estão bem definidos e valem zero.

Exemplos

- ❄ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- ❄ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- ❄ $(-\pi)^1 = -\pi$ e $\pi^1 = \pi$
- ❄ $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10000}$
- ❄ $(-\pi)^{-1} = \dfrac{1}{(-\pi)^1} = \dfrac{1}{-\pi} = -\dfrac{1}{\pi}$
- ❄ $(-1)^9 = -1$ e $(-1)^{16} = 1$
- ❄ $0{,}2^3 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$
- ❄ $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$
- ❄ $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- ❄ $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$.

2 Expoentes racionais

Vamos agora revisar as potências da forma $a^{\frac{m}{n}}$ onde $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Comecemos com $a^{\frac{1}{n}}$ onde $n \geq 2$. Ela é dita *raiz n-ésima do número* a e também é denotada por $\sqrt[n]{a}$. Nesse caso, dizemos que a é o *radicando* e n é o *radical* ou *índice* da raiz.

2.1 Raízes

Antes de definir raiz de um número real relembramos que elas se enquadram em dois tipos distintos:

☞ raízes de *índice ímpar* como $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt[9]{a}$, $\sqrt[11]{a}$, ...
que podem ser extraídas qualquer que seja o número real a;

☞ raízes de *índice par* como $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[10]{a}$, ...
que só podem ser extraídas quando $a \geq 0$.

Raízes de índice ímpar.

Dado um número real $\boldsymbol{a}$ qualquer definimos:

- $\sqrt[3]{a} = b$ quando $b^3 = a$;
  ☞ $\sqrt[3]{216} = 6$ pois, $6^3 = 216 \quad \therefore \quad 216^{\frac{1}{3}} = 6$
- $\sqrt[5]{a} = b$ quando $b^5 = a$;
  ☞ $\sqrt[5]{-1024} = -4$ pois, $(-4)^5 = -1024 \quad \therefore \quad \big(-1024\big)^{\frac{1}{5}} = -4$
- $\sqrt[7]{a} = b$ quando $b^7 = a$;
  ☞ $\sqrt[7]{2187} = 3$ pois, $3^7 = 2187 \quad \therefore \quad 2187^{\frac{1}{7}} = 3$
- $\sqrt[9]{a} = b$ quando $b^9 = a$;
  ☞ $\sqrt[9]{-512} = -2$ pois, $(-2)^9 = -512 \quad \therefore \quad (-512)^{\frac{1}{9}} = -2$

e assim sucessivamente.

Definição. Dados $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$ um inteiro *ímpar* então:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{quando} \qquad b^n = a\,.$$

Raízes de índice par.

Dado um número real $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$ temos:

- $\sqrt{a} = b$ quando $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ e $b^2 = a$;
  ☞ $\sqrt{49} = 7$ pois, $7 \geq 0$ e $7^2 = 49 \quad \therefore \quad 49^{\frac{1}{2}} = 7$
- $\sqrt[4]{a} = b$ quando $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ e $b^4 = a$;
  ☞ $\sqrt[4]{625} = 5$ pois, $5 \geq 0$ e $5^4 = 625 \quad \therefore \quad 625^{\frac{1}{4}} = 5$
- $\sqrt[6]{a} = b$ quando $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ e $b^6 = a$;
  ☞ $\sqrt[6]{729} = 3$ pois, $3 \geq 0$ e $3^6 = 729 \quad \therefore \quad 729^{\frac{1}{6}} = 3$
- $\sqrt[8]{a} = b$ quando $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ e $b^8 = a$;
  ☞ $\sqrt[8]{256} = 2$ pois, $2 \geq 0$ e $2^8 = 256 \quad \therefore \quad 256^{\frac{1}{8}} = 2$

e assim sucessivamente.

Definição. Se $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$ é um inteiro *par* colocamos:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{quando} \qquad b \geq 0 \qquad \text{e} \qquad b^n = a\,.$$

Relembramos que para $n \geq 2$, temos que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, por definição.

☛ Cuidado!! Pelo que acabamos de aprender, a potência $a^{\frac{1}{n}}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, pode não estar bem definida.

Exemplos

❄ $\sqrt{0} = 0 = 0^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{0} = 0 = 0^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{0} = 0 = 0^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{0} = 0 = 0^{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[6]{0} = 0 = 0^{\frac{1}{6}}$; ...

❄ Além disso, dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ temos que: $\sqrt[n]{a} = 0 \iff a = 0$;

ou, equivalentemente, $a^{\frac{1}{n}} = 0 \iff a = 0$.

❄ $\sqrt{1} = 1 = 1^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{1} = 1 = 1^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{1} = 1 = 1^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{1} = 1 = 1^{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[6]{1} = 1 = 1^{\frac{1}{6}}$; ...

❄ Além disso, dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ temos que: $\sqrt[n]{a} = 1 \iff a = 1$;

ou, equivalentemente, $a^{\frac{1}{n}} = 1 \iff a = 1$.

❄ $\sqrt{-1}$ não está bem definida pois não existe um número real $b \geq 0$ tal que $b^2 = -1$ já que $b^2 \geq 0$;
e isso significa que $(-1)^{\frac{1}{2}}$ não está bem definido.

❄ $\sqrt[4]{-1}$ não está bem definida pois não existe um número real $b \geq 0$ tal que $b^4 = -1$;
e isso significa que $(-1)^{\frac{1}{4}}$ não está bem definido.

❄ No entanto, temos que;

$\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[5]{-1} = -1$; $\sqrt[7]{-1} = -1$; $\sqrt[9]{-1} = -1$; $\sqrt[11]{-1} = -1$; ...

ou seja,

$(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$; $(-1)^{\frac{1}{5}} = -1$; $(-1)^{\frac{1}{7}} = -1$; $(-1)^{\frac{1}{9}} = -1$; $(-1)^{\frac{1}{11}} = -1$; ...

❄ Dado $a \in \mathbb{R}$ temos que:

$\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt[5]{a^5} = a$; $\sqrt[7]{a^7} = a$; $\sqrt[9]{a^9} = a$; $\sqrt[11]{a^{11}} = a$; ...

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$; $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5 = a$; $\left(\sqrt[7]{a}\right)^7 = a$; $\left(\sqrt[9]{a}\right)^9 = a$; $\left(\sqrt[11]{a}\right)^{11} = a$; ...

$\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt[4]{a^4} = |a|$; $\sqrt[6]{a^6} = |a|$; $\sqrt[8]{a^8} = |a|$; $\sqrt[10]{a^{10}} = |a|$; ...

☛ Quais são os números reais que elevados ao quadrado produzem a^2 como resultado? Sabemos que esses números são $a, -a, |a|$ e $-|a|$. Qual deles é a raiz quadrada de a^2? Bem, o único desses números que é **maior ou igual a zero, independentemente do valor de a** é $|a|$. Assim, $\sqrt{a^2} = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

❄ Dado $a \in \mathbb{R}$ temos que:

$\sqrt{a^4} = a^2$ pois $a^2 \geq 0$ e $(a^2)^2 = a^2 \times a^2 = a^4$.

$\sqrt{a^6} = |a|^3$ pois $|a|^3 \geq 0$ e $(|a|^3)^2 = |a|^3 \times |a|^3 = |a|^6 = a^6$.

☛ Note que a^3 também satisfaz a condição $(a^3)^2 = a^6$, no entanto a^3 pode ser negativo. É o caso, por exemplo quando $a = -1$.

Você deve estar perguntando: *dados um número real positivo e um inteiro $n \geq 2$ será que sempre existe a raiz n-ésima desse número?*

A resposta é **SIM** mas não dispomos aqui das ferramentas matemáticas necessárias para demonstrá-lo. De fato, nas hipóteses acima, tal número não apenas existe, como também é único. Esse fato será utilizado, com freqüência, daqui para frente.

Para raízes de índice ímpar temos as seguintes propriedades.

Dados $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $n \geq 3$ um inteiro ímpar, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}\,.$$

Não é difícil provar essas propriedades. A primeira delas é conseqüência da definição de raíz. Para demonstrar a segunda, é suficiente mostrar que elevando à potência n o membro à direita da igualdade obtemos como resultado o número $-a$. Vejamos:

$$\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (-1)^n a = -a \quad \text{pois } n \text{ é ímpar}\,.$$

Para o caso par temos a seguinte propriedade.

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ um inteiro par, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \ , \ \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ , \ \forall\, a \in [\,0\,,\infty\,)\,.$$

Exemplos

- ❄ $\sqrt[3]{(1-x)^3} = 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ❄ $\sqrt[5]{(1-x^2)^5} = \sqrt[5]{-(x^2-1)} = -\sqrt[5]{x^2-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ❄ $\sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ❄ $\sqrt[4]{(1+|x|)^4} = \big|1+|x|\big| = 1+|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- ❄ $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x - 1$ quando $x - 1 \geq 0$, ou seja, quando $x \geq 1$.
- ❄ $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 - x^2$ quando $1 - x^2 \geq 0$, ou seja, quando $x^2 \leq 1$, isso é, quando $-1 \leq x \leq 1$.
- ❄ $\sqrt[4]{(2-x)^8} = \sqrt[4]{[(2-x)^2]^4} = \left|(2-x)^2\right| = (2-x)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Raízes de potências

Para potências com expoentes racionais quaisquer faremos a seguinte definição.

Sejam dados $a \in \mathbb{R}$ e p/q uma fração irredutível com $p\,,q \in \mathbb{Z}^+$. Definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$$

desde que $\sqrt[q]{a^p}$ esteja bem definida.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

desde que $\sqrt[q]{a^p}$ esteja bem definida e seja não nula.

Note que todo racional não nulo tem uma única fração irredutível que o representa.

Observe que segundo a definição acima, a potência a^r sempre faz sentido quando $a > 0$ e r é um racional qualquer. Veremos a seguir que a^r nem sempre faz sentido quando a base é nula ou negativa.

Exemplos

❄ Seja r um *número racional positivo*. Assim, existem $p\,,q \in \mathbb{Z}^+$ primos entre si, tais que $r = p/q$. Logo,

$$0^r = 0^{p/q} = \sqrt[q]{0^p} = \sqrt[q]{0} = 0 \quad ; \quad 1^r = 1^{p/q} = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1} = 1 \quad ; \quad 1^{-r} = \frac{1}{1^r} = 1\,.$$

❄ Além disso, dados $a \in \mathbb{R}$ e um racional r positivo, temos que : $a^r = 0 \iff a = 0\,.$

Por outro lado, $(-1)^r = (-1)^{p/q} = \sqrt[q]{(-1)^p}$ que *não faz sentido* quando q é par e p é ímpar pois nesse caso teríamos uma raíz com índice par de um radicando negativo, o que não faz sentido, enquanto número real. Isso significa que nem sempre $(-1)^r$ está bem definido quando r é um racional.

No entanto, se a é positivo e r é um racional qualquer, podemos garantir que: $a^r = 1 \iff a = 1\,.$

❄ $(-1)^{2/3} = \sqrt[3]{(-1)^2} = \sqrt[3]{1} = 1$ e $(-1)^{3/5} = \sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[3]{-1} = -1\,.$

❄ $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{2^6} = 2^3 \quad ; \quad 4^{1/5} = \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{2/5}\,.$

❄ $4^{5/3} = \sqrt[3]{4^5} \quad ; \quad 2^{-2/3} = \dfrac{1}{2^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \quad ; \quad 5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3} \quad ; \quad 10^{-2/7} = \dfrac{1}{10^{2/7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{10^2}}\,.$

❄ $(-4)^{2/3} = \sqrt[3]{(-4)^2} = \sqrt[3]{4^2} \quad ; \quad (-2)^{-2/5} = \dfrac{1}{(-2)^{2/5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^2}}\,.$

❄ $(-4)^{3/4} = \sqrt[4]{(-4)^3} = \sqrt[4]{-64}$ que não está bem definida.

❄ $(-3)^{4/6} = (-3)^{2/3} = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$. Note que $4/6$ não está na forma irredutível.

❄ $(-2)^{-6/8} = (-2)^{-3/4} = \dfrac{1}{(-2)^{3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(-2)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-2^3}}$ que não está bem definida.

❄ $(-1)^{1/q} = \sqrt[q]{-1} = -1$ sempre que q for um inteiro ímpar e positivo.

❄ $(-8)^{4/12} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$. Veja o cálculo a seguir.

☛ Observe que $\sqrt[12]{(-8)^4} = \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{(2^3)^4} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$. Isso mostra que $\sqrt[12]{(-8)^4}$ é diferente de $(-8)^{4/12}$ o qual foi acima calculado. Note que $4/12$ não está na forma irredutível.

❄ $(-4)^{6/4} = (-4)^{3/2} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64}$ que não está bem definida. Veja o cálculo a seguir.

☛ Observe que $\sqrt[4]{(-4)^6} = \sqrt[4]{4^6} = \sqrt[4]{(2^2)^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3$. Note que $4/12$ não está na forma irredutível.

❄ Note que $\left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2$ não faz sentido já que $\sqrt{-1}$ não está bem definido, mas $\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$.

Diante de uma expressão envolvendo termos com raízes de índice par devemos sempre perguntar para quais valores da variável a expressão está bem definida.

Exemplos

❄ $\sqrt{|x|}$ está bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$;

❄ $\sqrt[3]{x}$ está bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$;

❄ $\sqrt[6]{-x}$ só está bem definida para $x \in (-\infty\,, 0\,]$;

❄ $1/\sqrt[5]{x}$ só está bem definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$;

❄ $1/\sqrt[8]{x}$ só está bem definida para $x \in (\,0\,, \infty)$;

❄ $1/\sqrt[7]{|x|}$ está bem definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

❄ $\sqrt[4]{1-x}$ só está bem definida quando $1-x \geq 0$, ou seja, quando $x \leq 1$.

❄ $1/\sqrt[5]{1-x}$ só estará bem definida quando $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

❄ $1/\sqrt{|x|-1}$ só estará bem definida quando $|x| - 1 > 0$, ou seja, quando $|x| > 1$, isto é, quando $-1 < x < 1$.

3 Expoentes irracionais

Agora que acabamos de definir potência com expoente racional, pergunta-se:

☞ *Como definir potência com expoente irracional*?

Mais precisamente:

☞ *Como definir* $3^{\sqrt{2}}$?

Ou, pelo menos:

☞ *Como fazer uma estimativa para* $3^{\sqrt{2}}$ *com os conhecimentos que temos de potências com expoentes racionais ?*

Essa é uma pergunta mais simples para a qual nossa intuição, provavelmente responderia: *Tome uma aproximação racional para* $\sqrt{2}$*, por exemplo*: $1{,}4$. *A potência*

$$3^{1{,}4} = 3^{\frac{14}{10}} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7} = 3\sqrt[5]{9}$$

é um valor aproximado para $3^{\sqrt{2}}$*. Além do mais, parece natural que, quanto melhor for a aproximação usada para* $\sqrt{2}$ *melhor deverá ser a aproximação obtida para* $3^{\sqrt{2}}$!!!

De fato essa é uma forma de definir $3^{\sqrt{2}}$: *por aproximações*. Aproximamos $\sqrt{2}$ por um racional $\frac{m}{n}$ menor do que $\sqrt{2}$ e calculamos $3^{\frac{m}{n}}$ como definido anteriormente. Desta forma obtemos uma aproximação de $3^{\sqrt{2}}$ tão melhor quanto melhor for a aproximação usada para $\sqrt{2}$.

A tabela abaixo exibe algumas aproximações para $3^{\sqrt{2}}$ a partir de aproximações de $\sqrt{2}$ obtidas usando um software apropriado.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872421\ldots$$
$$3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880438783741494789428334042\ldots$$

Aproximações para $\sqrt{2}$	Aproximações para $3^{\sqrt{2}}$		
$1{,}4$	$3^{1{,}4} = 3^{\frac{7}{5}}$	$=$	4,655536721746...
$1{,}41$	$3^{1{,}41} = 3^{\frac{141}{100}}$	$=$	4,706965001716...
$1{,}414$	$3^{1{,}414} = 3^{\frac{1414}{1000}}$	$=$	4,727695035268...
$1{,}4142$	$3^{1{,}4142} = 3^{\frac{7071}{5000}}$	$=$	4,728733930171...
$1{,}4142135623$	$3^{1{,}4142135623} = 3^{\frac{14142135623}{10000000000}}$	$=$	4,728804387457...
$1,414213562373095$	$3^{1{,}414213562373095} = 3^{\frac{1414213562373095}{1000000000000000}}$	$=$	4,728804387837...

Não vamos apresentar aqui uma definição precisa de potências com expoentes irracionais. O que nós precisamos nesse momento é saber quando tais potências estão bem definidas e, nesse caso, operar com elas.

O próximo quadro mostra quando uma potência está bem definida.

Quando $(\boldsymbol{base})^{\boldsymbol{expoente}}$ está bem definido?	
Base positiva	
$(\boldsymbol{base\ positiva})^{\boldsymbol{expoente\ qualquer}}$	está bem definido, é >0 e $\mathbf{1}^{\boldsymbol{expoente\ qualquer}} = \mathbf{1}$ $(\boldsymbol{base\ positiva})^{\mathbf{0}} = 1$
Base nula	
$\mathbf{0}^{\boldsymbol{expoente\ positivo}}$	está sempre bem definido e vale $\mathbf{0}$
$\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$	não está bem definido
$\mathbf{0}^{\boldsymbol{expoente\ negativo}}$	não está bem definido
Base negativa	
$(\boldsymbol{base\ negativa})^{\boldsymbol{expoente\ inteiro}}$	está sempre bem definido
$(\boldsymbol{base\ negativa})^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{(\boldsymbol{base\ negativa})^{\boldsymbol{m}}}$	só não está bem definido quando m é ímpar e n é par, onde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si.
$(\boldsymbol{base\ negativa})^{-\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\boldsymbol{n}]{(\boldsymbol{base\ negativa})^{\boldsymbol{m}}}}$	só não está bem definido quando m é ímpar e n é par, onde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si.
$(\boldsymbol{base\ negativa})^{\boldsymbol{expoente\ irracional}}$	não está bem definido

4 Como operar com potências

Para potências com bases e expoentes reais temos as seguintes propriedades, que são válidas desde que cada uma das potências e frações envolvidas estejam bem definidas.

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \quad (x \times y)^a = x^a \times y^a \quad ; \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \frac{y^a}{x^a}$$

Note que, como dissemos antes, ao escrevermos $x^a \times x^b = x^{a+b}$ estamos de fato afirmando: se x^a, x^b e x^{a+b} estão bem definidos então $x^a \times x^b = x^{a+b}$. É dessa forma que devemos entender todas as outras igualdades no quadro. Em particular, quando $x, y > 0$ todas as potências e frações do quadro anterior estão bem definidas. Além disso temos a seguinte regra:

$$\big(x^a\big)^b = x^{a\times b} = \big(x^b\big)^a$$

que deve ser entendida da seguinte forma: se as potências das extremidades estão bem definidas então a do meio também estará e, nesse caso, as três são iguais. Em particular, quando $x > 0$ todos os três membros da igualdade acima estão bem definidos.

Exemplos

- ❄ $5^2 \times 5^{\pi-2} = 5^{2+\pi-2} = 5^\pi$
- ❄ $(2\times\pi)^{3,2} = 2^{3,2}\times\pi^{3,2}$
- ❄ $4^{2,5} = \big(2^2\big)^{2,5} = 2^{2\times 2,5} = 2^5 = 32$
- ❄ $(2\times 3)^{3,2} = 2^{3,2}\times 3^{3,2}$
- ❄ $0,3^5 \times 0,3^{-3} = 0,3^2$
- ❄ $12^{\frac{1}{2}} = \big(2^2\times 3\big)^{\frac{1}{2}} = \big(2^2\big)^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}} = 2\times 3^{\frac{1}{2}}$
- ❄ $\left(\dfrac{2}{15}\right)^{-3} = \dfrac{2^{-3}}{15^{-3}} = \dfrac{15^3}{2^3} = \left(\dfrac{15}{2}\right)^3$
- ❄ $\dfrac{0,3^\pi}{0,3^2} = 0,3^{\pi-2}$
- ❄ $\big(0,21\times 3,1\big)^{1,2} = 0,21^{1,2}\times 3,1^{1,2}$
- ❄ $\big(5^2\big)^{0,1} = 5^{2\times 0,1} = 5^{0,2} = 5^{\frac{1}{5}}$
- ❄ $(2\times 7)^{3,2} = 2^{3,2}\times 7^{3,2}$
- ❄ $\big(5^2\big)^\pi = 5^{2\pi} = 25^\pi$
- ❄ $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^5 = \dfrac{3^5}{\big(2^{\frac{1}{2}}\big)^5} = 3^5\times 2^{-\frac{5}{2}}$
- ❄ $\big(2^{\sqrt{3}}\big)^{-\pi} = 2^{-\pi\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2^{\pi\sqrt{3}}}$
- ❄ $\dfrac{(2\times 3)^3}{3^3} = \dfrac{2^3\times 3^3}{3^3} = 2^3.$
- ❄ $4^{\frac{3}{2}} = \big(2^2\big)^{3/2} = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3.$
- ❄ $\dfrac{\big(6^2\big)^{3/4}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = \dfrac{\big(2^2\times 3^2\big)^{3/4}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = \dfrac{2^{3/2}\times 3^{3/2}\times 2^{-1/2}}{3^{3/2}} = 2^{2/2} = 2\,.$
- ❄ $\dfrac{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{6^{1/3}\times 9^{1/3}}{2^{1/3}} = \dfrac{2^{1/3}\times 3^{1/3}\times 3^{2/3}}{2^{1/3}} = 3^{3/3} = 1\,.$
- ❄ $3^{-\sqrt{2}}\times\big(3^2\big)^{\sqrt{2}} = 3^{-\sqrt{2}}\times 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}.$
- ❄ $\big((-1)^2\big)^{1/2}$ está bem definido e vale 1 mas, $\big((-1)^{1/2}\big)^2$ não está bem definido. Repare que nesse caso, a potência $(-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ está bem definida e vale -1. Assim, $\big((-1)^2\big)^{1/2}$ e $(-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ são distintos. Segundo a última regra vista nessa seção, isso ocorreu porque $\big((-1)^{1/2}\big)^2$ não está bem definido.

5 Uma convenção

Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a expressão x^x está bem definida ? Isto é, qual o domínio de definição da expressão x^x ?

Seguindo a tabela que descreve quando uma potência está bem definida, podemos afirmar:

☞ x^x *está bem definido para todo* $x > 0$ *e é positivo* ;

☞ x^x *não está definido para* $x = 0$;

☞ x^x *não está bem definido quando* x *é um irracional negativo* .

Mas, para valores de x que são *racionais e negativos* podemos ainda concluir:

☞ x^x *está bem definido quando* $x < 0$ *é uma fração irredutível com numerador par*[2] e nesse caso x^x é positivo ;

☞ x^x *também está bem definido quando* $x < 0$ *é uma fração irredutível com numerador ímpar e denominador ímpar* e nesse caso x^x é negativo ;

☞ No entanto, x^x *não está bem definido* quando $x < 0$ é uma fração irredutível com numerador ímpar e denominador par pois nesse caso, temos uma expressão do tipo

$$\left(-\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = 1\Big/\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = 1\Big/\sqrt[q]{\left(-\frac{p}{q}\right)^{p}} = 1\Big/\sqrt[q]{-\left(\frac{p}{q}\right)^{p}}$$

onde $p\,, q \in \mathbb{Z}^+$, são primos entre si, p é ímpar e q é par, a qual não está bem definida enquanto número real.

Apesar disso, no curso de Cálculo I você aprenderá que o domínio de definição dessa expressão é o intervalo $(0\,,\infty)$. Esse é de fato o subconjunto da reta onde a expressão x^x varia continuamente.

Convencionamos aqui que o domínio da expressão x^x é o intervalo $(0\,,\infty)$. Mais geralmente, faremos a seguinte convenção.

Numa expressão da forma $\Big(E(x)\Big)^{F(x)}$ *se o expoente* $F(x)$ *assume valores racionais e irracionais, entenderemos que o domínio da expressão são os valores reais da variável* x *para os quais a potência está bem definida e* **tem base positiva ou nula**.

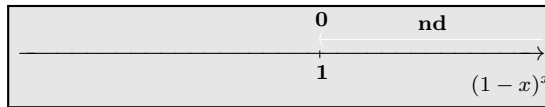
[2]. . . e consequentemente, denominador ímpar.

Exemplos

❄ Domínio de x^{2x} :

A expressão está bem definida para $x > 0$. Por outro lado, o expoente assume valores racionais e irracionais. Portanto, segundo a convenção feita, o domínio da expressão é o intervalo $(0, \infty)$.

❄ Domínio de $(1-x)^x$:

O expoente assume valores racionais e irracionais. Assim, para a base $1-x$ devemos ter $1-x \geq 0$ ou seja, para $x \leq 1$. Além dissso, temos que em $x = 1$ a base se anula e o expoente vale 1. Logo, a potência também está bem definida para $x = 1$. Portanto, seu domínio é o intervalo $(-\infty, 1]$.

❄ Domínio de $(4-x^2)^{\frac{1}{x-1}}$:

Novamente, o expoente assume valores racionais e irracionais.

Para que a base seja positiva ou nula, devemos ter:

$$4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 - 4 \leq 0 \iff x \in [-2, 2].$$

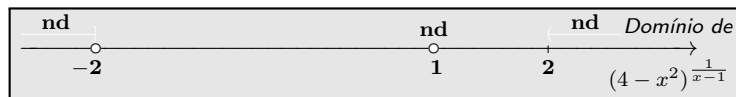
Temos também que: $4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2$.

Para que o expoente esteja bem definido, devemos ter $x \neq 1$.

Além disso:

☞ quando $x = 2$ a base se anula mas o expoente vale 1, o que significa que a expressão em estudo está bem definida em $x = 2$;

☞ quando $x = -2$ a base se anula e o expoente vale -1, o que significa que a expressão em estudo não está bem definida em $x = -2$.

Assim, o domínio da expressão é $(-2, 1) \cup (1, 2]$.

Exercícios resolvidos

1. **Simplifique as expressões**

(a) $\dfrac{2^5}{6^6}$ **(b)** $\left(-\dfrac{2}{1{,}5}\right)^3$ **(c)** $\dfrac{10^4 \times 4^3}{2^5 \times 5^2}$ **(d)** $\dfrac{0{,}2^5 \times 0{,}6^4}{3^4 \times 2^3}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{2^5}{6^6} = \dfrac{2^5}{(2\times 3)^6} = \dfrac{2^5}{2^6\times 3^6} = \dfrac{1}{2\times 3^6}$.

(b) $\left(-\dfrac{2}{1{,}5}\right)^3 = \left((-1)\times\dfrac{2}{1{,}5}\right)^3 = (-1)^3\times\left(\dfrac{2}{1{,}5}\right)^3 = -\left(\dfrac{2\times 10}{15}\right)^3 = -\left(\dfrac{2\times 2}{3}\right)^3 = -\dfrac{2^6}{3^3}$.

(c) $\dfrac{10^4\times 4^3}{2^5\times 5^2} = \dfrac{(2\times 5)^4\times\left(2^2\right)^3}{2^5\times 5^2} = \dfrac{2^4\times 5^4\times 2^6}{2^5\times 5^2} = \dfrac{2^{10}\times 5^4}{2^5\times 5^2} = 2^{10-5}\times 5^{4-2} = 2^5\times 5^2$.

(d) $\dfrac{0{,}2^5\times 0{,}6^4}{3^4\times 2^7} = \dfrac{0{,}2^5\times(3\times 0{,}2)^4}{3^4\times 2^7} = \dfrac{0{,}2^9\times 3^4}{3^4\times 2^7} = \dfrac{(2\times 0{,}1)^9}{2^7} = 2^2\times 0{,}1^9 = 2^2\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^9 = \dfrac{2^2}{10^9}$.

2. **Coloque as expressões a seguir na forma de uma fração irredutível.**

(a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$ **(b)** $-(-4)^{-2}$ **(c)** $\dfrac{5^2}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}}$ **(d)** $\dfrac{3^5\times\left(15^{-2}\right)^3}{(10^{-3})^2\times 2^5}$.

Solução Temos que:

(a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \dfrac{2^{-4}}{3^{-4}} = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$.

(b) $-(-4)^{-2} = -\dfrac{1}{(-4)^2} = -\dfrac{1}{16}$.

(c) $\dfrac{5^2}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}} = 5^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{5^2\times 2^3}{5^3} = \dfrac{2^3}{5^{3-2}} = \dfrac{8}{5}$.

(d) $\dfrac{3^5\times\left(15^{-2}\right)^3}{(10^{-3})^2\times 2^5} = \dfrac{3^5\times\left(3^{-2}\times 5^{-2}\right)^3}{(2^{-3}\times 5^{-3})^2\times 2^5} = \dfrac{3^5\times 3^{-6}\times 5^{-6}}{2^{-6}\times 5^{-6}\times 2^5} = \dfrac{3^{-1}}{2^{-1}} = \dfrac{2}{3}$.

3. **Use as regras para operar com potência e conclua que:**

(a) $\sqrt[n]{x\times y} = \sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$ **(b)** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ **(c)** $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

quando cada uma das potências e frações envolvidas estão bem definidas, onde m e n são inteiros maiores ou iguais a dois.

Solução Nesse caso, usando as regras para operar com potências, obtemos:

(a) $\sqrt[n]{x\times y} = (x\times y)^{1/n} = x^{1/n}\times y^{1/n} = \sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$.

$$\boxed{\sqrt[n]{x\times y} = \sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}}$$

(b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \left((x)^{1/n}\right)^{1/m} = (x)^{1/mn} = \sqrt[mn]{x}$.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}}$$

(c) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/n} = \dfrac{x^{1/n}}{y^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

$$\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}}$$

☛ **Atenção:** As três igualdades que acabamos de estudar são verdadeiras desde que cada uma das potências e frações envolvidas estejam bem definidas. Nós usamos essa hipótese ao demonstrá-las, pois fizemos uso das propriedades listadas no quadro anterior, que pressupõe esse fato.

4. **Simplifique** $\mathbf{4\sqrt{12}+3\sqrt{75}}$ **.**

Solução Temos que: $4\sqrt{12}+3\sqrt{75} = 4\sqrt{2^2\times 3}+3\sqrt{5^2\times 3} = 4\times 2\sqrt{3}+3\times 5\sqrt{3} = 23\sqrt{3}$.

5. **Escreva a expressão** $\mathbf{(2x+y^{-2})^{-1}}$ **sem usar expoentes negativos e simplifique-a.**

Solução Aqui estaremos assumindo que $y \neq 0$ e que $2x+y^{-2}\neq 0$ para que a expressão a ser estudada faça sentido.

Nesse caso temos: $\left(2x+y^{-2}\right)^{-1} = \left(2x+\dfrac{1}{y^2}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2x+\dfrac{1}{y^2}}$.

Além disso: $\dfrac{1}{2x+\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{2\,x\,y^2+1}{y^2}} = \dfrac{y^2}{1+2xy^2}$. Assim, $\left(2x+y^{-2}\right)^{-1} = \dfrac{y^2}{1+2xy^2}$.

6. **Simplifique a expressão** $\mathbf{\sqrt{x}(\sqrt{2x}-\sqrt{x})}$**.**

Solução Para que a expressão faça sentido devemos considerar que $x\geq 0$. Nesse caso, temos:

$$\sqrt{x}(\sqrt{2x}-\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,\sqrt{2x}-\sqrt{x}\,\sqrt{x} = \sqrt{2x^2}-\sqrt{x^2} = |x|\sqrt{2}-|x| = (\sqrt{2}-1)\,|x| = (\sqrt{2}-1)\,x$$

pois $x\geq 0$.

7. **Em cada item determine o maior subconjunto da reta no qual a igualdade dada é verdadeira.**

(a) $\mathbf{\sqrt{x^2}=-x}$ **(b)** $\mathbf{\sqrt{x^4}=x^2}$ **(c)** $\mathbf{\sqrt[8]{x^6}=\sqrt[4]{x^3}}$ **.**

Solução

(a) Vimos que $\sqrt{x^2}=|x|$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Consequentemente, a igualdade em estudo só é verdadeira para $x\leq 0$. Assim, o subconjunto procurado é o intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

(b) $\sqrt{x^4}=\sqrt{x^2}\,\sqrt{x^2}=|x|\,|x|=|x|^2=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Assim, o subconjunto procurado é toda a reta.

(c) A expressão do lado direito da igualdade não faz sentido quando $x<0$. No entanto, a igualdade é veradeira para $x\geq 0$ pois nesse caso a regra vista na página 256 nos garante que:

$$\sqrt[8]{x^6} = \left(x^6\right)^{1/8} = x^{6/8} = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}\,.$$

8. Quanto vale $(-1)^n$ quando n é um inteiro positivo ?

Solução Consideremos separadamente os casos n par e n ímpar.

Quando n é par temos: $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times \cdots \times (-1)}_{\textit{número par de fatores } -1} = 1$.

Quando n é ímpar temos: $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times \cdots \times (-1)}_{\textit{número ímpar de fatores } -1} = -1$.

9. Determine o domínio de definição da expressão $\dfrac{2^3 \times x^{-2}}{(2x-2)^2}$ e simplifique-a.

Solução A expressão só não está bem definida

- ☞ em $x = 0$ pois, nesse caso, x^{-2} não está bem definido ;
- ☞ quando o denominador da fração se anula, ou seja, quando $(2x-2)^2 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1$.

Portanto, o domínio da expressão é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\,, 1\}$.

Para $x \in \mathbb{R} - \{0\,, 1\}$ podemos simplificar a expressão e obtemos:

$$\frac{2^3 \times x^{-2}}{(2x-2)^2} = \frac{2^3}{x^2 \times 2^2 (x-1)^2} = \frac{2}{x^2 (x-1)^2} .$$

10. Para quais valores da variável x a expressão $2\,x^{-1} \times (x+1)^{-3}$ não está bem definida ?

Solução A expressão só não está bem definida quando

- ☞ $x = 0$, pois nesse caso x^{-1} não está bem definido ;
- ☞ $x = -1$, pois nesse caso $(x+1)^{-3}$ não está bem definido .

11. Simplifique[3] a expressão $\left(\dfrac{1}{|x|} + 1\right)^{-1} \dfrac{x}{(1+|x|)^{-2}}$.

Solução Note que as expressões $1 + |x|$ e $\frac{1}{|x|} + 1$ nunca se anulam. Portanto, $(1+|x|)^{-2}$ e $\left(\frac{1}{|x|} + 1\right)^{-1}$ estão bem definidos e nunca se anulam. Assim, para $x \neq 0$ a expressão dada está bem definida e temos:

$$\left(\frac{1}{|x|} + 1\right)^{-1} \frac{x}{(1+|x|)^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} + 1} \times \frac{x}{\frac{1}{(1+|x|)^2}} = \frac{|x|\,x\,(1+|x|)^2}{1+|x|} = x\,|x|\,(1+|x|) .$$

---

[3]Num exercício como esse, estamos admitindo que a variável assume apenas os valores para os quais a expressão e as operações sobre ela efetuadas estão bem definidas.

12. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões a seguir:

(a) $\sqrt{2^2 \times 5^3}$ **(b)** $\sqrt[3]{6} \times \sqrt{6}$ **(c)** $25^{1,5}$ **(d)** $\sqrt[4]{4^3 \times 6^5}$ **(e)** $200^{-0,6}$.

Solução Seguindo as regras para operar com potências, obtemos:

(a) $\sqrt{2^2 \times 5^3} = \left(2^2 \times 5^2 \times 5\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 6^{\frac{5}{6}} = \dfrac{6^{\frac{5}{6}} \times 6^{\frac{1}{6}}}{6^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{6^{\frac{6}{6}}}{6^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{6}{\sqrt[6]{6}}$.

(c) $25^{1,5} = \left(5^2\right)^{1,5} = 5^{2\times 1,5} = 5^3 = 125$.

(d) $\sqrt[4]{4^3 \times 6^5} = \left(2^6 \times 2^5 \times 3^5\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{12} \times 2^{-1} \times 3^4 \times 3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{12}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{4}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = \dfrac{2^3 \times 3 \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}}$.

(e) $200^{-0,6} = \left(2^3 \times 5^2\right)^{-\frac{6}{10}} = \dfrac{1}{\left(2^3 \times 5^2\right)^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{2^{\frac{9}{5}} \times 5^{\frac{6}{5}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{10}{5}} \times 5^{\frac{5}{5}} \times 5^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{\sqrt[5]{2}}{2^2 \times 5 \times \sqrt[5]{5}}$.

13. Determine o valor das expressões

(a) $\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$ **(b)** $\dfrac{4^{5/4} \times \sqrt{1000}}{5^{5/2}}$ **(c)** $\dfrac{12^{-2/3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^{-1}}}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{1,2} \times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3} \times \sqrt[3]{0,6}}$.

Solução

(a) $\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{2^{1/2} \times \left(2^2\right)^{1/3}}{2^{1/6}} = \dfrac{2^{1/2} \times 2^{2/3}}{2^{1/6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2$, pois $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{3+4-1}{6} = 1$.

(b) $\dfrac{4^{5/4} \times \sqrt{1000}}{5^{5/2}} = \dfrac{\left(2^2\right)^{\frac{5}{4}} \times \left(10^3\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{5/2}} = \dfrac{2^{5/2} \times 10^{3/2}}{5^{5/2}} = \dfrac{2^{5/2} \times 2^{3/2} \times 5^{3/2}}{5^{5/2}} = \dfrac{2^4}{5^{2/2}} = \dfrac{2^4}{5}$.

(c) $\dfrac{12^{-2/3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^{-1}}} = \dfrac{\left(2^2 \times 3\right)^{-2/3} \times 3^{1/3}}{\left(2^{-1}\right)^{1/3}} = \dfrac{2^{-4/3} \times 3^{-2/3} \times 3^{1/3}}{2^{-1/3}} = \dfrac{3^{-1/3}}{2^{3/3}} = \dfrac{1}{2 \times 3^{1/3}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}}$.

(d) $\dfrac{\sqrt{1,2} \times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3} \times \sqrt[3]{0,6}} = \dfrac{\sqrt{2^2 \times 0,3} \times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3} \times \left(2 \times 0,3\right)^{1/3}} = \dfrac{2 \times \sqrt{0,3} \times 0,3^{1/3}}{\sqrt{0,3} \times 2^{1/3} \times 0,3^{1/3}} = \dfrac{2}{2^{1/3}} = 2^{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.

14. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões a seguir.

(a) $\dfrac{3^4 \times 5^3}{15^4}$ **(b)** $\dfrac{2^5 \times \left(9^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4 \times 12^{-5}}$ **(c)** $\dfrac{0,2^{-3} \times 0,1^5}{2^{-6} \times 4^2}$ **(d)** $\dfrac{10^5 \times 10^{2\pi-3}}{100^{1+\pi}}$.

Solução

(a) $\dfrac{3^4 \times 5^3}{15^4} = \dfrac{3^4 \times 5^3}{(3 \times 5)^4} = \dfrac{3^4 \times 5^3}{3^4 \times 5^4} = \dfrac{1}{5^{4-3}} = \dfrac{1}{5}$.

(b) $\dfrac{2^5 \times (9^2)^{\frac{1}{3}}}{6^4 \times 12^{-5}} = \dfrac{2^5 \times 9^{\frac{2}{3}}}{2^4 \times 3^4 \times 4^{-5} \times 3^{-5}} = \dfrac{2 \times (3^2)^{2/3}}{3^{-1} \times (2^2)^{-5}} = \dfrac{2 \times 3^{\frac{4}{3}} \times 3}{2^{-10}} = 2^{11} \times 3^{\frac{7}{3}}.$

(c) $\dfrac{0{,}2^{-3} \times 0{,}1^5}{2^{-6} \times 4^2} = \dfrac{(2 \times 0{,}1)^{-3} \times 0{,}1^5}{2^{-6} \times (2^2)^2} = \dfrac{2^{-3} \times 0{,}1^2}{2^{-6} \times 2^4} = \dfrac{0{,}1^2}{2^{-6} \times 2^7} = \dfrac{0{,}1^2}{2} = \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005\,.$

(d) $\dfrac{10^5 \times 10^{2\pi-3}}{100^{1+\pi}} = \dfrac{10^{2\pi+2}}{(10^2)^{1+\pi}} = \dfrac{10^{2\pi+2}}{10^{2+2\pi}} = 1.$

15. Coloque sob um mesmo radical as seguintes expressões:

(a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}}$ **(c)** $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ **(d)** $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}$ **(e)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}$.

Solução Temos que:

(a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}\,.$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{5}} = 3^{(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})} = 3^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{3}\,.$

(c) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \left(2\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[3]{2^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((2^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{6}} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}\,.$

(d) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{2}{6}} = (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2^3 \times 3^2}\,.$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{3^{\frac{4}{12}}}{4^{\frac{3}{12}}} = \left(\dfrac{3^4}{4^3}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4}{4^3}}\,.$

16. Use as regras para operar com potências e simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{y^2 \times y^{-1}}{y^3}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{0,1}$ **(c)** $\dfrac{x^{2\pi}}{(xy)^{\pi-1}}$ **(d)** $\left(\dfrac{y^2}{\pi^3}\right)^x \times \left(\dfrac{\pi^x}{y^{3x}}\right)^2$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{y^2 \times y^{-1}}{y^3} = y^2 \times y^{-1} \times y^{-3} = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}.$

(b) $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^{0,1} = \dfrac{y^{0,1}}{(x^2)^{0,1}} = y^{0,1} \times x^{-0,2} = \sqrt[10]{y} \times \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\,.$

(c) $\dfrac{x^{2\pi}}{(xy)^{\pi-1}} = \dfrac{x^{2\pi}}{x^{\pi-1} \times y^{\pi-1}} = x^{2\pi} \times x^{1-\pi} \times y^{1-\pi} = x^{1+\pi} \times y^{1-\pi}$

(d) $\left(\dfrac{y^2}{\pi^3}\right)^x \times \left(\dfrac{\pi^x}{y^{3x}}\right)^2 = \dfrac{y^{2x}}{\pi^{3x}} \times \dfrac{\pi^{2x}}{y^{6x}} = \dfrac{1}{\pi^{3x-2x} \times y^{6x-2x}} = \dfrac{1}{\pi^x \times y^{4x}}\,.$

17. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{2^5\times\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4\times 3^{-5}}$ **(b)** $\dfrac{2^{2x}\times 10^x}{20^x}$ **(c)** $\dfrac{(2\pi)^{1-x}\times 4^x}{\pi\times 2^{x-4}}$ **(d)** $\dfrac{x^{2(x+1)}}{(2x)^x+2^x}$.

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{2^5\times\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{6^4\times 3^{-5}}=\dfrac{2^5\times x^{\frac{2}{3}}}{2^4\times 3^4\times 3^{-5}}=\dfrac{2^{5-4}\times x^{\frac{2}{3}}}{3^{-5+4}}=\dfrac{2x^{\frac{2}{3}}}{3^{-1}}=6x^{\frac{2}{3}}$.

(b) $\dfrac{2^{2x}\times 10^x}{20^x}=\dfrac{2^{2x}\times(2\times 5)^x}{(2^2\times 5)^x}=\dfrac{2^{2x}\times 2^x\times 5^x}{\left(2^2\right)^x\times 5^x}=\dfrac{2^{2x}\times 2^x\times 5^x}{2^{2x}\times 5^x}=2^x$.

(c) $\dfrac{(2\pi)^{1-x}\times 4^x}{\pi\times 2^{x-4}}=\dfrac{2^{1-x}\times\pi^{1-x}\times\left(2^2\right)^x}{\pi\times 2^{x-4}}=\dfrac{2^{1-x}\times 2^{2x}}{\pi^x\times 2^{x-4}}=\dfrac{2^{x+1}}{\pi^x\times 2^{x-4}}=\dfrac{2^{x+1-x+4}}{\pi^x}=\dfrac{2^5}{\pi^x}$.

(d) $\dfrac{x^{2(x+1)}}{(2x)^x+x^{2x}}=\dfrac{x^{2x}\times x^2}{(2x)^x+x^{2x}}=\dfrac{x^{2x}\times x^2}{2^x x^x+x^{2x}}=\dfrac{x^{2x}\times x^2}{x^x(2^x+x^x)}=\dfrac{x^{2x-x}\times x^2}{2^x+x^x}=\dfrac{x^{x+2}}{2^x+x^x}$.

18. Descreva o domínio das expressões a seguir e escreva-as usando radicais.

(a) $x^{0,1}$ **(b)** $x^{1,2}$ **(c)** $(2-x)^{3,5}$ **(d)** $\dfrac{x}{(x+1)^{\sqrt{2}}}$.

Solução Nos três primeiros itens, os expoentes são números racionais e podem ser colocados sob a forma:

(a) $x^{0,1}=x^{\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{x}$.

Portanto, o domínio da expressão é o intervalo $[\,0\,,\infty)$.

(b) $x^{1,2}=x^{\frac{12}{10}}=x^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{x^6}=\sqrt[5]{x^5\times x}=x\,\sqrt[5]{x}$.

Assim, o domínio da expressão é $\mathbb{R}$.

(c) $(2-x)^{3,5}=(2-x)^{\frac{35}{10}}=(2-x)^{\frac{7}{2}}=\sqrt{(2-x)^7}=|2-x|^3\sqrt{2-x}$.

Portanto, o domínio da expressão é $\{x\in\mathbb{R}\ ;\ 2\geq x\}=(-\infty\,,2\,]$.

(d) Nesse caso o expoente é irracional, logo a potência $(x+1)^{\sqrt{2}}$ só estará bem definida para $x+1\geq 0$, ou seja, para $x\geq -1$. No entanto, para que o denominador da expressão não se anule, precisamos da condição $x>-1$. Assim, o domínio da expressão é o intervalo $(-1\,,\infty)$.

19. Para quais valores da variável x a expressão $(2-x)^{1,1717\ldots}$ está bem definida ?

Solução Para responder essa pergunta vamos, primeiramente, determinar a fração irredutível que é *geratriz* da dízima periódica $1{,}1717\ldots$

Para isso, seja $z=1{,}1717\ldots$

Assim, $100\,z=117{,}1717\ldots$ e teremos:

$$100\,z-z=117{,}1717\ldots-1{,}1717\ldots=117+0{,}1717\ldots-1-0{,}1717\ldots=117-1=116.$$

Resulta daí que

$$99\,z = 116 \iff z = \frac{116}{99} = \frac{2^2 \times 29}{3^2 \times 11}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $116/99$. Nesse caso, a expressão $(2-x)^{1{,}1717\ldots}$ toma a forma

$$(2-x)^{1{,}1717\ldots} = (2-x)^{116/99} = \sqrt[99]{(2-x)^{116}}$$

a qual está bem definida para todos os valores reais da variável x já que o índice da raiz na expressão acima é ímpar. Assim sendo, a expressão $(2-x)^{1{,}1717\ldots}$ está bem definida em toda a reta $\mathbb{R}$.

20. Estude o sinal da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$.

Solução Para isso, começamos o estudo determinando onde a expressão está bem definida.

- A expressão só está bem definida para $x \neq 3$ e $x \geq 0$. Assim, seu domínio será $[\,0\,,3\,) \cup (\,3\,,\infty\,)$.
- A expressão se anula quando

$$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} = 0 \implies \sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \implies x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} \implies x^{\frac{6}{2}} = x^{\frac{6}{3}} \implies x^3 = x^2$$
$$\implies x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x-1) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = 1\,.$$

Testando esses dois valores na equação inicial, concluímos que ambos são, de fato, soluções. Assim, a expressão em estudo só se anula no conjunto $\{0\,,1\}$. Seu domínio é mostrado no diagrama ao lado.

nd	0	nd	*domínio de*
0	1	3	$(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})/(x-3)$

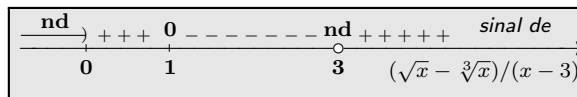
Sinal da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$:

Vamos usar aqui a técnica descrita na Lição 11 que pressupõe a *continuidade* da expressão acima em seu domínio de definição. Num curso de Cálculo I você verá que é fácil mostrar que a expressão acima é de fato contínua em todo o seu domínio de definição.

- Teste de sinal em $(\,0\,,1\,)$:
  Em $x = 2^{-6} \in (\,0\,,1\,)$ temos:
  $$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right]_{x=2^{-6}} = \frac{\sqrt{2^{-6}}-\sqrt[3]{2^{-6}}}{2^{-6}-3} = \frac{2^{-3}-2^{-2}}{2^{-6}-3} = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^6}-3} > 0\ (+).$$
- Teste de sinal em $(\,1\,,3\,)$:
  Em $x = 2 \in (\,1\,,3\,)$ temos:
  $$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right]_{x=2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-3} = \sqrt[3]{2}-\sqrt{2} < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(3\,,\infty)$:
Em $x = 2^6 \in (3\,,\infty)$ temos:

$$\left.\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}\right]_{x=2^6} = \frac{\sqrt{2^6}-\sqrt[3]{2^6}}{2^6-3} = \frac{2^3-2^2}{2^6-3} > 0\ (+)\,.$$

nd) + + + 0 − − − − − − − nd + + + + + *sinal de*
0 1 3 $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})/(x-3)$

Finalizando a análise de sinais da expressão $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$, concluímos:

☞ Seu domínio é: $[\,0\,,3\,)\cup(\,3\,,\infty)$;

☞ Ela se anula em $\{0\,,1\}$;

☞ É positiva em: $(\,0\,,1\,)\cup(\,3\,,\infty)$;

☞ É negativa em: $(\,1\,,3\,)$.

21. **Resolva a inequação $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1} \geq 2$.**

Solução Para isso, vamos analizar o sinal da expressão $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2$.

Estudando o sinal da expressão $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2$:
Como no exercício anterior, aqui também, a expressão em estudo é contínua em todo o seu domínio de definição.

☞ O domínio da expressão é o intervalo $[\,0\,,\infty)$.

☞ A expressão se anula quando:

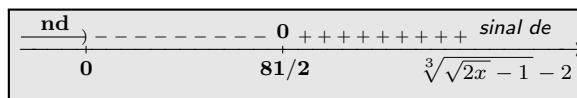
$$\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2=0 \iff \sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}=2 \iff \sqrt{2x}-1=8 \iff \sqrt{2x}=9$$
$$\iff x=81/2\,.$$

☞ Teste de sinal em $[\,0\,,81/2\,)$:
Em $x=2\in[\,0\,,81/2\,)$ temos:

$$\left.\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2\right]_{x=2} = \sqrt[3]{\sqrt{2\times 2}-1}-2=\sqrt[3]{2-1}-2=-1<0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(\,81/2\,,\infty)$:
Em $x=2\times 81\in(\,81\,,\infty)$ temos:

$$\left.\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}-2\right]_{x=2\times 81} = \sqrt[3]{\sqrt{2\times 2\times 81}-1}-2=\sqrt[3]{18-1}-2=\sqrt[3]{17}-2>0\ (+).$$

Finalizando o estudo de sinais temos:

Conclusão: $\sqrt[3]{\sqrt{2x}-1}\geq 2 \iff x\in[\,81/2\,,\infty)$.

22. **Sabendo que $x^\pi = 2$ determine o valor das expressões:**

(a) $x^{2\pi}$ **(b)** x^{π^2} **(c)** $x^{-5\pi}$ **(d)** $x^{\pi+2}$ **(e)** x .

Solução Devemos escrever as expressões a seguir como uma potência de base x^π.

(a) $x^{2\pi} = \big(x^\pi\big)^2 = \big(2\big)^2 = 4$;

(b) $x^{\pi^2} = \big(x^\pi\big)^\pi = \big(2\big)^\pi = 2^\pi$;

(c) $x^{-5\pi} = \big(x^\pi\big)^{-5} = \big(2\big)^{-5} = 1/2^5$;

(d) $x^{\pi+2} = \big(x^\pi\big)^{\frac{\pi+2}{\pi}} = \big(2\big)^{\frac{\pi+2}{\pi}} = 2^{1+\frac{2}{\pi}} = 2 \times 2^{\frac{2}{\pi}}$;

(e) $x = \big(x^\pi\big)^{\frac{1}{\pi}} = \big(2\big)^{\frac{1}{\pi}} = 2^{\frac{1}{\pi}}$.

☛ Note que todas as potências acima estão bem definidas pois x é positivo e, consequentemente, x^π também é positivo.

23. **Sabendo que $10^x = 3$ calcule o valor das expressões $\dfrac{2^{2x} \times 5^{2x} - 1}{10^{3x}}$ e $\dfrac{10^{1-x} \times 20^{2x+1}}{4^{x+1}}$.**

Solução Temos que:

(a) $\dfrac{2^{2x} \times 5^{2x} - 1}{10^{3x}} = \dfrac{10^{2x} - 1}{\big(10^x\big)^3} = \dfrac{\big(10^x\big)^2 - 1}{27} = \dfrac{9-1}{27} = \dfrac{8}{27}$.

(b) $\dfrac{10^{1-x} \times 20^{2x+1}}{4^{x+1}} = \dfrac{10^{1-x} \times 2^{2x+1} \times 10^{2x+1}}{\big(2^2\big)^{x+1}} = \dfrac{10^{2+x} \times 2^{2x+1}}{2^{2x+2}} = \dfrac{10^2 \times 10^x}{2} = 3 \times 50 = 150$.

☛ No item (e) do exercício anterior determinamos o valor de x sabendo que $x^\pi = 2$. Agora, sabendo que $10^x = 3$, como determinar o valor de x? Por enquanto, não sabemos resolver essa questão, isto é, não sabemos resolver a equação $10^x = 3$.

24. **Resolva a equação $x^{2\pi} - 5x^\pi + 6 = 0$.**

Solução Essa equação é da forma $\big(x^\pi\big)^2 - 5x^\pi + 6 = 0$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x^\pi$ obtemos a equação $y^2 - 5y + 6 = 0$ cujas soluções são $y = 2$ e $y = 3$.

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $y = 2$.
Nesse caso: $2 = x^\pi \quad \therefore \quad x = \big(x^\pi\big)^{\frac{1}{\pi}} = 2^{\frac{1}{\pi}}$.

Passo 2: $y = 3$.
Nesse caso: $3 = x^\pi \quad \therefore \quad x = \big(x^\pi\big)^{\frac{1}{\pi}} = 3^{\frac{1}{\pi}}$.

Assim, os possíveis valores para x são: $3^{\frac{1}{\pi}}$ e $2^{\frac{1}{\pi}}$.

25. **Determine o domínio das expressões:**

(a) $\big(1 + x\big)^{\frac{1}{x}}$ **(b)** $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$.

Solução

(a) Para a base devemos ter: $1+x \geq 0 \iff x \geq -1$.

O expoente estará bem definido para $x \neq 0$.

Quando $x=-1$ a base se anula e o expoente vale -1.
Assim, a potência não está bem definida para $x=-1$.

Consequentemente, o domínio da expressão é o conjunto $(-1,0) \cup (0,\infty)$.

(b) Nesse caso, a base está bem definida para $x \neq 0$ e é positiva. O expoente, por sua vez, está bem definido para $x \neq 1$. Assim, o domínio da expressão é: $(-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

26. **Estude o domínio da expressão** $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}$.

Solução Passemos ao estudo do sinal da expressão

$$\frac{x+1}{x-1}. \tag{13.1}$$

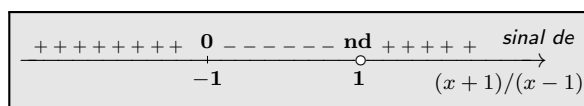
☞ A expressão (13.1) só não está bem definida para $x=1$ e também varia continuamente em todo o seu domínio de definição.

☞ Ela se anula apenas para $x=-1$.

☞ Teste de sinal em $(-\infty,-1)$:
Em $x=-2 \in (-\infty,-1)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right]_{x=-2} = \frac{-2+1}{-2-1} = 1/3 > 0\ (+).$$

☞ Teste de sinal em $(-1,1)$:
Em $x=0 \in (-1,1)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right]_{x=0} = \frac{0+1}{0-1} = -1 < 0\ (-).$$

☞ Teste de sinal em $(1,\infty)$:
Em $x=2 \in (1,\infty)$ temos:
$$\left.\frac{x+1}{x-1}\right]_{x=2} = \frac{2+1}{2-1} = 3 > 0\ (+).$$

+ + + + + + + + 0 − − − − − − nd + + + + + *sinal de*
−1 1 $(x+1)/(x-1)$

Resulta então que

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 0 \iff x = -1.$$

Nos pontos em que a base se anula o expoente vale $(-1)^2 = 1 > 0$. Além disso, o expoente x^2 assume valores racionais e irracionais. Consequentemente, segue da convenção feita que o domínio de

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2} \quad \text{é o conjunto} \quad (-\infty,-1] \cup (1,\infty).$$

Exercícios

1. Seja $A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$.
Calcule A^2 e deduza o valor de A.

2. Simplifique:
(a) $\dfrac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2 \times 10^6}$
(b) $\dfrac{0{,}01 \times 10^{-4}}{10^{-3} \times 0{,}1}$
(c) $\dfrac{8 \times 10 \times 5^3 \times 6^4}{4^4 \times 25 \times 30}$
(d) $\dfrac{10^3 \times 8^{-3}}{10^{-2} \times 2^5}$.

3. Simplifique e efetue:
(a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}$.
(b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
(c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2$.

4. Simplifique:
(a) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}$
(b) $(2x^{-3})^{-\frac{1}{3}}$
(c) $27^{-\frac{2}{3}} \times 9^{1,5}$.

5. Simplifique:
$\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} + \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \dfrac{4}{a-1}\right)^{-3}$.

6. Se $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ calcule:
(a) $x + x^{-1}$
(b) $x^2 + x^{-2}$
(c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2}{x^2 + x^{-2} + 3}$.

7. Determine o domínio de definição das expressões a seguir e simplifique-as.
(a) $\sqrt{\sqrt{x} \times \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}}$ (b) $\sqrt{x} \times \sqrt[3]{x^5} \times \sqrt[3]{x^4}$.

8. Determine o domínio de definição da expressão a seguir e simplifique-a.
$$\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}.$$

9. Simplifique:
(1) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}} b^3 c^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} b^4 c^{-1}}$
(2) $a^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt[3]{a} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{2}}}$.

10. Simplifique:
(a) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}$
(b) $(2x^3)^{-\frac{1}{3}}$.

11. Calcule:
(a) $2\sqrt{27} \times 6\sqrt{3}$
(b) $5\sqrt{72} \times 3\sqrt{50}$
(c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$
(d) $\sqrt{32} \times \sqrt{1/2}$.

12. Escreva na forma de fração irredutível:
(a) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ (b) $\left(\dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3}\right)^5$
(c) $\dfrac{35^2 \times 6^4}{14^5 \times 15^2}$.

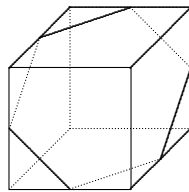
13. Efetue, dando a resposta na forma de uma fração irredutível.
(a) $\dfrac{5 \times 11^4 \times 18^4 \times 24^3}{55 \times 18^2}$
(b) $\dfrac{15 \times 24^4 \times 12^2 \times 22}{33 \times 8}$
(c) $\dfrac{45 \times 42^4 \times 36^3 \times 72}{35 \times 28}$
(d) $\dfrac{48 \times 22^4 \times 44 \times 121}{48^3 \times 38}$.

14. Efetue:
(a) $(-2)^3 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-2)^{-2}$
(b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 \times (0{,}01)^2 \times (0{,}25)^{\frac{1}{2}}$
(c) $2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1,33^0 + 4^{\frac{3}{2}}$.

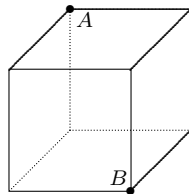
15. Efetue:
(a) $4^{\frac{1}{2}} - (-1)^{10} - (-1)^{17} + 25^{0,5}$
(b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{3}{9}} - 4^{-\frac{1}{2}}$.

16. Efetue:
(a) $(x^m)^2$
(b) $(-2x^{-2})^2$
(c) $\left(\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^2$
(d) $(-2x^{m+1})^2$.

17. Simplifique: $\dfrac{(-a)^7 \times (-b^2c^3)^4}{-b^3c \times (-a)^5}$.

18. Um cubo de aresta $\ell\, cm$ é cortado por um plano que passa pelo meio de algumas arestas, como mostrado na figura ao lado. A interseção do cubo com o plano é um polígono regular.

(a) Qual o perímetro desse polígono ?

(b) Qual a sua área ?

19. Uma lagartixa e um mosquito estão situados em vértices opostos de um cubo de aresta $\ell\, cm$ como mostrado na figura ao lado. A lagartixa, com a intenção de capturar o mosquito, desloca-se de A até B pelo caminho mais curto, evidentemente, ao longo das faces e arestas do cubo.

(a) Quantos caminhos distintos a lagartixa pode ter seguido ?

(b) Qual a medida desses caminhos mais curtos ?

20. Determine o domínio das expressões a seguir.

(a) $\sqrt[3]{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

(b) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x+2}}$.

21. Resolva as seguintes equações:

(1) $\sqrt[3]{x^4+x^3-28x^2+3x+143} - x + 1 = 0$;
(2) $2x + 2\sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a \neq 0)$;
(3) $\sqrt{3x-4} - \sqrt[8]{(3x-4)^3(9x-6)} = 0$;
(4) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 1$.

22. Dê o domínio da expressão

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \quad (a\,, b \neq 0)\,;$$

23. Resolva os sistemas:

(a) $\begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y=16+2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \,. \end{cases}$

24. Determine para quais valores de x as igualdades a seguir são verdadeiras.
(a) $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x}$;
(b) $\sqrt[3]{x^3} = x$;
(c) $\sqrt[3]{x^3} = -x$;
(d) $\sqrt{x^4} = x^2$;
(e) $\sqrt[4]{x^2-1} = \sqrt[4]{x-1} \times \sqrt[4]{x+1}$;
(f) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x}$;
(g) $\sqrt[3]{x^2-x} = \sqrt[3]{x-1} \times \sqrt[3]{x}$.

25. *Resolva a equação* $\sqrt{x^2} = 2$.

Solução:
Temos que: $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x$.
Consequentemente: se $\sqrt{x^2} = 2$ então $x = 2$.
Portanto: $\mathcal{S} = \{2\}$.

A solução está correta ? Se não, onde está o erro ?

26. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras.
(a) $x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
(b) $x\sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{|x|}\sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x \neq 0$;
(c) $x\sqrt{1+x^2} = -\sqrt{x^2(1+x^2)}$, $\forall x < 0$;
(d) $\sqrt[5]{x} = -\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x}}$, $\forall x \leq 0$.

27. Dê o domínio de definição de cada uma das expressões a seguir.

(a) -1^x (b) $(-1)^x$
(c) $(-x)^x$ (d) $(2x-x^2+1)^x$
(e) $\left(1-\dfrac{x}{1+x^2}\right)^{|x|}$ (f) $\big(2x+1\big)^{-x}$.

28. Estude o sinal da expressão

$$\frac{\sqrt[4]{|x|}-2\sqrt{|x|}}{x+1}\,.$$

14

Propriedades das potências

Na lição anterior relembramos a definição de potência e listamos algumas regras elementares que nos permitem operar com essas potências. Agora vamos estudar propriedades das potências que nos permitirão comparar potências, resolver algumas equações e inequações envolvendo potências e analisar sinais de expressões mais complexas do que as estudadas até agora.

1 Propriedades

A primeira dessas propriedades é a seguinte:

$$a^b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{e} \quad b > 0\,.$$

Essa propriedade não é difícil de ser demonstrada mas, para isso precisamos da definição formal de potências com expoente irracional, o que não fizemos nesse texto. A propriedade acima nos permite resolver equações envolvendo potências como, por exemplo, as mostradas nos exemplos a seguir. Para resolvê-las, determinamos os pontos onde a base se anula e depois verificamos em quais desses pontos o expoente é positivo. Tais pontos serão as soluções da equação dada.

Exemplos

❄ $x^{2x+1} = 0$

Nesse exemplo a base só se anula em $x = 0$ e nesse ponto o expoente vale 1. Portanto, essa equação tem uma única solução, a saber, $x = 0$.

❄ $(x-1)^{1-|x|} = 0$

Nesse exemplo a base só se anula em $x = 1$ e nesse ponto o expoente também se anula. Portanto, essa equação não tem soluções.

❄ $(x^2-1)^{x^2+2} = 0$

Nesse exemplo a base só se anula em $x = \pm 1$ e nesses pontos o expoente vale 3. Portanto, essa equação tem duas soluções, a saber: ± 1.

❄ $(x^2-2x-3)^{x+1} = 0$

Passo 1: *Pontos onde a base se anula.*

Temos que:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$.

Passo 2: *Avaliando o expoente onde a base se anula.*

$x + 1\big]_{x=3} = 3 + 1 > 0 \quad \therefore \quad x = 3$ é solução da equação inicial.

$x + 1\big]_{x=-1} = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \quad x = -1$ não é solução da equação inicial.

Assim, o conjunto solução da equação inicial é $\mathcal{S} = \{3\}$.

Outra propriedade importante é a seguinte.

$$\boldsymbol{a^b = 1 \iff a = 1 \ \text{ e } \ b} \text{ qualquer , ou então , } \boldsymbol{b = 0 \ \text{ e } \ a \neq 0}.$$

Essa propriedade também vai nos permitir resolver equações envolvendo potências. Para resolvê-las, determinamos os pontos onde a base vale 1 e o expoente está bem definido. Depois determinamos os pontos onde o expoente se anula e a base está bem definida e é não nula. O conjunto solução será a união desses dois conjuntos, como veremos a seguir. Essa propriedade, como a primeira, também é uma consequência da definição de potência.

Exemplos

❄ $(x-1)^x = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

$x - 1 = 1 \iff x = 2$.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = 0$ e nesse ponto a base vale:
$x - 1\big]_{x=0} = -1 \neq 0$.

Portanto, a equação tem exatamente duas soluções: 0 e 2.

❄ $(x^2 - x - 2)^{x-2} = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

$x^2 - x - 2 = 1 \iff x^2 - x - 3 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = 2$ e nesse ponto a base vale:
$x^2 - x - 2\big]_{x=2} = 4 - 2 - 2 = 0$.

Portanto, o conjunto solução é $\mathcal{S} = \{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\}$.

❄ $(x^2 - 2x - 2)^{x+3} = 1$

Passo 1: *Pontos onde a base vale* 1.

Temos que:

$x^2 - 2x - 2 = 1 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$.

Portanto, -1 e 3 são soluções da equação inicial.

Passo 2: *Pontos onde o expoente se anula e a base não.*

O expoente só se anula em $x = -3$ e nesse ponto temos:

$x^2 - 2x - 2\big]_{x=-3} = 9 + 6 - 2 \neq 0 \quad \therefore \quad x = -3$ é solução da equação inicial.

Assim, o conjunto solução da equação inicial é $\mathcal{S} = \{-3, -1, 3\}$.

Vamos agora relembrar mais algumas propriedades, conseqüências da propriedade anterior e que nos permitirão resolver novas equações.

Para ***base*** $\boldsymbol{0 < b \neq 1}$ **e** ***expoentes*** $\boldsymbol{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$**:**

$$\boldsymbol{b^\alpha = b^\beta \iff \alpha = \beta}.$$

Para ***expoente*** $\boldsymbol{\alpha > 0}$ **e** ***bases*** $\boldsymbol{a, b \geq 0}$:

$$\boldsymbol{a^\alpha = b^\alpha \iff a = b}.$$

Essa propriedade também é verdadeira para expoente negativo, desde que as bases sejam positivas (> 0).

Exemplos

❄ $2^x = 2^3 \iff x = 3$.

❄ $0{,}1^{|x|-1} = 0{,}1^3 \iff |x| - 1 = 3$.

❄ $2{,}2^{3x} = 2{,}2^{2x+1} \iff 3x = 2x + 1$.

❄ $0{,}2^{2x} = 0{,}2^{1-y} \iff 2x = 1 - y$.

❄ $|x|^{\sqrt{3}} = |2x-1|^{\sqrt{3}} \iff |x| = |2x-1|$.

❄ $(1+x^2)^\pi = 2^\pi \iff 1 + x^2 = 2$.

❄ $\big(1+|x|\big)^{0,1} = 2^{0,2} \iff 1 + |x| = 4$.

❄ $(2+x^4)^{3/5} = 2^{1/5} \iff 2 + x^4 = \sqrt[3]{2}$.

❄ $|x+1|^{x^2} = 2^{x^2} \iff |x+1| = 2$.

❄ $(1+2x^2)^x = 2^x \iff 1 + 2x^2 = 2$.

❄ Note que:
- ☞ $0^\alpha = 0^\beta$, $\forall\, \alpha, \beta > 0$. Em particular, não podemos concluir que $\alpha = \beta$;
- ☞ $1^\alpha = 1^\beta$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aqui, também não podemos concluir que $\alpha = \beta$;
- ☞ $a^0 = b^0$, $\forall\, a, b \neq 0$. Em particular, não podemos concluir que $a = b$.

Isso mostra que para resolvermos equações usando as propriedades da tabela acima não podemos esquecer das *hipóteses* sobre a base e o expoente.

❄ $|2x-1|^{3/2} = 5^{3/2} \iff |2x-1| = 5$.

❄ No entanto, *não podemos afirmar* que: $x^{4/5} = 2^{4/5} \iff x = 2$
pois a base x pode assumir valores negativos. Repare que $x = -2$ também é solução.

❄ Como $1 + x^4$ nunca se anula, podemos escrever:
$(1+x^4)^{-\pi} = 3^{-\pi} \iff 1 + x^4 = 3$.

A última regra que acabamos de ver tem uma versão mais geral quando o expoente α é um número racional

> *Quando $\alpha > 0$ é uma fração irredutível com numerador par, temos*:
> $a^\alpha = b^\alpha \iff a = \pm\, b$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
>
> *Quando $\alpha > 0$ é uma fração irredutível com numerador ímpar, e denominador ímpar, temos*:
> $a^\alpha = b^\alpha \iff a = b$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
>
> Essas propriedades também valem para *expoente negativo*, desde que as bases a, b sejam *não nulas*.

Exemplos

❄ $x^{2/5} = (y-1)^{2/5} \iff x = \pm(y-1)$.

❄ $(x^2-1)^{2/3}=(x+2)^{1/3} \iff \left[(x^2-1)^2\right]^{1/3}=(x+2)^{1/3} \iff (x^2-1)^2=x+2\,.$

❄ $(x^2-1)^{-5/3}=(1+2|x|)^{-5/3} \iff x^2-1=1+2|x|$
já que os valores que anulam as bases não são soluções da equação $x^2-1=1+2|x|$.

❄ $(x-2)^{-8/3}=(1-2x)^{-8/3} \iff x-2=\pm(1-2x)$
pois os valores que anulam as bases não são soluções das equações $x-2=\pm(1-2x)$.

2 Potências e relação de ordem

Para base $b>1$:

$b^\alpha < b^\beta \iff \alpha < \beta$ **(1)**

$b^\alpha > b^\beta \iff \alpha > \beta$ **(2)**

quaisquer que sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Para $0 < $ base $b < 1$:

$b^\alpha > b^\beta \iff \alpha < \beta$ **(3)**

$b^\alpha < b^\beta \iff \alpha > \beta$ **(4)**

quaisquer que sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Essas desigualdades nos permitem comparar expressões numéricas e resolver inequações, como veremos nos exemplos a seguir. Elas continuam verdadeiras quando trocamos em (1) , (2) , (3) e (4): “$<$” por “$\leq$” e “$>$” por “$\geq$”. Essas quatro propriedades são, de fato, consequências da primeira delas.

Exemplos

❄ De: $2{,}9<3$
Segue que: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{2,9} < \left(\sqrt[3]{5}\right)^3$.

❄ Como: $-\pi < -3{,}1$
Temos que: $0{,}2^{-\pi} > 0{,}2^{-3,1}$.

❄ De: $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$
Conclui-se que: $5^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{3}}$.

❄ De: $\sqrt{2} > 1{,}1$
Concluímos que: $5^{\sqrt{2}} > 5^{1,1}$.

❄ $2^x \leq 2^3 \iff x\leq 3\,.$

❄ $2x \geq 1-y \iff 0{,}2^{2x} \leq 0{,}2^{1-y}$.

❄ $2{,}2^{3x} \leq 2{,}2^{2x+1} \iff 3x \leq 2x+1\,.$

❄ $0{,}2^{3x} \leq 0{,}2^{x+1} \iff 3x \geq x+1\,.$

❄ Temos que:

$$-32 < -11{,}3 < -\pi < -3 < -2{,}91 < -1{,}01 < -0{,}03 <$$
$$< 0 < 1{,}3 < \sqrt{2} < 2{,}05 < 3 < \sqrt{11} < 20 < 21{,}09 < \frac{91}{3}\,.$$

Logo,

$$(1{,}2)^{-32} < (1{,}2)^{-11{,}3} < (1{,}2)^{-\pi} < (1{,}2)^{-3} < (1{,}2)^{-2{,}91} < (1{,}2)^{-1{,}01} < (1{,}2)^{-0{,}03} <$$
$$< (1{,}2)^{0} < (1{,}2)^{1{,}3} < (1{,}2)^{\sqrt{2}} < (1{,}2)^{2{,}05} < (1{,}2)^{3} <$$
$$< (1{,}2)^{\sqrt{11}} < (1{,}2)^{20} < (1{,}2)^{21{,}09} < (1{,}2)^{\frac{91}{3}}$$

e

$$(0{,}8)^{-32} > (0{,}8)^{-11{,}3} > (0{,}8)^{-\pi} > (0{,}8)^{-3} > (0{,}8)^{-2{,}91} > (0{,}8)^{-1{,}01} > (0{,}8)^{-0{,}03} >$$
$$> (0{,}8)^{0} > (0{,}8)^{1{,}3} > (0{,}8)^{\sqrt{2}} > (0{,}8)^{2{,}05} > (0{,}8)^{3} >$$
$$> (0{,}8)^{\sqrt{11}} > (0{,}8)^{20} > (0{,}8)^{21{,}09} > (0{,}8)^{\frac{91}{3}}\,.$$

Temos ainda as seguintes propriedades para as potência:

Para $\boldsymbol{expoente\ \alpha > 0}$**:**

$a^\alpha < b^\alpha \iff a < b$ **(5)**

$a^\alpha > b^\alpha \iff a > b$ **(6)**

quaisquer que sejam $a\,,b > 0$.

Para $\boldsymbol{expoente\ \alpha < 0}$**:**

$a^\alpha < b^\alpha \iff a > b$ **(7)**

$a^\alpha > b^\alpha \iff a < b$ **(8)**

quaisquer que sejam $a\,,b > 0$.

Novamente, essas desigualdades nos permitem comparar expressões numéricas e resolver inequações,. Elas permanecem verdadeiras quando trocamos em (5) , (6) , (7) e (8): "$<$" por "$\leq$" e "$>$" por "$\geq$". Essas quatro propriedades são consequências da primeira delas.

Exemplos

❄ De: $2{,}9 < 3$
Segue que: $2{,}9^{5{,}2} < 3^{5{,}2}$.

❄ Como: $\pi > 3{,}1$
Temos que: $\pi^{-2} < 3{,}1^{-2}$.

❄ De: $x > 1{,}4$
Segue que: $x^{\sqrt[3]{2}} > (1{,}4)^{\sqrt[3]{2}} > (1{,}4)^{\sqrt[4]{2}}$.

❄ Como: $\sqrt{2} > 1{,}4$
Temos que: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > (1{,}4)^{\sqrt{2}} > (1{,}4)^{1{,}4}$.

❄ $|x|^2 < |2x-1|^2 \iff |x| < |2x-1|$

❄ $|x+1|^\pi \leq 2^\pi \iff |x+1| \leq 2$

❄ $(1+|x|)^{-2/3} \geq 2^{-2/3} \iff 1+|x| \leq 2$

❄ $(1+x^2)^{-\sqrt{3}} < 2{,}9^{-\sqrt{3}} \iff 1+x^2 > 2{,}9$

❄ Note que:

☞ $2 < 3$, no entanto não podemos concluir que $2^0 < 3^0$ pois $2^0 = 1 = 3^0$;

☞ $0 < 1$, no entanto *não podemos concluir* que $0^{-1} > 1^{-1}$ pois 0^{-1} não está definido.

☞ $-2 < -1$, no entanto *não podemos concluir* que $(-2)^2 < (-1)^2$ pois $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$.

❄ Temos que
$$1{,}01 < \sqrt{2} < 2{,}3 < 3 < \pi < \frac{23}{4} < 6{,}001 < 2\pi < 10{,}001 < 111\,.$$
Consequentemente,
$$(1{,}01)^\pi < \left(\sqrt{2}\right)^\pi < (2{,}3)^\pi < 3^\pi < \pi^\pi < \left(\frac{23}{4}\right)^\pi < (6{,}001)^\pi < (2\pi)^\pi < (10{,}001)^\pi < 111^\pi$$
e
$$(1{,}01)^{-\pi} > \left(\sqrt{2}\right)^{-\pi} > (2{,}3)^{-\pi} > 3^{-\pi} > \pi^{-\pi} > \left(\frac{23}{4}\right)^{-\pi} > (6{,}001)^{-\pi} > (2\pi)^{-\pi} > (10{,}001)^{-\pi} > \cdots$$

Exercícios resolvidos

1. **Use a estimativa $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ para mostrar que $2\sqrt[5]{4} < 2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.**

Solução Das propriedades de potência com base superior a 1 temos que:

$$\begin{aligned} 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \quad &\iff \quad 2^{1{,}4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}5} \quad \iff \quad 2^{\frac{14}{10}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{15}{10}} \\ &\iff \quad 2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} \quad \iff \quad \sqrt[5]{2^7} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt{2^3} \\ &\iff \quad 2\sqrt[5]{4} < 2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

2. **Resolva as equações:**
(a) $5^x = 5^{2x-1}$ **(b)** $2^{x^2-1} = 1$ **(c)** $0{,}2^{1-x} = 0{,}2^{2x+1}$ **(d)** $2^{1-x^2} = 4^{2x+1}$.

Solução Para isso vamos usar as propriedades das potências.

(a) Temos que $0 < 5 \neq 1$. Assim sendo, podemos concluir que:
$$5^x = 5^{2x-1} \iff x = 2x - 1 \iff x = 1\,. \quad \text{Portanto, } \mathcal{S} = \{1\}.$$

(b) Primeiramente, observemos que: $1 = 2^0$. Como $0 < 2 \neq 1$ segue que:
$$2^{x^2-1} = 1 \iff 2^{x^2-1} = 2^0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1\,. \quad \text{Logo, } \mathcal{S} = \{\pm 1\}\,.$$

(c) Temos que $0 < 0{,}2 \neq 1$. Assim sendo, resulta que:
$$0{,}2^{1-x} = 0{,}2^{2x+1} \iff 1 - x = 2x + 1 \iff x = 0\,. \quad \text{Assim, } \mathcal{S} = \{0\}\,.$$

(d) Note que: $4^{2x+1} = (2^2)^{2x+1} = 2^{4x+2}$. Agora, como $0 < 2 \neq 1$ resulta que:

$$2^{1-x^2} = 4^{2x+1} \iff 2^{1-x^2} = 2^{4x+2} \iff 1 - x^2 = 4x + 2 \iff x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}\,.$$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \{-2 \pm \sqrt{3}\}$.

3. Resolva as equações:

(a) $|x+1|^{\pi} = 2^{\pi}$ **(b)** $(1+x^2)^{\sqrt{2}} = 2^{1/\sqrt{2}}$ **(c)** $\big(1+|x|\big)^{3/2} = 4\,.$

Solução Para isso, voltemos às propriedades das potências.

(a) Nesse caso, o expoente é positivo e as bases são maiores ou iguais a zero, logo, podemos escrever:

$$|x+1|^{\pi} = 2^{\pi} \iff |x+1| = 2 \iff x + 1 = \pm 2 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3\,.$$

Logo, $\mathcal{S} = \{1\,, -3\}$.

(b) Começamos observando que: $2^{1/\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}/2} = \big(\sqrt{2}\,\big)^{\sqrt{2}}$. Assim, como expoente e base são positivos, teremos:

$$(1+x^2)^{\sqrt{2}} = 2^{1/\sqrt{2}} \iff (1+x^2)^{\sqrt{2}} = \big(\sqrt{2}\,\big)^{\sqrt{2}} \iff 1 + x^2 = \sqrt{2} \iff x^2 = \sqrt{2} - 1$$
$$\iff x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\,. \quad \text{Portanto, } \mathcal{S} = \Big\{ \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\Big\}.$$

(c) Novamente, como base e expoente são positivos, resulta que:

$$\big(1+|x|\big)^{3/2} = 4 \iff \big(1+|x|\big)^{3/2} = (4^{2/3})^{3/2} = (2^{4/3})^{3/2} \iff 1 + |x| = 2^{4/3} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\iff |x| = 2\sqrt[3]{2} - 1 \iff x = \pm(2\sqrt[3]{2} - 1)\,. \quad \text{Assim, } \mathcal{S} = \{\pm(2\sqrt[3]{2} - 1)\}\,.$$

4. Resolva as equações:

(a) $(1-x^2)^{7/5} = (x-2)^{7/5}$ **(b)** $(3-|x|)^{2/5} = (2|x|+1)^{2/5}$.

Solução Nesse exercício os expoentes são racionais positivos. Vamos então aplicar a regra para tais expoentes.

(a) Nesse caso temos:

$$(1-x^2)^{7/5} = (x-2)^{7/5} \iff 1 - x^2 = x - 2 \iff x^2 + x - 3 = 0$$
$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\,.$$

Portanto, $\mathcal{S} = \Big\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\Big\}$.

(b) Temos que:

$$(3-|x|)^{2/5}=(2|x|+1)^{2/5} \iff 3-|x|=\pm(2|x|+1) \iff 3|x|=2 \text{ ou } |x|=-4$$
$$\iff |x|=3/2 \iff x=\pm 3/2\,.$$

Logo, $\mathcal{S}=\{\pm 3/2\}$.

5. Resolva as equações:

(a) $\boldsymbol{x^{-3/5}=(2-x^2)^{-3/5}}$ **(b)** $\boldsymbol{(x^2-x)^{-2/3}=(x^2+x-2)^{-2/3}}$**.**

Solução Nesse exercício as potências têm expoentes racionais mas, negativos. Assim, não podemos ter soluções que anulam uma das bases.

(a) Para resolver $x^{-3/5}=(2-x^2)^{-3/5}$ basta resolver $x=2-x^2$ e considerar apenas as soluções que não anulam as bases das potências.

Temos então que:

$$x=2-x^2 \iff x^2+x-2=0 \iff (x+2)(x-1)=0 \iff x=-2 \text{ ou } x=1\,.$$

Além disso, esses valores de x não anulam nem x nem $2-x^2$ que são as bases das potências na equação inicial. Logo, $\mathcal{S}=\{1\,,-2\}$.

(b) Nesse item começamos resolvendo as equações $x^2-x=\pm(x^2+x-2)$:

$$\begin{aligned} x^2-x=\pm(x^2+x-2) &\iff x(x-1)=\pm(x+2)(x-1)\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=\pm(x+2)\\ &\iff x=1 \text{ ou } 2x=-2\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-1\,. \end{aligned}$$

Voltando à equação inicial $(x^2-x)^{-2/3}=(x^2+x-2)^{-2/3}$ verificamos que $x=1$ anula a base x^2-x. No entanto, $x=-1$ não anula nem x^2-x, nem x^2+x-2. Consequentemente, $\mathcal{S}=\{-1\}$.

6. Resolva as equações:

(a) $\boldsymbol{4^x+2^x=6}$ **(b)** $\boldsymbol{3^{x+1}+3^{x-1}=10\sqrt{3}}$ **(c)** $\boldsymbol{\big(\sqrt{5}\,\big)^{x^2}\times 5^x=\sqrt[3]{5}}$**.**

Solução Vamos usar mudanças de variáveis para resolver as duas primeiras equações.

(a) Temos que: $4^x+2^x=6 \iff 2^{2x}+2^x=6 \iff \big(2^x\big)^2+2^x=6\,.$

Seja $z=2^x$. Assim, a equação acima toma a forma:

$$z^2+z-6=0 \iff (z+3)(z-2)=0 \iff z=2 \text{ ou } z=-3\,.$$

Para voltar a variável inicial devemos fazer:

Passo 1: $z=2$.
Assim,
$2=2^x \iff x=1\,.$

Passo 2: $z=-3$.
Assim, $-3=2^x$ que não tem solução pois $2^x>0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $\mathcal{S} = \{1\}$.

(b) Temos que: $3^{x+1} + 3^{x-1} = 10\sqrt{3} \iff 3 \times 3^x + 3^x/3 = 10\sqrt{3}$.

Façamos a mudança de variável $z = 3^x$. Com essa nova variável z a equação toma a forma:

$$3z + z/3 = 10\sqrt{3} \iff 9z + z = 3 \times 10\sqrt{3} \iff z = 3 \times 3^{1/2} \iff z = 3^{3/2}.$$

Assim: $3^x = 3^{3/2} \iff x = 3/2$. Consequentemente, $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

(c) Nesse item, temos que:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}\right)^{x^2} \times 5^x = \sqrt[3]{5} \iff\ & 5^{x^2/2} \times 5^x = 5^{1/3} \iff x^2/2 + x = 1/3 \iff 3x^2 + 6x - 2 = 0 \\ \iff\ & x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+24}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} \\ \iff\ & x = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{S} = \left\{-1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$.

7. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?

(a) $5^{2/3} > 5^{3/4}$ **(b)** $1{,}01^{0{,}31} > 1{,}01^{0{,}3}$ **(c)** $\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}4}$ **(d)** $\sqrt[3]{11} > \sqrt[5]{11^2}$.

Solução Para isso, vamos usar as propriedades que permitem comparar potências.

(a) Temos que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ pois $8 < 9$. Assim, como a base $b = 5 > 1$ segue que $b^{2/3} < b^{3/4}$, ou seja, $5^{2/3} < 5^{3/4}$. Portanto, a afirmação é **falsa**.

(b) Nesse caso temos que $0{,}31 > 0{,}3$. Como a base $b = 1{,}01 > 1$ segue que $b^{0{,}31} > b^{0{,}3}$, ou seja, $1{,}01^{0{,}31} > 1{,}01^{0{,}3}$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

(c) Temos que $0{,}3 < 0{,}4$. Logo, $-0{,}3 > -0{,}4$. Como $b = \sqrt{2} > 1$, segue que $b^{-0{,}3} > b^{-0{,}4}$, isto é, $\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}4}$. Consequentemente, a afirmação é **verdadeira**.

(d) Temos que $\sqrt[3]{11} = 11^{1/3}$ e $\sqrt[5]{11^2} = 11^{2/5}$. Por outro lado, temos que $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ pois $5 < 6$. Assim, como $b = 11 > 1$ segue que $b^{1/3} < b^{2/5}$, ou seja, $11^{1/3} < 11^{2/5}$. Mostramos assim que $\sqrt[3]{11} < \sqrt[5]{11^2}$ e portanto, a afirmação em questão é **falsa**.

8. Coloque em ordem crescente os seguintes números:

(a) $\sqrt[3]{7}$; $2\sqrt{2}$; $7/4$; $\pi/2$

(b) $0{,}3^{\sqrt[3]{7}}$; $0{,}3^{2\sqrt{2}}$; $0{,}3^{7/4}$; $0{,}3^{\pi/2}$

(c) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}}$; $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/2\sqrt{2}}$; $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{4/7}$; $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}$.

Solução Novamente, vamos usar as propriedades que permitem comparar potências.

(a) Com uma máquina de calcular podemos obter as seguintes desigualdades:

$$\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}\,.$$

Vamos agora demonstrá-las, usando nossos argumentos.

Temos que:

$$\pi/2 < 7/4 \iff \pi < 7/2 \iff \pi < 3{,}5\,.$$

Isso mostra que a primeira desigualdade é verdadeira, pois $\pi < 3{,}2 < 3{,}5$.

Passemos agora à prova da desigualdade $7/4 < \sqrt[3]{7}$:

$$\frac{7}{4} < \sqrt[3]{7} \iff 7 < 4\sqrt[3]{7} \iff 7^3 < 4^3 \times 7 \iff 7^2 < 4^3 \iff 49 < 64$$

o que mostra que a desigualdade $7/4 < \sqrt[3]{7}$ é verdadeira.

A desigualdade $\sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ é verdadeira pois, $\sqrt[3]{7} < 2 < 2\sqrt{2}$.

Evidentemente, para resolver esta questão não precisávamos usar uma máquina de calcular. Apenas teríamos um pouco mais de trabalho para estabelecer as comparações.

(b) Como $\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ e a base b satisfaz $0 < b = 0{,}3 < 1$, segue que:

$$b^{\pi/2} > b^{7/4} > b^{\sqrt[3]{7}} > b^{2\sqrt{2}} \quad \text{ou seja} \quad 0{,}3^{\pi/2} > 0{,}3^{7/4} > 0{,}3^{\sqrt[3]{7}} > 0{,}3^{2\sqrt{2}}.$$

(c) Nesse caso, precisamos saber se $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ é maior ou menor do que 1 . Para isso, comecemos com a desigualdade a seguir:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 1 \iff 2-\sqrt{3} < \sqrt{3}-\sqrt{2} \iff 2+\sqrt{2} < 2\sqrt{3} \iff 4+2+4\sqrt{2} < 12$$
$$\iff 4\sqrt{2} < 6 \iff 2\sqrt{2} < 3 \iff 8 < 9\,.$$

Isso mostra que a fração acima é menor do que 1 . Por outro lado, de $\pi/2 < 7/4 < \sqrt[3]{7} < 2\sqrt{2}$ segue que

$$2/\pi > 4/7 > 1/\sqrt[3]{7} > 1/2\sqrt{2}\,.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{4/7} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}} < \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{1/2\sqrt{2}}.$$

9. **Coloque em ordem crescente os seguintes números:**

(a) $-\pi^2 \;;\; -12{,}01 \;;\; -\sqrt{63} \;;\; -3\pi$

(b) $4^{-\pi^2} \;;\; 4^{-12{,}01} \;;\; 4^{-\sqrt{63}} \;;\; 4^{-3\pi}$

(c) $\left(3-\sqrt{5}\right)^{-\pi^2} \;;\; \left(3-\sqrt{5}\right)^{-12{,}01} \;;\; \left(3-\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{63}} \;;\; \left(3-\sqrt{5}\right)^{-3\pi}$.

Solução Façamos como no exercício anterior.

(a) Fazendo estimativas desses números numa máquina de calcular, podemos obter a seguinte ordenação:

$$\sqrt{63} < 3\pi < \pi^2 < 12{,}01\,.$$

Vamos agora mostrar, com os nossos argumentos, que elas são verdadeiras.

Temos que: $\sqrt{63} < 8 < 9 < 3\pi < \pi^2 < (3{,}2)^2 = 10{,}24 < 12{,}01$. Segue então que

$$-\sqrt{63} > -3\pi > -\pi^2 > -12{,}01\,.$$

(b) Como a base $b = 4 > 1$ resulta que: $b^{-\sqrt{63}} > b^{-3\pi} > b^{-\pi^2} > b^{-12{,}01}$ ou seja,

$$4^{-\sqrt{63}} > 4^{-3\pi} > 4^{-\pi^2} > 4^{-12{,}01}.$$

(c) Nesse item precisamos saber se $3 - \sqrt{5}$ é maior ou igual a 1 . Temos que

$$\begin{aligned} 2 < \sqrt{5} < 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2 > -\sqrt{5} > -3 \quad \Longleftrightarrow \quad 3-2 > 3-\sqrt{5} > 3-3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 > 3-\sqrt{5} > 0\,. \end{aligned}$$

Assim, temos que $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$. Logo,

$$\left(3-\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{63}} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-3\pi} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-\pi^2} < \left(3-\sqrt{5}\right)^{-12{,}01}.$$

10. Resolva as inequações:

(a) $2^{x^2-3} < 2^{2x}$ **(b)** $0{,}5^{|x|-1} > \sqrt{0{,}5}$ **(c)** $0{,}2^{3x} \leq 0{,}2^{x^2}$ **(d)** $4^x - 6\times 2^x + 8 \leq 0$ **.**

Solução Vamos resolver essas inequações lançando mão das propriedades de potência que aprendemos. No entanto, podemos resolvê-las com os argumentos desenvolvidos na Lição 12 pois todas as expressões associadas às inequações desse exercício são expressões que *variam continuamente* em seus domínios de definição.

(a) A base $b = 2 > 1$. Logo, podemos escrever:

$$2^{x^2-3} < 2^{2x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 3 < 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 < 0\,.$$

Resolvendo a inequação $x^2 - 2x - 3 < 0$:

Temos que:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \ \text{ ou } \ x = -1$$

Como o coeficiente do termo do segundo grau vale $1 > 0$, segue que $x^2 - 2x - 3 < 0$ quando, e somente quando $-1 < x < 3$. Portanto,

$$2^{x^2-3} < 2^{2x} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-1\,,3)\,.$$

(b) Nesse item a base $0 < b = 0{,}5 < 1$. Assim, podemos escrever:

$$0{,}5^{|x|-1} > \sqrt{0{,}5} \iff 0{,}5^{|x|-1} > 0{,}5^{1/2} \iff |x| - 1 < 1/2 \iff |x| < 3/2$$
$$\iff x \in (-3/2\,,3/2\,)\,.$$

(c) Aqui, a base $0 < b = 0{,}2 < 1$. Logo:

$$0{,}2^{3x} \leq 0{,}2^{x^2} \iff 3x \geq x^2 \iff x^2 - 3x \leq 0 \iff x(x-3) \leq 0$$
$$\iff x \in [\,0\,,3\,]\,.$$

(d) Com a mudança de variável $z = 2^x$ a inequação $4^x - 6 \times 2^x + 8 \leq 0$ toma a forma:

$$z^2 - 6z + 8 \leq 0 \iff (z-4)(z-2) \leq 0 \iff 2 \leq z \leq 4\,.$$

Voltando a variável inicial, obtemos:

$$4^x - 6 \times 2^x + 8 \leq 0 \iff 2 \leq 2^x \leq 4 \iff 2^1 \leq 2^x \leq 2^2 \iff 1 \leq x \leq 2\,.$$

11. **Quais das afirmações a seguir são verdadeiras ?**

(a) $\mathbf{3{,}1^{2{,}1} > 3{,}01^{2{,}1}}$ **(b)** $\mathbf{0{,}01^{-0{,}3} < 0{,}1^{-0{,}3}}$ **(c)** $\mathbf{\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} > \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2}}$ **(d)** $\mathbf{\left(\frac{4}{7}\right)^{\pi} < \left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}}$.

Solução Passemos à comparação dessas potências.

(a) Temos que $3{,}1 > 3{,}01$. Assim, como o expoente $\alpha = 2{,}1 > 0$ segue que $3{,}1^{\alpha} > 3{,}01^{\alpha}$, ou seja, $3{,}1^{2{,}1} > 3{,}01^{2{,}1}$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

(b) Nesse caso temos que $0{,}01 < 0{,}1$. Assim, como o expoente $\alpha = -0{,}3 < 0$ segue que $0{,}01^{\alpha} > 0{,}1^{\alpha}$, ou seja, $0{,}01^{-0{,}3} > 0{,}1^{-0{,}3}$. Portanto, a afirmação é **falsa**.

(c) Temos que

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} = 5^{-0{,}3/3} = 5^{-0{,}1} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2} = 2^{-0{,}2/2} = 2^{-0{,}1}$$

Nesse caso, o expoente $\alpha = -0{,}1 < 0$ e $5 > 2$. Logo, $5^{\alpha} < 2^{\alpha}$, isto é, $5^{-0{,}1} < 2^{-0{,}1}$. Consequentemente,

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}3} < \left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}2}$$

mostrando que a afirmação é **falsa**.

(d) Temos que $\frac{4}{7} > \frac{2}{5}$ pois $20 > 14$. O expoente $\alpha = \pi > 0$. Segue então que $(4/7)^{\alpha} > (2/5)^{\alpha}$, isto é,

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{\pi} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$$

demonstrando assim que a afirmação é **falsa**.

12. **Qual o maior dos números:** $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}}$ **ou** $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}$ **?**

Solução Para responder essa pergunta, precisamos comparar os expoentes e saber se a base é maior do que 1 ou se está entre 0 e 1.

Vejamos:

- Sobre os expoentes, temos que:
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}} < \dfrac{2}{\pi} \iff \dfrac{\pi}{2} < \sqrt[3]{7} \iff \pi < 2\sqrt[3]{7} \iff \pi^3 < 8 \times 7 \iff \pi^3 < 56.$
Para verificar que essa última desigualdade é verdadeira, lembremos que:
$$\pi < 3{,}2 \iff \pi^3 < (3{,}2)^3 = 32{,}768\,.$$
Agora, podemos concluir que $\pi^3 < 56$ e, conseqüentemente, acabamos de demonstrar que
$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} < \frac{2}{\pi}\,. \tag{14.1}$$

- Sobre a base, temos que[1]:
$$\begin{aligned}\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} < 1 &\iff 2+\sqrt{3} < \sqrt{6}-\sqrt{2} \iff 2+\sqrt{2} < \sqrt{6}-\sqrt{3}\\ &\iff 4+4\sqrt{2}+2 < 6+3-6\sqrt{2} \iff 10\sqrt{2} < 3\end{aligned}$$
demonstrando que, de fato,
$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} > 1. \tag{14.2}$$

Agora, de (14.1) e (14.2) podemos concluir que
$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt[3]{7}} < \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{2/\pi}.$$

13. **Qual o maior dos números:** $\sqrt{5}$ **ou** $\sqrt{3}+\sqrt{8-\sqrt{60}}$ **?**

Solução Para responder essa pergunta façamos:
$$\begin{aligned}\sqrt{5} < \sqrt{3}+\sqrt{8-\sqrt{60}} &\iff \sqrt{5}-\sqrt{3} < \sqrt{8-\sqrt{60}} \iff 5-2\sqrt{15}+3 < 8-\sqrt{60}\\ &\iff \sqrt{60} < 2\sqrt{15} \iff \sqrt{60} < \sqrt{60}\end{aligned}$$
que é falso.

[1]Note que o numerador e o denominador da fração são positivos.

Por outro lado, trocando o sinal de " $<$ " pelo de " $>$ " obteremos:

$$\sqrt{5} > \sqrt{3} + \sqrt{8 - \sqrt{60}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{60} > \sqrt{60}$$

Isso nos garante que $\sqrt{5} = \sqrt{3} + \sqrt{8 - \sqrt{60}}$.

14. Coloque em ordem crescente os seguintes números:

(a) $\sqrt{7}$; 3 ; $2{,}5$; π

(b) $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{2}}$; $2{,}5^{\sqrt{2}}$; $\pi^{\sqrt{2}}$

(c) $\left(\sqrt{7}\right)^{-0{,}1}$; $3^{-0{,}1}$; $2{,}5^{-0{,}1}$; $\pi^{-0{,}1}$

(d) $\left(\sqrt{7}\right)^{\pi-\sqrt{11}}$; $3^{\pi-\sqrt{11}}$; $2{,}5^{\pi-\sqrt{11}}$; $\pi^{\pi-\sqrt{11}}$.

Solução Deixemos de lado a ajuda da máquina de calcular.

(a) Temos que $2{,}5 = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2}$. Agora, para comparar $5/2$ e $\sqrt{7}$ fazemos:

$$\frac{5}{2} < \sqrt{7} \quad \Longleftrightarrow \quad 5 < 2\sqrt{7} \quad \Longleftrightarrow \quad 25 < 28$$

mostrando assim que $2{,}5 < \sqrt{7}$.

Por outro lado, temos que: $\sqrt{7} < 3 < \pi$. Resulta então que:

$$2{,}5 < \sqrt{7} < 3 < \pi\,.$$

(b) Como $2{,}5 < \sqrt{7} < 3 < \pi$ e o expoente $\alpha = \sqrt{2} > 0$ segue que

$$2{,}5^{\sqrt{2}} < \left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}} < 3^{\sqrt{2}} < \pi^{\sqrt{2}}\,.$$

(c) Nesse caso, como o expoente $\alpha = -0,1 < 0$ teremos:

$$2{,}5^{-0{,}1} > \left(\sqrt{7}\right)^{-0{,}1} > 3^{-0{,}1} > \pi^{-0{,}1}\,.$$

(d) Para ordenar os números desse item precisamos apenas saber se o expoente $\alpha = \pi - \sqrt{11}$ é ou não positivo. Para analizar o sinal de $\pi - \sqrt{11}$ começamos com a desigualdade:

$$\pi < \sqrt{11} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^2 < 11\,.$$

Assim, para mostrar que $\pi < \sqrt{11}$ basta mostrar que $\pi^2 < 11$.

No entanto, sabemos que: $\pi < 3{,}2$. Consequentemente, $\pi^2 < 3{,}2^2 = 10{,}24 < 11$. Sendo assim, concluímos que $\pi < \sqrt{11}$ e consequentemente, $\alpha = \pi - \sqrt{11} < 0$. Portanto,

$$2{,}5^{\alpha} > \left(\sqrt{7}\right)^{\alpha} > 3^{\alpha} > \pi^{\alpha} \quad \text{ou seja} \quad 2{,}5^{\pi-\sqrt{11}} > \left(\sqrt{7}\right)^{\pi-\sqrt{11}} > 3^{\pi-\sqrt{11}} > \pi^{\pi-\sqrt{11}}.$$

15. Qual o domínio e o quadro de sinais da expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$?

Solução Para responder essa pergunta vamos, primeiramente, determinar a fração irredutível que é *geratriz* da dízima periódica $2{,}1515\ldots$

Para isso, seja $z = 2{,}1515\ldots$

Assim, $100\,z = 215{,}1515\ldots$ e teremos:

$$100\,z - z = 215{,}1515\ldots - 2{,}1515\ldots = 215 + 0{,}1515\ldots - 2 - 0{,}1515\ldots = 215 - 2 = 213.$$

Resulta daí que

$$99\,z = 213 \iff z = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}.$$

Portanto, a fração irredutível que é geratriz da dízima em questão é a fração $71/33$. Nesse caso, a expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ toma a forma

$$(5-2x)^{2,1515\ldots} = (5-2x)^{71/33} = \sqrt[33]{(5-2x)^{71}} \tag{14.3}$$

a qual está bem definida para todos os valores reais da variável x já que o índice da raiz na expressão acima é ímpar. Assim sendo, a expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ está bem definida em toda a reta $\mathbb{R}$.

A expressão à direita em (14.3) também nos garante que o sinal de $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ é o mesmo sinal de $5-2x$, ou seja, sobre a expressão $(5-2x)^{2,1515\ldots}$ podemos garantir que:

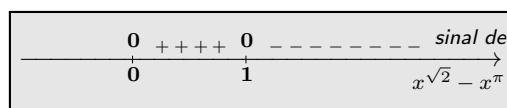
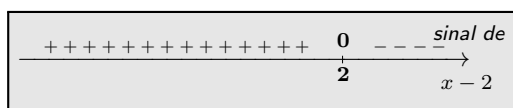
- se anula apenas em $x = 5/2$;
- é positiva em $(-\infty\,, 5/2\,)$;
- é negativa em $(\,5/2\,,\infty\,)$.

16. Qual deve ser o quadro de sinais da expressão $\dfrac{x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}}{x-2}$?

Solução Nessa expressão temos que:

- O denominador se anula quando, e somente quando, $x = 2$;
- O numerador só está bem definido para $x \geq 0$ pois os expoentes são irracionais;
- O numerador se anula quando, e somente quando, $x = 0$ ou $x = 1$.

  Além disso, como $\sqrt{2} < \pi$, concluímos que:
- $x^{\sqrt{2}} < x^{\pi}$ quando $x > 1 \iff x^{\sqrt{2}} - x^{\pi} < 0$ quando $x > 1$;
- $x^{\sqrt{2}} > x^{\pi}$ quando $0 < x < 1 \iff x^{\sqrt{2}} - x^{\pi} > 0$ quando $0 < x < 1$.

Assim, os quadros de sinais de $x-2$ e $x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}$ são da forma:

Conseqëntemente, segue das informações acima que o domínio de definição da expressão $\dfrac{x^{\sqrt{2}} - x^{\pi}}{x-2}$ é o conjunto $[\,0\,,2) \cup (\,2\,,\infty)$ e seu quadro de sinais é mostrado a seguir.

0 + + + + 0 − − − − nd + + + + sinal de $\frac{x^{\sqrt{2}}-x^{\pi}}{x-2}$
0 1 2

17. Qual deve ser o quadro de sinais da expressão $\dfrac{8^x - \pi^{2x}}{1-x}$?

Solução Temos que

$$\frac{8^x - \pi^{2x}}{1-x} = \frac{8^x - (\pi^2)^x}{1-x} \quad \text{para} \quad x \neq 1.$$

Consideremos então a expressão

$$\frac{8^x - (\pi^2)^x}{1-x}\,.$$

Nessa expressão temos que:

- O denominador se anula quando, e somente quando, $x = 1$;
- O numerador está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ pois as bases das potências envolvidas são positivas ;
- Além disso, como $8 < \pi^2$, concluímos que:
  - $8^x < \big(\pi^2\big)^x$ quando $x > 0 \iff 8^x - \big(\pi^2\big)^x < 0$ quando $x > 0$;
  - $8^x > \big(\pi^2\big)^x$ quando $x < 0 \iff 8^x - \big(\pi^2\big)^x > 0$ quando $x < 0$.
- Do item anterior segue que o numerador da expressão em estudo se anula quando, e somente quando, $x = 0$.

Assim, os quadros de sinais de $1 - x$ e $8^x - \big(\pi^2\big)^x$ são da forma:

Donde concluímos que o quadro de sinais de $\dfrac{8^x - \pi^{2x}}{1-x}$ é dado por:

+ + + + + + + + + 0 − − − − nd + + + + sinal de $\frac{8^x-\pi^{2x}}{1-x}$
0 1

18. Resolva as inequações:

(a) $|x-2|^{-\pi} > 3^{-\pi}$ **(b)** $\left(1+x^2\right)^2 \leq \sqrt[3]{2}$
(c) $\left(3+x^2\right)^{\sqrt{2}} \leq (2x^2+1)^{\sqrt{2}}$.

Solução Vamos resolvê-las usando as propriedades de potência que aprendemos.

(a) Note que a expressão à esquerda do sinal da desigualdade não está bem definida para $x = 2$. Para $x \neq 2$ as bases são positivas e:

$$|x-2|^{-\pi} > 3^{-\pi} \iff |x-2| < 3\,.$$

Por outro lado: $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5$.
Portanto, o conjunto solução da inequação em estudo é $\mathcal{S} = (-1\,,5\,) - \{2\} = (-1\,,2\,) \cup (\,2\,,5\,)$.

(b) Temos que $\left(1+x^2\right)^2 \leq \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = \left(\sqrt[6]{2}\right)^2$ onde bases e expoentes são positivos. Logo,

$$\left(1+x^2\right)^2 \leq \left(\sqrt[6]{2}\right)^2 \iff 1+x^2 \leq \sqrt[6]{2} \iff x^2 - \left(\sqrt[6]{2}-1\right) \leq 0\,.$$

Do estudo de sinal de trinômios, concluímos[2] então que o conjunto solução é o intervalo

$$\mathcal{S} = \left[\,-\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\,,\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\,\right].$$

(c) Nessa inequação, expoentes e bases são positivos, logo:

$$\left(3+x^2\right)^{\sqrt{2}} \leq (2x^2+1)^{\sqrt{2}} \iff 3+x^2 \leq 2x^2+1 \iff 2 \leq x^2 \iff x^2-2 \geq 0\,.$$

Novamente, do estudo de sinal de trinômios, obtemos que

$$\mathcal{S} = (-\infty\,,-\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}\,,\infty)\,.$$

19. **Resolva a inequação $(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3}$.**

Solução Nessa inequação os expoentes são positivos mas a base do membro esquerdo da inequação pode assumir valores negativos. Para resolvê-la vamos usar os argumentos[3] desenvolvidos na Lição 12. Para isso, devemos estudar o sinal da expressão associada a inequação, qual seja

$$(3x)^{2/3} - (x^2-2)^{2/3}$$

cujo domínio de definição é toda a reta. Você aprenderá nos cursos de Cáculo que essa expressão varia continuamente em seu domínio de definição.

Estudo do sinal de $(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}$:

[2]Note que $\sqrt[6]{2}-1 > 0$ e portanto, $\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}$ está bem definido.
[3]Você também pode tentar resolver essa inequação observando que

$$(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3} \iff (3|x|)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3}.$$

Repare que a inequação à direita possui expoente positivo e bases maiores ou iguais a zero.

☞ Resolvendo a equação $(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3} = 0$:

$$\begin{aligned}(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3x)^{2/3} = (x^2+2)^{2/3} \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = \pm(x^2+2)\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \ \text{ ou } \ x^2 + 3x + 2 = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0 \ \text{ ou } \ (x+1)(x+2) = 0\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{-2\,,-1\,,1\,,2\}$.

0	0	0	0	*Domínio de*
−2	**−1**	**1**	**2**	$(3x)^{\frac{2}{3}} - (x^2+2)^{\frac{2}{3}}$

☞ Teste de sinal em $(-\infty\,,-2\,)$:
Em $x = -3 \in (-\infty\,,-2\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big]_{x=-3} = (-9)^{2/3} - 11^{2/3} = 9^{2/3} - 11^{2/3} < 0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(-2\,,-1\,)$:
Em $x = -4/3 \in (-2\,,-1\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big]_{x=-4/3} = (-4)^{\frac{2}{3}} - (\frac{16}{9}+2)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{36}{9}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{34}{9}\right)^{\frac{2}{3}} > 0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(-1\,,1\,)$:
Em $x = 0 \in (-1\,,1\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big]_{x=0} = 0 - 2^{2/3} < 0\ (-)$.

☞ Teste de sinal em $(\,1\,,2\,)$:
Em $x = 4/3 \in (\,1\,,2\,)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big]_{x=4/3} = 4^{\frac{2}{3}} - (\frac{16}{9}+2)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{36}{9}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{34}{9}\right)^{\frac{2}{3}} > 0\ (+)$.

☞ Teste de sinal em $(\,2\,,\infty)$:
Em $x = 3 \in (\,2\,,\infty)$ temos:
$(3x)^{2/3} - (x^2+2)^{2/3}\big]_{x=3} = 9^{\frac{2}{3}} - 11^{\frac{2}{3}} < 0\ (-)$.

Finalizando o estudo do sinal:

$--$	0	$+++$	0	$--------$	0	$+++$	0	$---$	*sinal de*
	−2		**−1**		**1**		**2**		$(3x)^{\frac{2}{3}} - (x^2+2)^{\frac{2}{3}}$

Conclusão:

$$(3x)^{2/3} \geq (x^2+2)^{2/3} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-2\,,-1\,] \cup [\,1\,,2\,]\,.$$

Exercícios

1. Resolva as equações:
   (a) $2^x = 128$ (b) $3^x = 243$
   (c) $5^x = 1/625$ (d) $3^{2x-1} = 81$
   (e) $7^{4x-5} = 7^3$ (f) $4^{3x} = 64$.

2. Seja $\lambda > 0$. Resolva as equações:
   (a) $(\lambda^x)^x = (\lambda^9)^4$ (b) $(\lambda^x)^3 = (\lambda^x)^{2x}$
   (c) $\lambda^{1/x} = \lambda^x$ (d) $100 \times 10^x = \sqrt[5]{1000^x}$.

3. Resolva as equações:
   (a) $2^{3^{4^x}} = 512$
   (b) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-3} - 3^{x-4} = 654$
   (c) $\dfrac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}} = 3^{4+x-\frac{2}{x}}$
   (d) $\dfrac{13}{12} = \dfrac{208}{3 \times 2^{1-x}}$.

4. Determine as soluções de $5^{2x} - 10 \times 5^x + 25 = 0$.

5. Resolva a equação
   $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} = 1092$.

6. Resolva $4^{x+1} + 16 \times 4^{2x} = 5 \times 4^x$.

7. Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras?
   (a) $2^{0,3} < 2^{0,4}$ (b) $(1/2)^{0,5} < (1/2)^{0,6}$
   (c) $3^0 < 3^{0,2}$ (d) $(1/3)^{\sqrt{2}} > (1/3)^{1,4}$
   (e) $3^{\sqrt{3}} > 3$ (f) $0{,}2^{\sqrt{2}} > 0{,}2$
   (g) $\pi^{-2} < \pi^2$ (h) $(1/5)^{-5} > (1/5)^5$.

8. Resolva as inequações a seguir.
   (a) $2^x > 1$
   (b) $\left(\frac{5}{4}\right)^x \geq 1$
   (c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$
   (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \geq 1$.

9. Resolva as equações:
   (a) $|x+1|^{x^2-2x-2} = 0$;
   (b) $|x-2|^{x^3-2x^2-2x} = 1$.

10. Coloque em ordem crescente os seguintes números:
    (a) $1 \; ; \; 5/3 \; ; \; 2/\sqrt{3} \; ; \; \pi/\sqrt[3]{2}$
    (b) $0{,}5 \; ; \; 0{,}5^{2/\sqrt{3}} \; ; \; 0{,}5^{5/3} \; ; \; 0{,}5^{\pi/\sqrt[3]{2}}$
    (c) $5^{5/3} \; ; \; 5^{2/\sqrt{3}} \; ; \; 5^{\pi/\sqrt[3]{2}} \; ; \; 5$
    (d) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\pi/\sqrt[3]{2}} \; ; \; \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{2/\sqrt{3}} \; ; \; \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \; ; \; \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{5/3}$.

11. Coloque em ordem crescente:
    (a) $-\pi^2 \; ; \; -\pi/\sqrt{0{,}5} \; ; \; -9,2 \; ; \; -\sqrt{82}$
    (b) $5^{-\pi^2} \; ; \; 5^{-9{,}2} \; ; \; 5^{-\sqrt{82}} \; ; \; 5^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$
    (c) $0{,}2^{-\pi^2} \; ; \; 0{,}2^{-9{,}2} \; ; \; 0{,}2^{-\sqrt{82}} \; ; \; 0{,}2^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$
    (d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\pi^2} \; ; \; \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-9{,}2} \; ;$
    $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{82}} \; ; \; \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\pi/\sqrt{0{,}5}}$.

12. Resolva as inequações:
    (a) $|x+1|^{-3} \geq 4^{-3}$
    (b) $(2+x^4)^{\sqrt[3]{3}} \leq (x^2+2)^{\sqrt[3]{3}}$
    (c) $(1-x^2)^{2/3} \geq \sqrt[3]{2}$
    (d) $(2x)^{2/5} < (3x^2+1)^{2/5}$.

13. Estude os sinais das expressões a seguir, assumindo que tais expressões variam continuamente em seus domínios de definição.
    (a) $|x-1|^x - 2^{2x}$
    (b) $(2+x^2)^{3/2} - 2x^3$
    (c) $(2-3x)^{5/3} + x^{10/3}$.

14. Resolva a equação $9^{x^2} \times 3^{2x} = 27$.

15. Resolva a inequação $9^{x^2} \times 3^{2x} \leq 27$ usando as propriedades de desigualdade de potências.

16. Resolva a inequação $9^{x^2} \times 3^{2x} \geq 27$ usando o método de estudo de sinais da expressão associada. Aqui também, a expressão associada varia continuamente em todo o seu domínio de definição.

17. Seja $a \in \mathbb{R}^*$. Determine as soluções da equação
    $$x^{\frac{3}{2}} - a x^{-\frac{3}{2}} = 7.$$

15

Gráficos

Nesta lição vamos estudar gráficos de expressões e algumas operações que podemos realizar sobre tais gráficos. Isso nos permitirá a construção de outros gráficos. Vamos aproveitar a oportunidade para esboçar gráficos de potências e de exponenciais, estudadas no capítulo anterior, e analisar algumas de suas propriedades. Os gráficos foram feitos usando um software apropriado.

1 Expressões pares e expressões ímpares

Dizemos que uma expressão $E(x)$ é *par* quando satisfaz as seguintes condições:

- seu domínio é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem ;
- $E(-x) = E(x)$ para todo x do domínio.

Dizemos que ela é *ímpar* quando:

- seu domínio é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem ;
- $E(-x) = -E(x)$ para todo x do domínio.

Exemplos

❄ $E(x) = x^2$ é uma expressão par pois:

- seu domínio é toda a reta, que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = (-x)^2 = x^2 = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

❄ $E(x) = x^3$ é uma expressão ímpar pois:

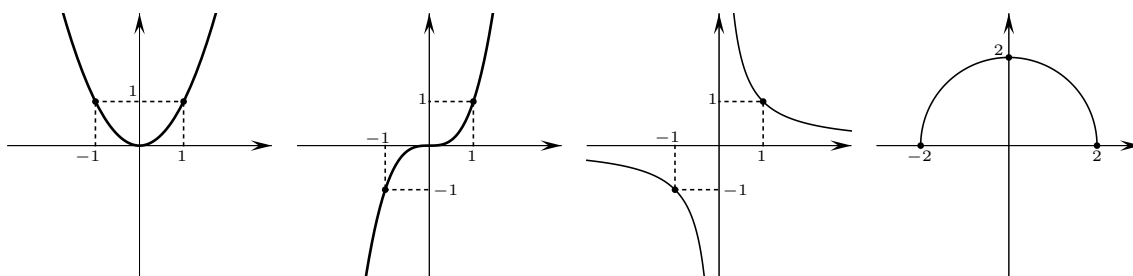
- seu domínio é simétrico em relação a origem como observado no exemplo anterior;
- $E(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

❄ $E(x) = 1/x$ é uma expressão ímpar pois:

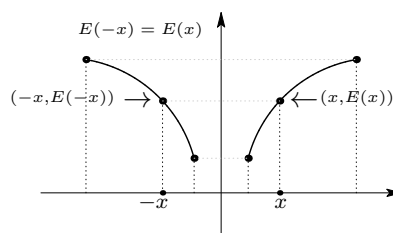
- seu domínio é o conjunto $(-\infty\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$, que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = 1/(-x) = -1/x = -E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

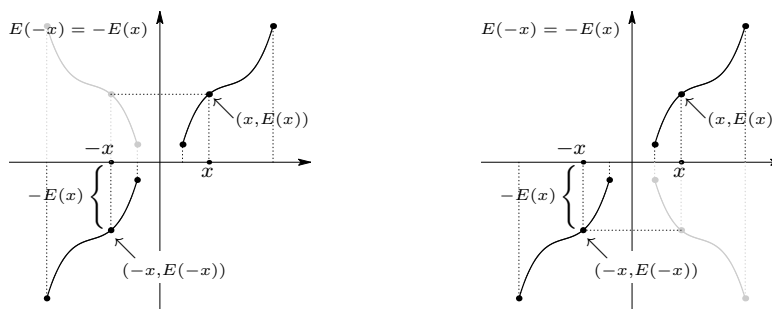
❄ $E(x) = \sqrt{4-x^2}$ é uma expressão par pois:

- seu domínio é o intervalo $[-2\,,2\,]$ que é um conjunto simétrico em relação a origem;
- $E(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = E(x)$ para todo $x \in [-2\,,2\,]$.

A seguir mostramos os gráficos de x^2 , x^3 , $1/x$ e $\sqrt{4-x^2}$.

Existem expressões que não são pares, nem ímpares. É o caso da expressão $E(x) = x + 1$.

- Ela não é par pois: $E(-2) \neq E(2)$.
  Note que $E(-2) = -1$ e $E(2) = 3$.
- Ela não é ímpar pois: $E(-1) \neq -E(1)$.
  Note que $E(-1) = 0$ e $-E(1) = -2$.

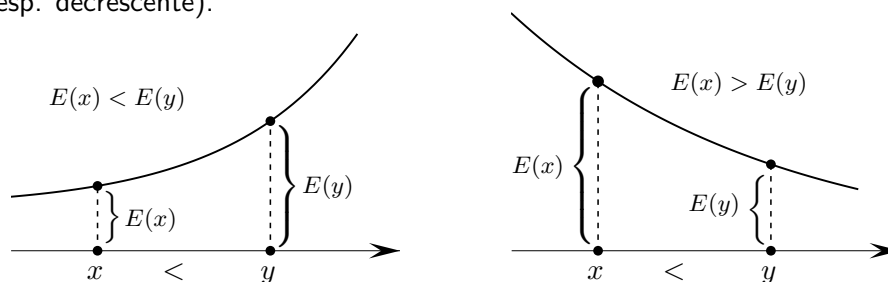
O gráfico de uma expressão par é *simétrico em relação ao eixo das ordenadas*. Essa simetria é mostrada na figura ao lado. Ela nos diz que, se sabemos construir o gráfico de uma expressão par à direita da origem então sabemos construí-lo à esquerda e vice-versa: basta refletir cada ponto do gráfico em relação ao eixo das ordenadas.

Por sua vez, o gráfico de uma expressão ímpar é *simétrico em relação a origem do sistema de coordenadas*. Exibimos essa simetria na figura a seguir, à esquerda. Tal simetria nos garante que, se sabemos construir o gráfico de uma expressão ímpar à direita da origem então sabemos construí-lo à esquerda e vice-versa: basta refletir cada ponto do gráfico em relação a origem.

Para facilitar a construção, fazemos isso da seguinte forma: primeiro refletimos os pontos em relação ao eixo das ordenadas (pontos mais claros) e em seguida refletimos esses novos pontos em relação ao eixo das abcissas, como mostrado na figura a seguir, à esquerda.

Também podemos construir o gráfico à esquerda da origem, refletindo a parte do gráfico à direita da origem em relação ao eixo das abcissas e em seguida, refletimos esses novos pontos em relação ao eixo das ordenadas. Isso é mostrado na figura acima, à direita.

2 Crescimento e decrescimento

Considere agora uma expressão $E(x)$ qualquer (não necessariamente par ou ímpar) e seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado da reta, contido no domínio de $E(x)$. Dizemos que:

- $E(x)$ é *crescente* em I quando: $E(y) > E(x)$ sempre que $y > x$, onde $x, y \in I$. *Informalmente* dizemos que $E(x)$ *aumenta* quando x *aumenta* no intervalo I.
- $E(x)$ é *decrescente* em I quando: $E(y) < E(x)$ sempre que $y > x$, onde $x, y \in I$. *Informalmente* dizemos que $E(x)$ *diminui* quando x *aumenta* no intervalo I.

Nas figuras a seguir exibimos à esquerda (resp. à direita) o gráfico de uma expressão crescente (resp. decrescente).

Exemplos

❄ $E(x) = x^2$ é uma expressão crescente no intervalo $[\,0\,,\infty)$. Isso segue das propriedades das potências

que acabamos de estudar: $x < y \implies x^2 < y^2$ para todo $x\,,y \geq 0$.
Ela também é uma expressão decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

❄ $E(x) = x^3$ é uma expressão crescente em $[\,0\,,\infty)$. Isso segue, novamente, das propriedades das potências: $x < y \implies x^3 < y^3$ para todo $x\,,y \geq 0$.
Ela também é crescente no intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

❄ $E(x) = 1/x$ é uma expressão decrescente em $(\,0\,,\infty)$: $x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ para todo $x\,,y > 0$.
Ela também é decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,)$.

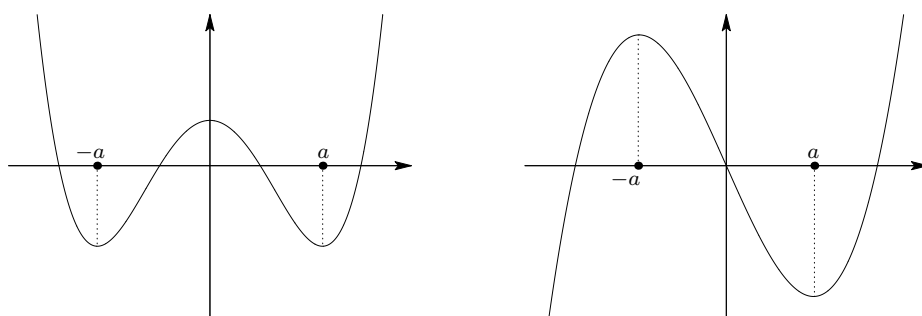
❄ $E(x) = |x|$ é uma expressão crescente no intervalo $[\,0\,,\infty)$ e é decrescente no intervalo $(-\infty\,,0\,]$.

❄ $E(x) = 2^x$ é uma expressão crescente em toda a reta.

Colocadas as definições de expressão crescente e expressão decrescente, nossa intuição geométrica nos diz que:

- se uma expressão par é crescente (resp. decrescente) num intervalo à direita da origem então ela é decrescente (resp. crescente) no simétrico desse intervalo em relação a origem;
- se uma expressão ímpar é crescente (resp. decrescente) num intervalo à direita da origem então ela é crescente (resp. decrescente) no simétrico desse intervalo em relação a origem.

A prova desses dois fatos não é difícil. Nas figuras a seguir exibimos essas duas propriedades.

- Na figura da esquerda temos o gráfico de uma expressão par.
  - A expressão é decrescente à esquerda de $-a$ e é crescente à direita de a ;
  - A expressão é crescente no intervalo $[-a\,,0\,]$ e é decrescente no intervalo $[\,0\,,a\,]$.

- Na figura da direita temos o gráfico de uma expressão ímpar.
  - A expressão é crescente à esquerda de $-a$ e é crescente à direita de a ;
  - A expressão é decrescente em $[-a\,,0\,]$ e continua decrescente em $[\,0\,,a\,]$.

Dadas duas expressões $E(x)$ e $F(x)$ dizemos que $E(x)$ *domina* $F(x)$ num intervalo I da reta quando $E(x) \geq F(x)$ para todo ponto $x \in I$. Nesse caso, também dizemos que $F(x)$ é dominada por $E(x)$ em I.

Exemplos

❄ x^2 domina x em $[1,\infty)$ pois $x^2 \geq x$ em $[1,\infty)$;

❄ No entanto, x^2 é dominado por x quando $x \in [0,1]$;

❄ Dadas as expressões $1/x^2$ e $9/x^4$ temos as seguintes equivalências quando $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{9}{x^4} \iff x^2 \leq 9 \iff |x| \leq 3\,.$$

Logo, a expressão $9/x^4$ domina a expressão $1/x^2$ nos intervalos $[-3,0)$ e $(0,3]$.

3 Gráficos de potências

Vamos começar agora a estudar gráficos de expressões do tipo $E(x) = x^\alpha$ para valores positivos e negativos do expoente α.

- Para $\boldsymbol{\alpha > 0}$ vimos que:

  a expressão x^α *cresce quando* x *cresce no intervalo* $[0,\infty)$, ou seja,

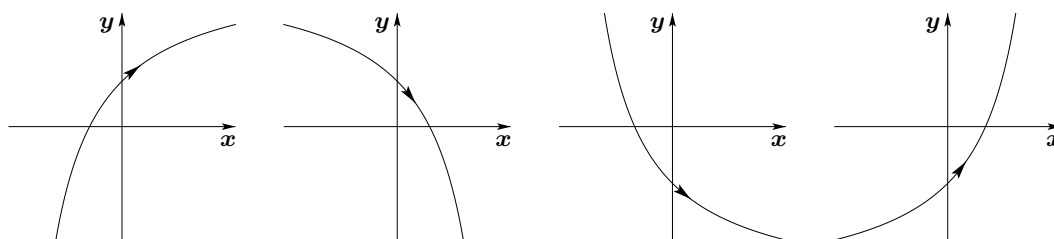
  a expressão $E(x) = x^\alpha$ *é crescente no intervalo* $[0,\infty)$.

Outra informação valiosa sobre o gráfico de $\boldsymbol{x^\alpha}$ é a sua *concavidade*. Você aprenderá em Cálculo I como determinar a concavidade de gráficos de expressões. Nesse curso não temos ferramentas matemáticas que nos permitam determinar a concavidade de gráficos, no entanto, vamos assumir a seguinte informação sobre $\boldsymbol{x^\alpha}$:

- Quando $\boldsymbol{\alpha > 1}$ dizemos que o gráfico de $\boldsymbol{x^\alpha}$ tem *concavidade voltada para cima*, à direita da origem;

- Quando $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$ ocorre o contrário: o gráfico de $\boldsymbol{x^\alpha}$ tem *concavidade voltada para baixo*, à direita da origem.

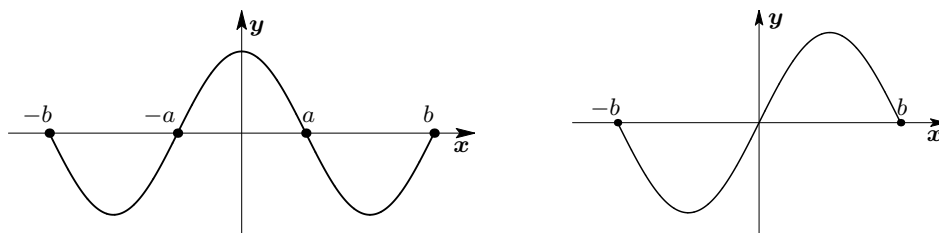
O caso $\boldsymbol{\alpha < 0}$ será tratado mais adiante.

As duas primeiras figuras a seguir, mostram gráficos de expressões com concavidades voltadas para baixo e as outras duas mostram gráficos com concavidades voltadas para cima.

A *grosso modo* a concavidade transmite a seguinte idéia geométrica: ao se deslocar sobre o gráfico da expressão, seguindo a orientação do eixo das abcissas, estaremos circulando no sentido horário quando a concavidade está voltada para baixo, ou no sentido anti-horário quando a concavidade está voltada para cima.

Diante dessas ideias, nossa intuição geométrica nos leva a afirmar que:

- se uma expressão par tem concavidade voltada para cima (resp. para baixo) num intervalo então ela também tem concavidade voltada para cima (resp. para baixo) no simétrico desse intervalo em relação a origem;
- se uma expressão ímpar tem concavidade voltada para cima (resp. para baixo) num intervalo então ela tem concavidade voltada para baixo (resp. para cima) no simétrico desse intervalo em relação a origem.

Isso é mostrado nas figuras a seguir.

- Na figura da esquerda temos o gráfico de uma expressão par.
  - O gráfico tem concavidade voltada para cima entre a e b, e entre $-b$ e $-a$. Note que $(-b,-a)$ é o simétrico de (a,b) em relação a origem ;
  - O gráfico tem concavidade voltada para baixo entre 0 e a, e entre $-a$ e 0; nos pontos a e $-a$ está ocorrendo uma mudança de concavidade.

- Na figura da direita temos o gráfico de uma expressão ímpar.
  - O gráfico tem concavidade voltada para baixo entre 0 e b, e tem concavidade voltada para cima entre $-b$ e 0. Note que $(-b,0)$ é o simétrico de $(0,b)$ em relação a origem ; na origem está ocorrendo uma mudança de concavidade.

Outro fato relevante sobre as expressões do tipo $E(x) = x^\alpha$, com $\alpha > 0$ é que tais expressões assumem todos os valores reais positivos a medida que a variável x varia no intervalo $(0, \infty)$.

Vejamos!! Fixemos um número real $K > 0$. Vamos mostrar que x^α assume esse valor K em algum ponto do intervalo $(0, \infty)$. E como fazer isso? Bem, se queremos determinar o valor de x com a propriedade acima, devemos encontrar uma solução da equação $x^\alpha = K$ no intervalo $(0, \infty)$.

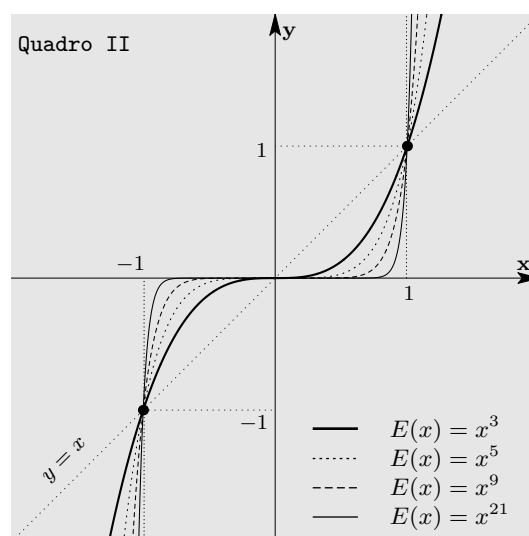
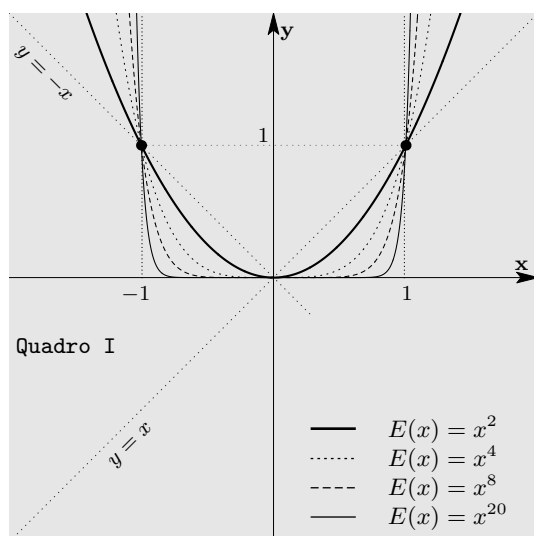
Mas isso é fácil, pois para $x \in (0, \infty)$ temos que:

$$x^\alpha = K \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x^\alpha\right)^{1/\alpha} = K^{1/\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad x = K^{1/\alpha}.$$

Mostramos assim que $E(x) = x^\alpha$, com $\alpha > 0$, assume o valor K quando $x = K^{1/\alpha}$. De fato, mostramos que esse valor K é assumido uma única vez no intervalo $(0, \infty)$.

Essa propriedade também será verdadeira para expressões do tipo $E(x) = x^\alpha$, com $\alpha < 0$ e as razões para que isso ocorra serão, exatamente, as mesmas.

3.1 Potência com expoente inteiro e positivo

Lembre-se que $1^\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico das expressões do tipo x^α passa pelo ponto $(1, 1)$. Também sabemos que $0^\alpha = 0$ para todo $\alpha > 0$, ou seja, o gráfico de x^α passa pelo ponto $(0, 0)$.

- As expressões no `Quadro I` são todas elas *expressões pares*. Logo, seus gráficos são simétricos em relação ao eixo $\mathbf{y}$. Além disso, temos:
  - como $\alpha > 0$ elas são crescentes em $[0, \infty)$;

- e sendo pares, elas são decrescentes em $(-\infty, 0]$;
- como $\alpha > 1$ elas têm concavidade voltada para cima à direita da origem;
- e sendo pares, têm concavidade voltada para cima, também, à esquerda da origem.

• As expressões no `Quadro II` são *expressões ímpares*. Portanto, seus gráficos são simétricos em relação à origem do sistema de eixos coordenados. Além disso temos:

- como $\alpha > 0$ elas são crescentes em $[0, \infty)$;
- e sendo ímpares, elas também são crescentes em $(-\infty, 0]$;
- como $\alpha > 1$ elas têm concavidade voltada para cima à direita da origem;
- e sendo ímpares, têm concavidade voltada para baixo à esquerda da origem;

• Para $\boldsymbol{x > 1}$ vimos que:

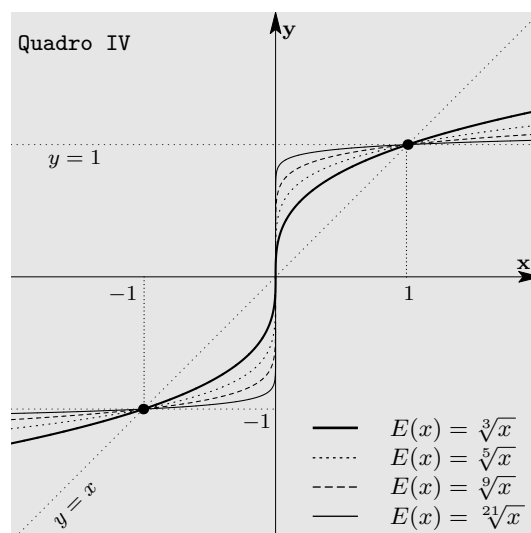
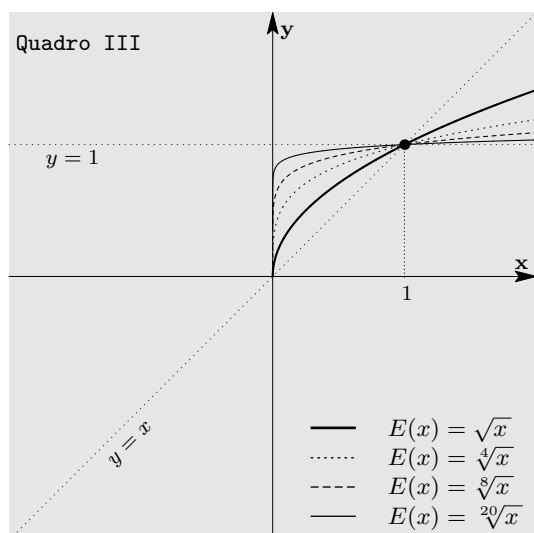
$$1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < x^8 < x^9 < x^{20} < x^{21};$$

• No entanto, para $\boldsymbol{0 < x < 1}$ resulta:

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > x^8 > x^9 > x^{20} > x^{21} > 0.$$

Note que as expressões dos `Quadros I` e `II` só se anulam quando $x = 0$.

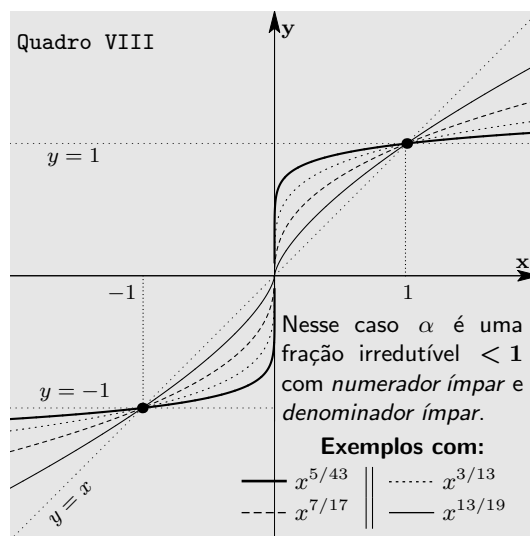
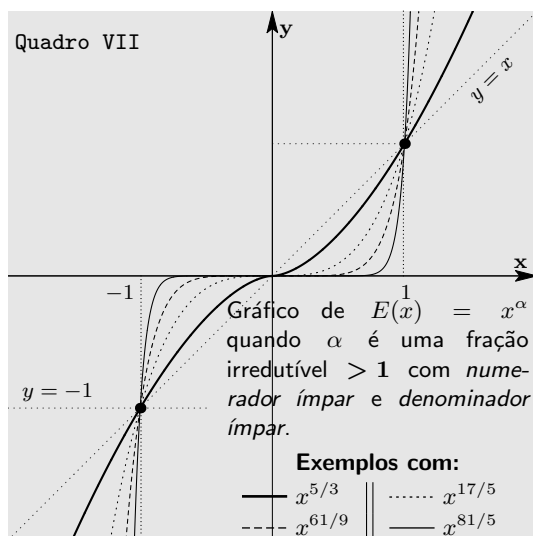
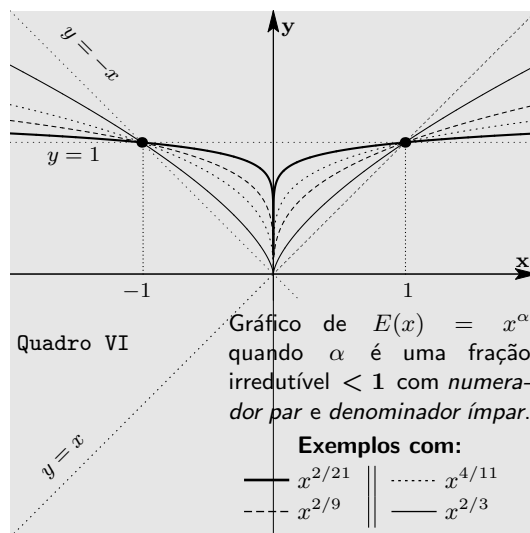
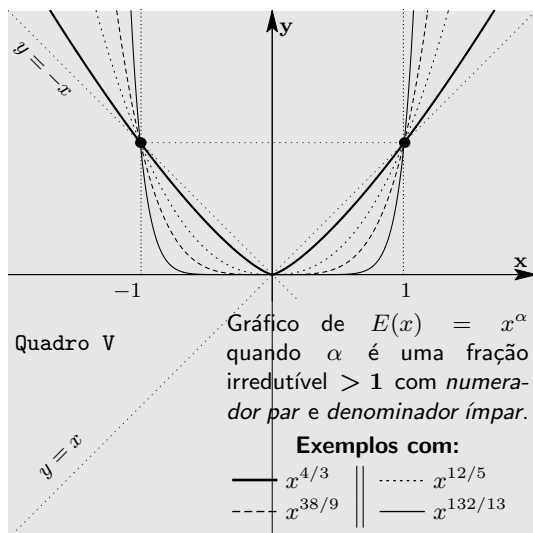
3.2 Potência com expoente racional positivo

Raízes:

- No `Quadro III` as expressões estão definidas apenas para $x \geq 0$ já que as raízes são de índice par. Não são expressões pares nem ímpares. Além dissso temos:
  - como $\alpha > 0$ elas são crescentes em $[\,0\,,\infty)$;
  - como $0 < \alpha < 1$ elas têm concavidade voltada para baixo à direita da origem.
- No `Quadro IV` elas estão definidas em toda a reta já que as raízes são de índice ímpar . Além disso, tais expressões são ímpares , isto é, $\sqrt[2n+1]{-x} = -\big(\sqrt[2n+1]{x}\,\big)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$;
  - como $\alpha > 0$ elas são crescentes em $[\,0\,,\infty)$;
  - e sendo ímpares, elas também são crescentes em $(-\infty, 0\,]$;
  - como $0 < \alpha < 1$ elas têm concavidade voltada para baixo à direita da origem ;
  - e sendo ímpares, têm concavidade voltada para cima à esquerda da origem.
- Como $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \frac{1}{9} > \frac{1}{20} > \frac{1}{21}$ teremos:
  - Para $\boldsymbol{x > 1}$:
  $$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[5]{x} > \sqrt[8]{x} > \sqrt[9]{x} > \sqrt[20]{x} > \sqrt[21]{x}\,;$$
  - Para $\boldsymbol{0 < x < 1}$:
  $$0 < x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[5]{x} < \sqrt[8]{x} < \sqrt[9]{x} < \sqrt[20]{x} < \sqrt[21]{x} < 1\,.$$

Potências de raízes:

Nos próximos quatro quadros, temos:

- O domínio das expressões é toda a reta $\mathbb{R}$;
- As expressões do `Quadro V` são pares e a análise sobre crecimento/decrescimento e concavidade é a mesma feita para o `Quadro I` ;
- As expressões do `Quadro VI` são pares e a análise sobre crecimento/decrescimento e concavidade são as seguintes:
  - como $\alpha > 0$ elas são crescentes em $[\,0\,,\infty)$;
  - e sendo pares, elas são decrescentes em $(-\infty, 0\,]$;
  - como $0 < \alpha < 1$ elas têm concavidade voltada para baixo à direita da origem ;
  - e sendo pares, têm concavidade voltada para baixo, também, à esquerda da origem.
- As expressões do `Quadro VII` são ímpares e a análise sobre crecimento/decrescimento e concavidade é a mesma feita para o `Quadro II` ;

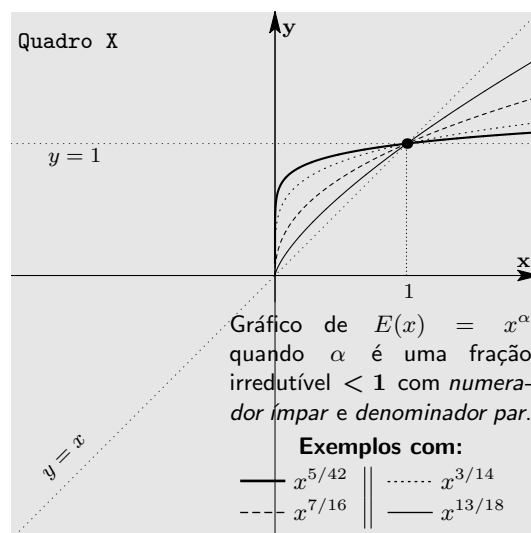
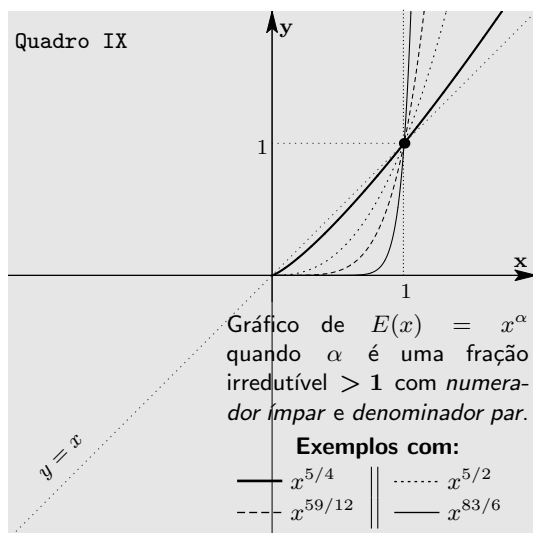
- As expressões do Quadro VIII também são ímpares e a análise sobre crecimento/decrescimento e concavidade é a mesma feita para o Quadro IV .

- Como $\frac{4}{3} < \frac{5}{3} < \frac{12}{5} < \frac{17}{5} < \frac{38}{9} < \frac{61}{9} < \frac{132}{13} < \frac{81}{5}$ temos que:

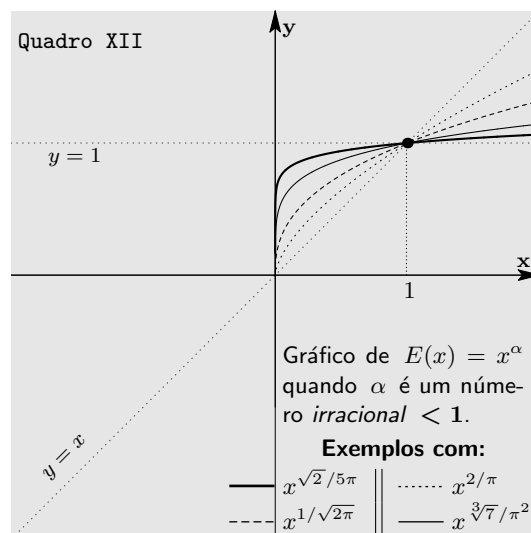
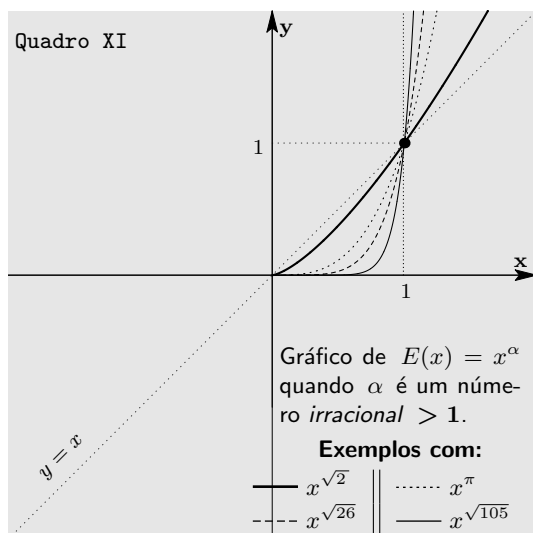
  – Para $\boldsymbol{x > 1}$:

$$1 < x^{4/3} < x^{5/3} < x^{12/5} < x^{17/5} < x^{38/9} < x^{61/9} < x^{132/13} < x^{81/5} ;$$

– Para $\mathbf{0 < x < 1}$:

$$1 > x^{4/3} > x^{5/3} > x^{12/5} > x^{17/5} > x^{38/9} > x^{61/9} > x^{132/13} > x^{81/5} > 0\,.$$

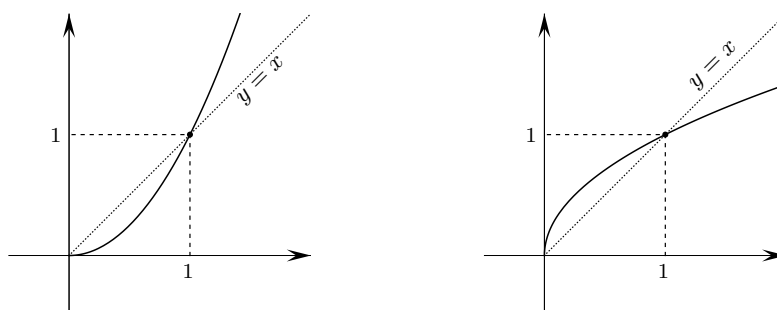
Note que as expressões dos `Quadros IX e X`, a seguir, só estão definidas para $x \geq 0$ pois todas elas envolvem raízes de índice par. Elas só se anulam na origem.

3.3 Potência com expoente irracional positivo

Note que as expressões dos `Quadros XI e XII` a seguir só estão definidas para $x \geq 0$ pois trata-se de potências com expoentes irracionais. Além disso, elas só se anulam na origem.

3.4 Em resumo

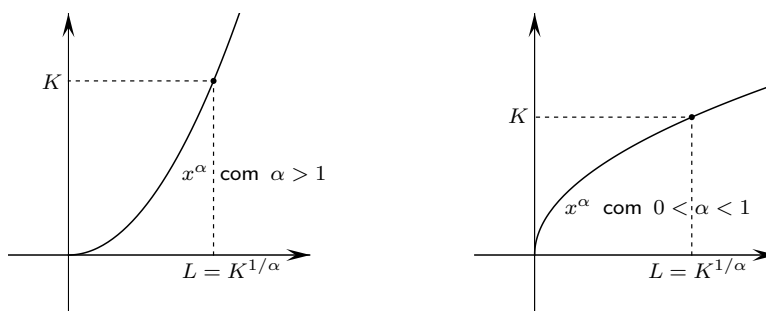
Com relação às potências $\boldsymbol{x^\alpha}$ com expoente $\boldsymbol{\alpha > 0}$, relembramos:

(i) Elas são *crescentes* no intervalo $[\,0\,,\infty)$ e seus gráficos passam por $(\,0\,,0\,)$ e $(\,1\,,1\,)$;

(ii) No intervalo $[\,0\,,\infty)$ elas têm *concavidade voltada para cima* quando $\boldsymbol{\alpha > 1}$ e têm *concavidade voltada para baixo* quando $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$;

(iii) Seus gráficos no intervalo $[\,0\,,\infty)$ têm o aspecto mostrado nas figuras a seguir. Na figura à esquerda apresentamos o aspecto do gráfico no caso $\boldsymbol{\alpha > 1}$ (é do tipo x^2) e no da direita exibimos o aspecto do gráfico no caso $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$ (é do tipo $\sqrt{x}$).

No curso de Cálculo I vamos aprender a diferenciar com mais clareza os gráficos de x^2 e de x^α em $[\,0\,,\infty)$, quando $\alpha > 1$, sobretudo quando estamos próximos da origem. Idem para os gráficos de $\sqrt{x}$ e de x^α em $[\,0\,,\infty)$, quando $0 < \alpha < 1$.

(iv) Vimos também, na página 298, a seguinte propriedade para a potência x^α quando $\alpha > 0$: ela assume todos os valores reais positivos à medida que x varia no intervalo $(\,0\,,\infty)$, ou seja, dado $K > 0$, existe $x = L \in (\,0\,,\infty)$ tal que $L^\alpha = K$. Aliás, dado $K > 0$ sabemos quando vale L . Evidentemente, $L = K^{1/\alpha}$.

Você pode visualizar esse fato nas figuras abaixo.

(v) Destacamos uma outra propriedade desta potência: ela cresce ultrapassando todos os números reais positivos à medida que x cresce indefinidamente no intervalo $(\,0\,,\infty)$.

Nos referimos a esse comportamento de x^α dizendo que x^α tende à infinito quando x tende à infinito e escrevemos : $x^\alpha \to \infty$ quando $x \to \infty$.

Essa propriedade é consequência das propriedades descritas nos itens (i) e (iv). Em particular ela significa que: dado $K > 0$, existe $L \in (0, \infty)$ tal que

$$x > L \implies x^\alpha > K.$$

Para prová-la, podemos fazer o seguinte.

Seja dado $K > 0$. Segue do item (iv) que existe $L \in (0, \infty)$ tal que $L^\alpha = K$. Como x^α é crescente no intervalo $[0, \infty)$ concluímos:

$$x > L \implies x^\alpha > L^\alpha \implies x^\alpha > K$$

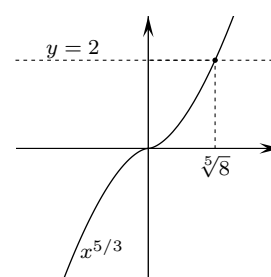
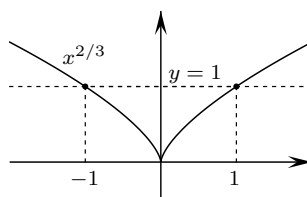
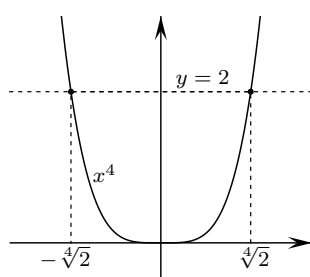
provando assim o que pretendíamos.

Você pode visualizar essa prova nas duas figuras exibidas no item (iv) .

Note que esta última propriedade se refere a todas as potência x^α com $\alpha > 0$. Isso é para lembrar que mesmo as potências x^α com $0 < \alpha < 1$ (gráfico com aspecto do gráfico de $\sqrt{x}$) têm essa propriedade, isto é, $x^\alpha \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(vi) Agora que conhecemos o aspecto do gráfico das potências com expoente positivo, nós podemos resolver com facilidade algumas inequações, como por exemplo:

$$x^4 < 2 \quad ; \quad x^{2/3} \geq 1 \quad ; \quad x^5 \leq 2 .$$

Para resolvê-las, basta fazer um esboço dos gráficos das potências envolvidas para obter as soluções das inequações, como mostrado nas figuras a seguir.

- O gráfico de x^4 nos mostra que:

$$x^4 < 2 \iff x \in (-\sqrt[4]{2}\,, \sqrt[4]{2}\,)$$
$$x^4 > 2 \iff x \in (-\infty\,, -\sqrt[4]{2}\,) \cup (\,\sqrt[4]{2}\,, \infty) .$$

- O gráfico de $x^{2/3}$ nos mostra que:

$$x^{2/3} \leq 1 \iff x \in [-1, 1]$$
$$x^{2/3} \geq 1 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

- O gráfico de $x^{5/3}$ nos mostra que:

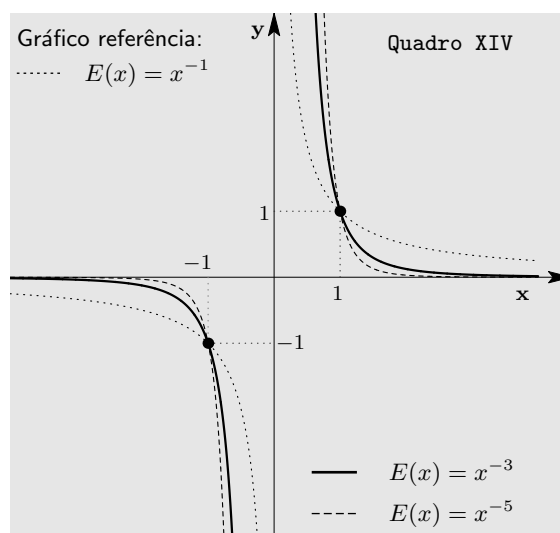
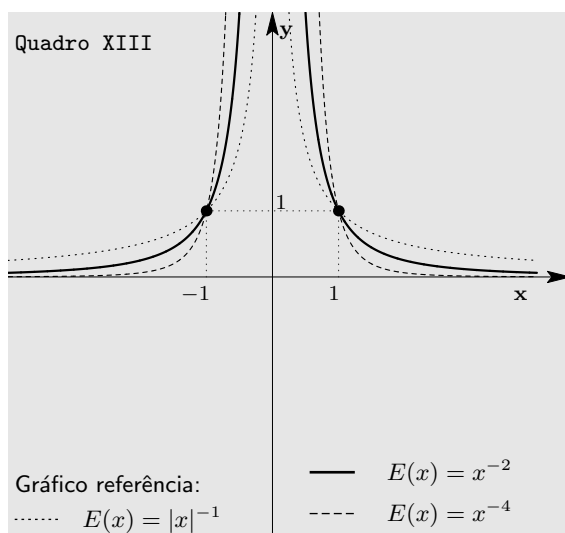
$$x^{5/3} \leq 2 \iff x \in (-\infty, \sqrt[5]{8}\,]$$
$$x^{5/3} \geq 2 \iff x \in [\,\sqrt[5]{8}, \infty).$$

3.5 Potência com expoente negativo

Os quadros a seguir exibem gráficos de expressões $E(x) = x^{-\alpha}$ para valores de $\alpha > 0$. Tais expressões não estão definidas para $x = 0$. Algumas delas estarão definidas para todo $x \neq 0$ e outras apenas para $x > 0$. Seus gráficos passam pelo ponto $(1, 1)$.

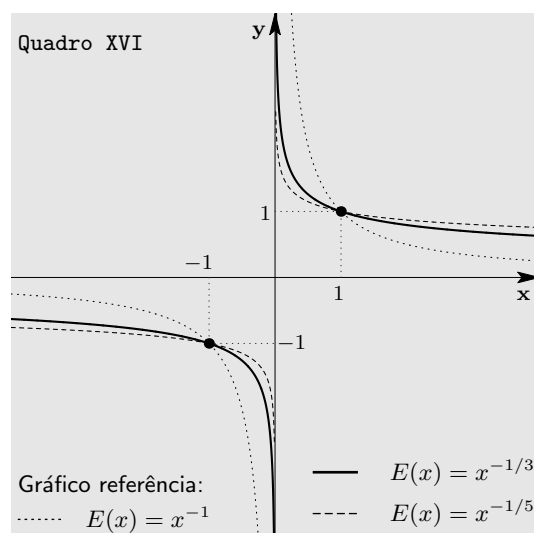
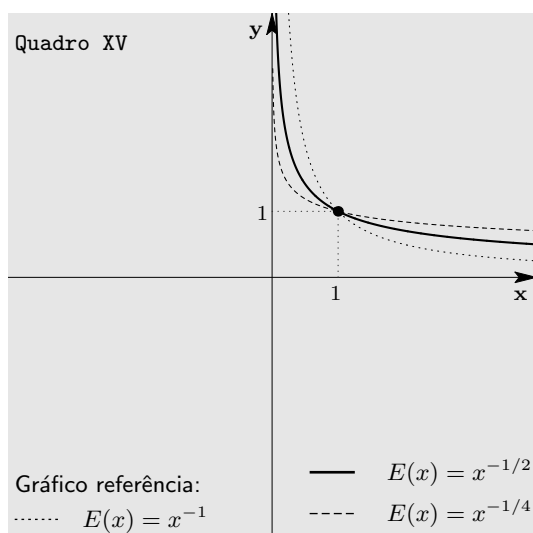
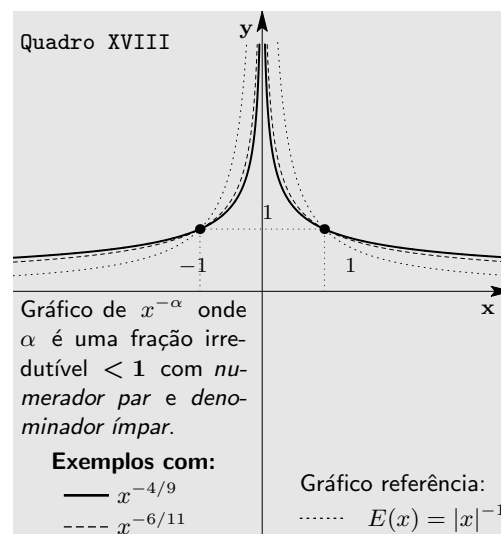
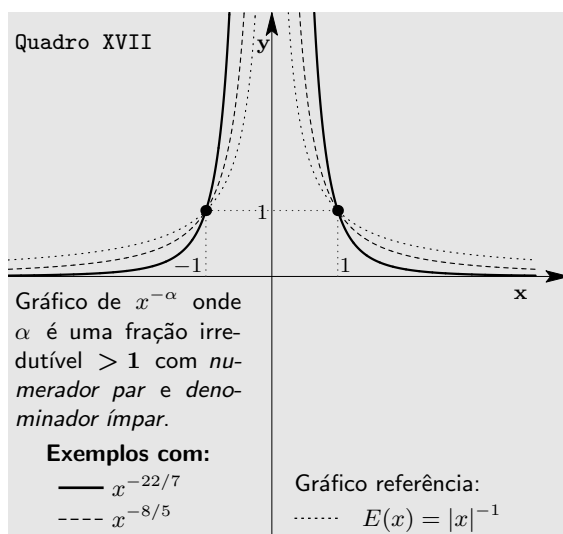
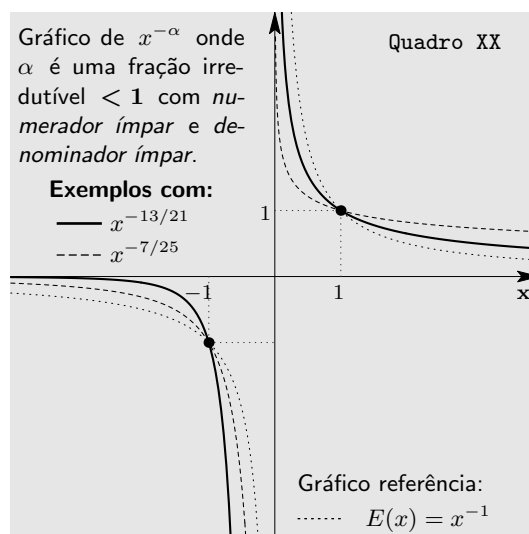
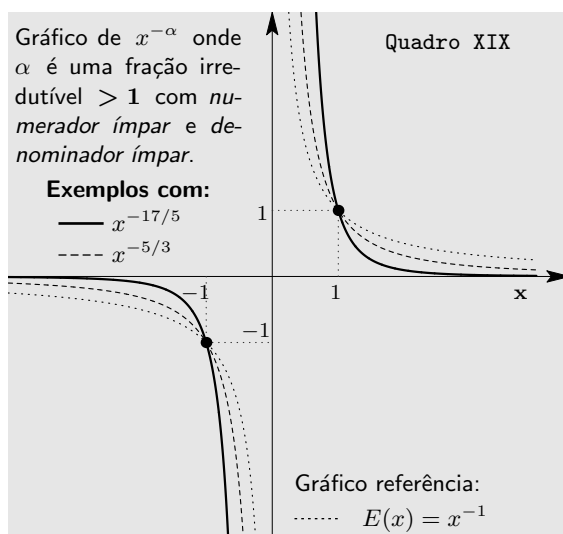
- Das propriedades das potências, sabemos que $x^{-\alpha}$ decresce no intervalo $(0, \infty)$, ou seja, $E(x) = x^{-\alpha}$ é uma expressão decrescente no intervalo $(0, \infty)$ quando $\alpha > 0$.
- Com relação à concavidade, vamos assumir que $x^{-\alpha}$ tem concavidade voltada para cima no intervalo $(0, \infty)$ quando $\alpha > 0$. Você verá em Cálculo I que é fácil provar essa propriedade. Por enquanto não temos ferramentas matemáticas para isso.

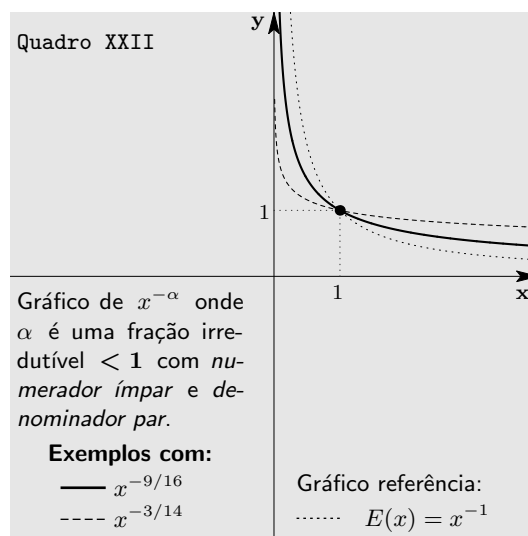
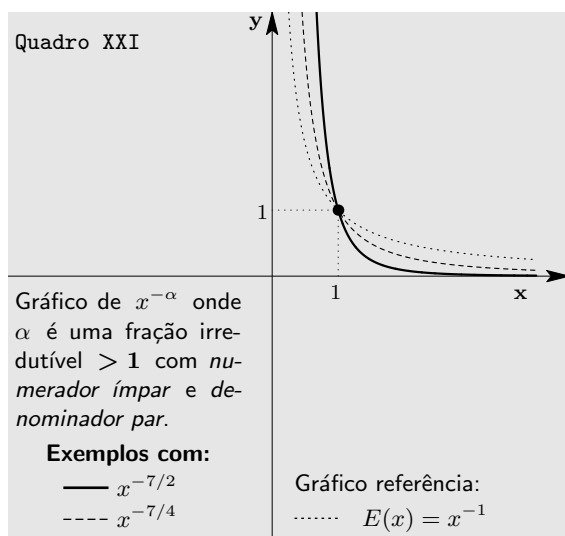
No `Quadro XIII` a seguir, as expressões são todas pares. Logo, seus gráficos são simétricos em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$. Além disso, temos:

- Como o expoente é negativo elas são decrescentes em $(0, \infty)$ e sendo pares, elas são crescentes em $(-\infty, 0)$;
- Como o expoente é negativo elas têm concavidade voltada para cima à direita da origem e sendo pares, elas também têm concavidade voltada para cima à esquerda da origem.

No `Quadro XIV`, visto acima, as expressões são ímpares. Seus gráficos são simétricos em relação a origem do sistema de coordenadas. Além disso, temos:

- como o expoente é negativo elas são decrescentes em $(0, \infty)$ e sendo ímpares, elas são decrescentes em $(-\infty, 0)$;

- como o expoente é negativo elas têm concavidade voltada para cima à direita da origem e sendo ímpares, elas têm concavidade voltada para baixo à esquerda da origem.

No `Quadro XV` o domínio das expressões é o intervalo $(0, \infty)$. Para tais expressões não faz sentido falar de simetria em relação ao eixo vertical. No `Quadro XVI` temos expressões ímpares, semelhante ao do `Quadro XIV`. Nos `Quadros XVII e XVIII` temos expressões pares, todas elas definidas para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$, semelhantes as do `Quadro XIII`.

Não deixe de comparar os gráficos dos `Quadros XVII e XVIII`.

Nos `Quadros XIX e XX` temos expressões ímpares definidas para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$. A análise do crescimento/decrescimento e concavidade é semelhante ao feito para as expressões do `Quadro XIV`. Não deixe de comparar os gráficos desses quadros.

Nos próximos quatro quadros temos expressões definidas apenas para $x > 0$. Não deixe de comparar os gráficos desses quadros.

De $\frac{3}{14} < \frac{7}{25} < \frac{9}{16} < \frac{13}{21} < \frac{5}{3} < \frac{7}{4} < \frac{17}{5} < \frac{7}{2}$ segue que

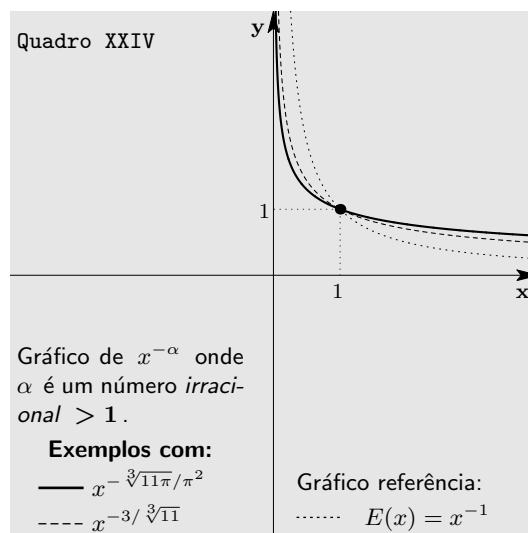
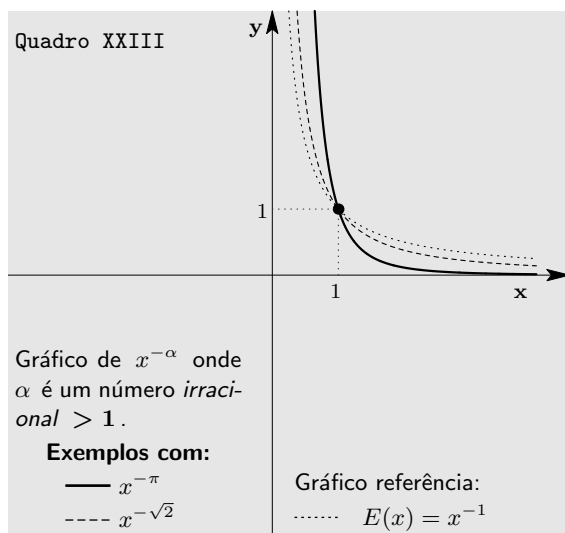
$$-\frac{3}{14} > -\frac{7}{25} > -\frac{9}{16} > -\frac{13}{21} > -1 > -\frac{5}{3} > -\frac{7}{4} > -\frac{17}{5} > -\frac{7}{2}$$

e, consequentemente, temos:

- para $\boldsymbol{x > 1}$:

$$x^{-\frac{3}{14}} > x^{-\frac{7}{25}} > x^{-\frac{9}{16}} > x^{-\frac{13}{21}} > x^{-1} > x^{-\frac{5}{3}} > x^{-\frac{7}{4}} > x^{-\frac{17}{5}} > x^{-\frac{7}{2}}$$

- para $\boldsymbol{0 < x < 1}$:

$$x^{-\frac{3}{14}} < x^{-\frac{7}{25}} < x^{-\frac{9}{16}} < x^{-\frac{13}{21}} < x^{-1} < x^{-\frac{5}{3}} < x^{-\frac{7}{4}} < x^{-\frac{17}{5}} < x^{-\frac{7}{2}}$$

Os gráficos das potências com expoentes negativos não intersectam nem o eixo das abcissas, nem o eixo das ordenadas. Repare que quando estamos muito próximos da origem esses gráficos ficam muito próximos do eixo das ordenadas; quando estamos muito longe da origem esses gráficos ficam muito próximos do eixo das abcissas. Dizemos que tais gráficos *assintotam* os eixos coordenados.

Outro fato relevante sobre a expressão $E(x) = x^{-\alpha}$ com $\alpha > 0$, é que ela assume todos os valores reais positivos quando x varia no intervalo $(0, \infty)$. De fato, dado $K > 0$, a equação $x^{-\alpha} = K$ tem uma única solução em $(0, \infty)$. Para provar isso, basta observar que para $x \in (0, \infty)$ temos:

$$x^{-\alpha} = K \iff \left(x^{-\alpha}\right)^{-1/\alpha} = K^{-1/\alpha} \iff x = K^{-1/\alpha}.$$

Isso significa que $x^{-\alpha}$ assume o valor K em $(0, \infty)$, exatamente, quando $x = K^{-1/\alpha}$.

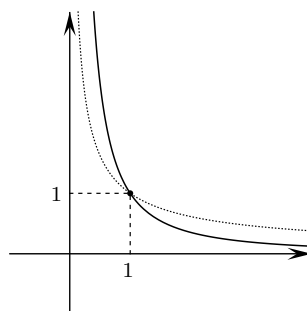
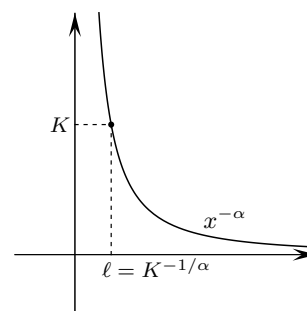
Você pode visualizar esta propriedade na figura exibida no item (iv) a seguir.

3.6 Em resumo

Com relação às potências $\boldsymbol{x^{-\alpha}}$ com $\boldsymbol{\alpha > 0}$, relembramos:

(i) Elas são *decrescentes* no intervalo $(0, \infty)$ e seus gráficos passam pelo ponto $(1, 1)$;

(ii) Todas elas têm *concavidade voltada para cima* no intervalo $(0, \infty)$;

(iii) Seus gráficos no intervalo $(0, \infty)$ têm o aspecto mostrado na figura a seguir (são do tipo $1/x$). Exibimos gráficos de $x^{-\alpha}$ (pontilhado) e de $x^{-\beta}$ (traço contínuo) onde $0 < \alpha < \beta$.

(iv) Vimos, um pouco antes de iniciar esta subseção, a seguinte propriedade para a potência $x^{-\alpha}$ quando $\alpha > 0$: ela assume todos os valores reais positivos à medida que x varia no intervalo $(0, \infty)$, ou seja, dado $K > 0$, existe $x = \ell \in (0, \infty)$ tal que $\ell^{-\alpha} = K$. Aliás, dado $K > 0$ sabemos quando vale ℓ. Evidentemente, $\ell = K^{-1/\alpha}$. Veja a figura ao lado.

(v) Destacamos uma outra propriedade desta potência: ela *cresce* ultrapassando todos os números reais positivos à medida que x *decresce* indefinidamente no intervalo $(0,\infty)$, se aproximando da origem.

Nos referimos a esse comportamento de $x^{-\alpha}$ com $\alpha > 0$ dizendo que $x^{-\alpha}$ tende à infinito quando x tende à zero por valores positivos e escrevemos: $x^{-\alpha} \to \infty$ quando $x \to 0^+$, ou seja, $\frac{1}{x^\alpha} \to \infty$ quando $x \to 0^+$.

Essa propriedade é consequência das propriedades descritas nos itens (i) e (iv). Em particular ela significa que: dado $K > 0$, existe $\ell \in (0,\infty)$ tal que

$$0 < x < \ell \implies x^{-\alpha} > K.$$

Isso pode ser visualizado na figura do item (iv). Para prová-la, podemos fazer o seguinte.

Seja dado $K > 0$. Segue do item (iv) que existe $\ell \in (0,\infty)$ tal que $\ell^{-\alpha} = K$. Como $x^{-\alpha}$ é decrescente no intervalo $(0,\infty)$ concluímos:

$$0 < x < \ell \implies x^{-\alpha} > \ell^{-\alpha} \implies x^{-\alpha} > K$$

provando assim o que pretendíamos.

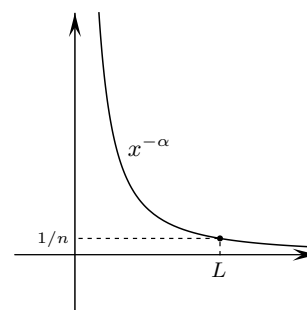
(vi) Outra propriedade interessante de $x^{-\alpha}$, com $\alpha > 0$, é a seguinte: $x^{-\alpha}$ se aproxima indefinidamente de zero, à medida que x cresce no intervalo $(0,\infty)$ ultrapassando todos os números reais positivos.
Nos referimos a esse comportamento de $x^{-\alpha}$ com $\alpha > 0$ dizendo que $x^{-\alpha}$ tende à zero quando x tende à infinito e escrevemos: $x^{-\alpha} \to 0$ quando $x \to \infty$, ou seja, $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ quando $x \to \infty$.
Essa propriedade também é consequência das propriedades descritas nos itens (i) e (iv). Em particular ela significa que: dado $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $L \in (0,\infty)$ tal que

$$x > L \implies 0 < x^{-\alpha} < 1/n.$$

Isso pode ser visualizado na figura acima. Para prová-la, podemos fazer o seguinte.

Seja dado $n \in \mathbb{Z}^+$ e considere $K = 1/n$. Sabemos do item (iv) que existe $\ell \in (0,\infty)$ tal que $\ell^{-\alpha} = K = 1/n$. Como $x^{-\alpha}$ é decrescente no intervalo $(0,\infty)$ concluímos que:

$$x > \ell \implies x^{-\ell} < \ell^{-\alpha} \implies x^{-\ell} < K \implies x^{-\ell} < \frac{1}{n}$$

como queríamos provar.

4 Gráficos de exponenciais

Uma expressão exponencial é uma expressão da forma

$$E(x) = a^x \text{ onde } 1 \neq a > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}\,.$$

Note que diferentemente do que ocorria nas expressões do tipo x^α que acabamos de estudar, numa expressão exponencial a variável é o expoente da potência, enquanto a base fica fixa. Vimos, também, nas propriedades das potências que:

- $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$ e $a^1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

  Além disso, temos, como consequência das propriedades das potências, que:

- Para $\boldsymbol{a > 1}$:

  a^x *cresce* quando $x \in \mathbb{R}$ *cresce* , ou seja,

  a expressão $E(x) = a^x$ é uma a expressão *crescente* em toda reta ;

- Para $\boldsymbol{0 < a < 1}$:

  a^x *decresce* quando $x \in \mathbb{R}$ *cresce* , ou seja,

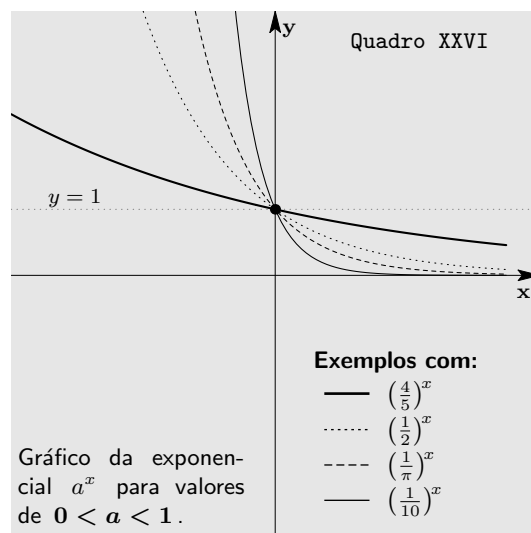
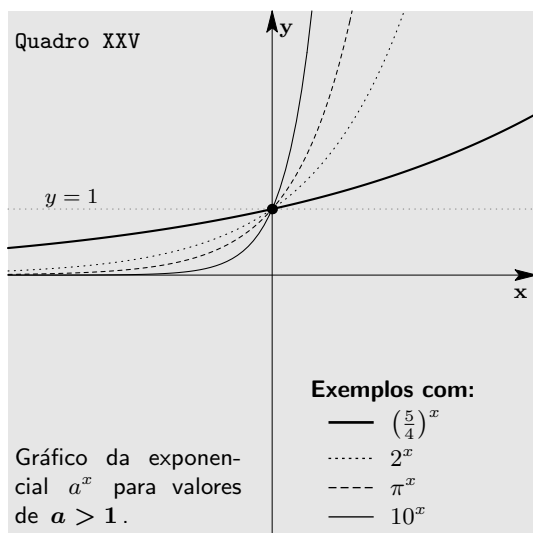
  a expressão $E(x) = a^x$ é uma a expressão *decrescente* em toda a reta.

Note que nos quadros a seguir as expressões estão definidas em toda a reta mas não temos simetria no gráfico, nem em relação ao eixo vertical, nem em relação a origem.

Em Cálculo I, você poderá mostrar que o gráfico de uma expressão exponencial tem concavidade voltada para cima ao longo de todo o seu domínio.

Compare os gráficos das expressões nos `Quadros XXV` e `XXVI`.

Gráfico da exponencial a^x para valores de $\boldsymbol{a > 1}$.

Gráfico da exponencial a^x para valores de $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

Como $\dfrac{5}{4} < 2 < \pi < 10$ segue que:

- para $\boldsymbol{x > 0}$:
  $\left(\dfrac{5}{4}\right)^x < 2^x < \pi^x < 10^x$
- para $\boldsymbol{x < 0}$:
  $\left(\dfrac{5}{4}\right)^x > 2^x > \pi^x > 10^x.$

Os dois últimos quadros parecem nos dizer que o gráfico de $(\frac{5}{4})^x$ é o simétrico do gráfico de $(\frac{4}{5})^x$ em relação ao eixo das ordenadas e vice-versa !!

De fato, os gráficos das expressões $E(x) = a^x$ e $F(x) = (\frac{1}{a})^x$ têm essa propriedade quando $a > 0$. Para provar isso, façamos:

$$E(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = F(x)\,.$$

A igualdade acima nos garante a simetria da qual desconfiávamos !!

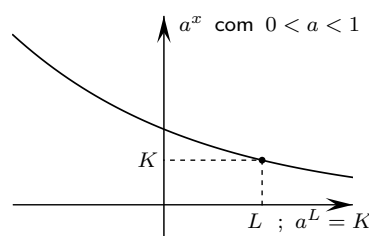
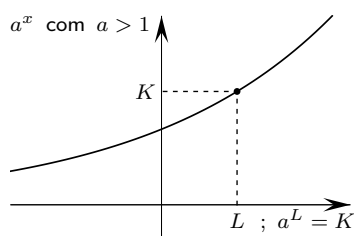
Os gráficos das exponenciais nunca intersectam o eixo das abcissas, pois $a^x > 0$ quando $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. No entanto, eles *assintotam* tal eixo. A *grosso modo*, isso significa:

- Quando $\boldsymbol{a > 1}$:

  a^x se aproxima indefinidamente de 0 a medida que x decresce ultrapassando todos os números reais negativos; nos referimos a esse comportamento de a^x dizendo que a^x tende à zero quando x tende à $-\infty$ e escrevemos, $a^x \to 0$ quando $x \to -\infty$;

- Quando $\boldsymbol{0 < a < 1}$:

  a^x se aproxima indefinidamente de 0 a medida que x cresce ultrapassando todos os números reais positivos; nos referimos a esse comportamento de a^x dizendo que a^x tende à zero quando x tende à ∞ e escrevemos, $a^x \to 0$ quando $x \to \infty$.

Além disso, quando $0 < a \neq 1$, a expressão a^x assume todos os valores reais positivos a medida que a variável x varia na reta, isto é: dado $K > 0$, existe $x = L \in \mathbb{R}$ tal que $a^L = K$. No entanto, não temos condições de provar esta propriedade, no momento. Vamos usá-la para mostrar outras propriedades da exponencial.

Quando $a > 1$ temos:

- a^x cresce, ultrapassando todos os números reais positivos à medida que x cresce indefinidamente na reta. Nos referimos a este comportamento de a^x dizendo que a^x tende à infinito quando x tende à infinito e escrevemos: $a^x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

  E isso significa que: dado $K > 0$ existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

  $$x > L \implies a^x > K.$$

  Você pode visualizar este fato na figura anterior, à esquerda.

  Para prová-lo, façamos o seguinte.

  Seja dado $K > 0$. Como visto no parágrafo anterior, sabemos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a^L = K$. Agora, tendo em vista que a^x é crescente, obtemos :

  $$x > L \implies a^x > a^L \implies a^x > K$$

  como queríamos provar.

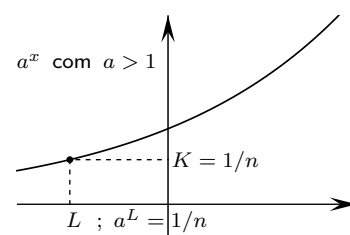
- a^x decresce, se aproximando indefinidamente de zero à medida que x decresce ultrapassando todos os números reais negativos. Nos referimos a esse fato dizendo que a^x (com $a > 1$) tende à 0 quando x tende à $-\infty$ e escrevemos, $a^x \to 0$ quando $x \to -\infty$.

  Isso significa que: dado $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

  $$x < L \implies 0 < a^x < \frac{1}{n}.$$

  Esse fato nós provamos da seguinte forma.
  Seja dado $n \in \mathbb{Z}^+$ e coloquemos $K = 1/n$. Como feito no item anterior, sabemos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a^L = K$. Agora, tendo em vista que a^x é crescente, obtemos :

  $$x < L \implies a^x < a^L \implies a^x < K \implies a^x < 1/n$$

  como queríamos provar.

5 Operando sobre gráficos

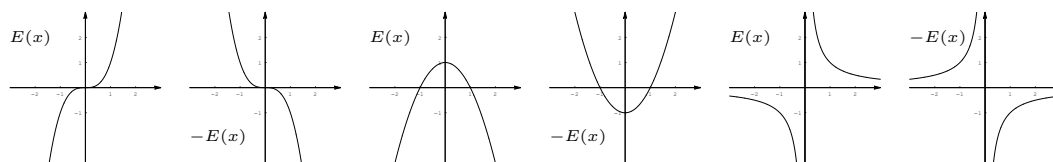
Agora que sabemos esboçar gráficos de algumas expressões simples podemos sofisticar um pouco mais nosso universo de gráficos construindo novos gráficos a partir de gráficos conhecidos. Podemos fazer isso através de translações verticais e horizontais, simetrias, etc.

Para isso, fixemos uma expressão $E(x)$ e admitamos que sabemos esboçar o seu gráfico. Com ele, vamos esboçar o gráfico de várias outras expressões derivadas de $E(x)$.

5.1 $E(x)$ e $-E(x)$

Conhecendo o gráfico de $E(x)$ podemos esboçar o gráfico da expressão $-E(x)$. Isso é feito da seguinte forma:

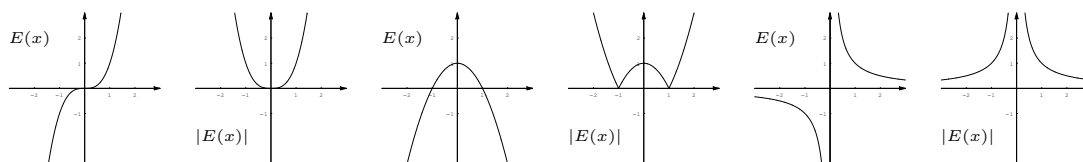
- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $-E(x)$ são os mesmos, ou seja, $E(x)$ está bem definido se, e somente se, $-E(x)$ também está;
- Os pontos do gráfico da expressão $E(x)$ são da forma $\big(x\,, E(x)\big)$ e os da expressão $-E(x)$ são da forma $\big(x\,, -E(x)\big)$, isto é, eles são simétricos em relação ao eixo das abcissas.

Essa operação é dita *reflexão do gráfico da expressão $E(x)$ em relação ao eixo das abcissas*. A seguir, exibimos exemplos dessa operação.

5.2 $E(x)$ e $|E(x)|$

Novamente, conhecendo o gráfico de $E(x)$ podemos esboçar o gráfico da expressão $|E(x)|$. Isso é feito da seguinte forma:

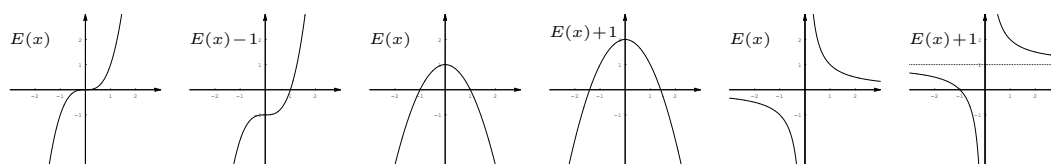
- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $|E(x)|$ são os mesmos, ou seja, $E(x)$ está bem definido se, e somente se, $|E(x)|$ também está;
- Nos pontos do domínio onde $E(x) \geq 0$ temos que $|E(x)| = E(x)$;
- Nos pontos do domínio onde $E(x) < 0$ temos que $|E(x)| = -E(x)$.

Assim, os gráficos de $E(x)$ e de $|E(x)|$ coincidem quando $E(x) \geq 0$ e são simétricos um do outro, em relação ao eixo das abcissas, quando $E(x) < 0$.

Nos quadros abaixo mostramos exemplos dessa operação.

5.3 $E(x)$ e $E(x) + \lambda$

Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(x)+\lambda$ onde λ é um número real qualquer, a partir do gráfico de $E(x)$. Isso é feito da seguinte forma:

- Note que o domínio de definição de $E(x)$ e de $E(x)+\lambda$ são os mesmos pois, novamente, $E(x)$ faz sentido quando e somente quando, $E(x)+\lambda$ faz sentido;
- Os pontos do gráfico da expressão $E(x)$ são da forma $\big(x\,,E(x)\big)$ e os da expressão $E(x)+\lambda$ são da forma $\big(x\,,E(x)+\lambda\big)$. Portanto, os pontos do gráfico de $E(x)+\lambda$ são obtidos transladando verticalmente de λ os pontos do gráfico de $E(x)$.

Essa operação é dita *translação vertical do gráfico da expressão* $E(x)$. Nos quadros abaixo exibimos exemplos dessa operação.

5.4 $E(x)$ e $E(x+\lambda)$

Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(x+\lambda)$ onde λ é um número real qualquer, a partir do gráfico da expressão $E(x)$. Isso é feito da seguinte forma.

Primeiramente coloquemos, $F(x) := E(x+\lambda)$. O que pretendemos agora é esboçar o gráfico da expressão $F(x)$ a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

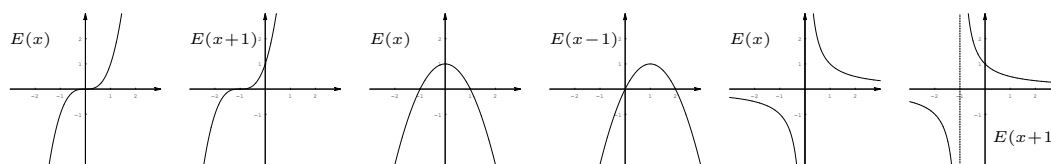
- *Sobre o domínio de definição das expressões* $E(x)$ *e* $F(x)$;

  Repare que $F(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(x+\lambda)$ faz sentido, ou seja, quando $x+\lambda$ está no domínio da expressão $E(x)$. Isso significa que, se transladarmos de λ o domínio da expressão $F(x)$ obtemos o domínio da expressão $E(x)$. Portanto, o domínio de $F(x)$ é obtido transladando o domínio de $E(x)$ de $-\lambda$.

- Os pontos do gráfico da expressão $F(x)$ são da forma $(x, F(x))$. Além disso, temos:

$$\big(x\,,F(x)\big) = \big(x\,,E(x+\lambda)\big) = \underbrace{\big(x+\lambda\,,E(x+\lambda)\big)}_{\substack{\text{ponto do gráfico da}\\ \text{expresssão } E(x)}} -(\lambda\,,0)\,.$$

  Essa igualdade nos mostra que o gráfico da expressão $F(x)$ é obtido transladando horizontalmente o gráfico de $E(x)$ de $-\lambda$.

Essa operação é dita *translação horizontal do gráfico da expressão* $E(x)$. Nos quadros abaixo damos exemplos dessa operação.

5.5 $E(x)$ e $E(-x)$

Também sabemos esboçar o gráfico da expressão $E(-x)$ desde que conheçamos o gráfico de $E(x)$. Isso é feito da seguinte forma.

Coloquemos, $F(x) := E(-x)$. O que pretendemos aqui é esboçar o gráfico da expressão $F(x)$ a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

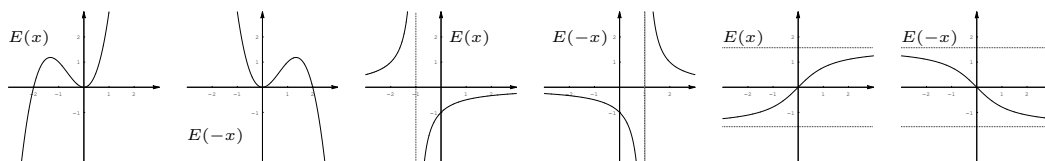
- *Sobre o domínio de definição das expressões* $E(x)$ *e* $F(x)$;

  Repare que $F(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(-x)$ faz sentido, ou seja, quando $-x$ está no domínio da expressão $E(x)$. Isso significa que o domínio de $E(x)$ é o simétrico, em relação a origem, do domínio de $F(x)$. Portanto, o domínio de $F(x)$ é obtido refletindo o domínio da expressão $E(x)$ em relação a origem.

- Os pontos do gráfico da expressão $F(x)$ são da forma $\big(x\,,F(x)\big)$. Por outro lado temos:

$$\big(x\,,F(x)\big) = \big(x\,,E(-x)\big) = \big(-(-x)\,,E(-x)\big)\,.$$

  Repare que $\big(-x\,,E(-x)\big)$ é ponto do gráfico da expressão $E(x)$. Além disso, o ponto $\big(-(-x)\,,E(-x)\big)$ é o refletido, em relação ao eixo das ordenadas, de $\big(-x\,,E(-x)\big)$. Portanto, o gráfico de $F(x)$ é o refletido, em relação ao eixo das ordenadas, do gráfico de $E(x)$.

Essa operação é dita *reflexão do gráfico da expressão* $E(x)$ *em relação ao eixo das ordenadas*. A seguir, damos exemplos dessa operação.

Exercícios resolvidos

1. **Considere as expressões:**

(a) $\boldsymbol{E(x) = \sqrt[3]{1-x^2}}$ **(b)** $\boldsymbol{E(x) = \dfrac{1}{x^3-x}}$ **(c)** $\boldsymbol{E(x) = |x-1|}$ **.**

Diga quais são pares e quais são ímpares.

Solução

(a) O domínio dessa expressão é toda a reta, a qual é simétrica em relação a origem. Além disso, temos: $E(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2} = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isso mostra que a expressão é par.

(b) Temos que: $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. Portanto o domínio da expressão do item (b) é o conjunto $\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$, ou seja, o conjunto $(-\infty\,, -1\,) \cup (-1\,, 0\,) \cup (\,0\,, 1\,) \cup (\,1\,, \infty)$ o qual é simétrico em relação a origem. Além dissso, temos que:

$$E(-x) = \frac{1}{(-x)^3 - (-x)} = -\frac{1}{x^3 - x} = E(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{0\,, \pm 1\}\,.$$

Isso prova que a expressão em estudo é ímpar.

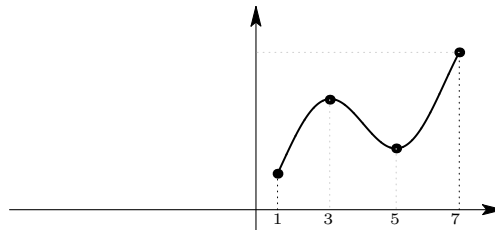
(c) O domínio da expresssão $E(x) = |x - 1|$ é toda a reta, que é simétrica em relação a origem. No entanto, temos que: $E(-1) = |-1-1| = 2$ e $E(1) = 0$. Isso mostra que:

- a expressão não é par pois, $E(-1) \neq E(1)$;
- a expressão não é ímpar pois, $E(-1) \neq -E(1)$.

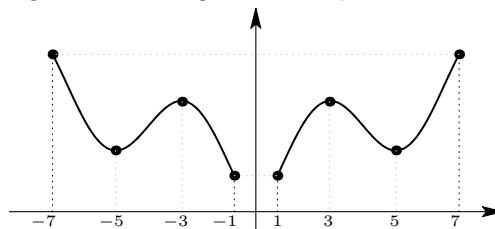
2. **Abaixo é dado o gráfico de uma expressão par. No entanto, esboçamos tal gráfico apenas à direita da origem.**

   (a) Dê o domínio da expressão;

   (b) Complete o gráfico da expressão, esboçando-o à esquerda da origem;

   (c) Dê os intervalos onde a expressão é crescente (resp. decrescente).

Solução

(a) Como a expressão é par, segue que seu domínio é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem. Como a parte do domínio da expressão à direita da origem é o intervalo $[\,1\,, 7\,]$ concluímos que o domínio da expressão é o conjunto: $[-7\,, -1\,] \cup [\,1\,, 7\,]$.

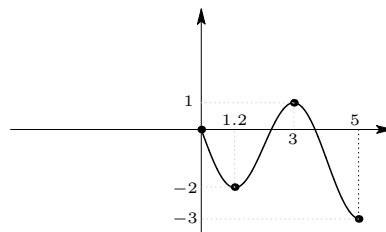
(b) Como a expressão, que originou o gráfico é uma expressão par, então sabemos que a parte do gráfico dessa expressão, à esquerda da origem é obtido refletindo, em relação ao eixo das ordenadas, a parte do gráfico que está à direita da origem. Assim, o gráfico da expressão em estudo é o seguinte:

(c) De posse do gráfico dessa expressão par, podemos concluir que ela é:

- crescente nos intervalos $[-5\,,-3]$, $[1\,,3]$ e $[5\,,7]$;
- decrescente nos intervalos $[-7\,,-5]$, $[-3\,,-1]$ e $[3\,,5]$.

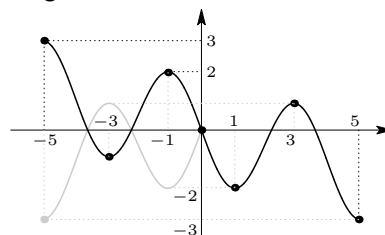
3. **A seguir é dado o gráfico de uma expressão ímpar. No entanto, esboçamos tal gráfico apenas à direita da origem.**

   (a) Dê o domínio da expressão;

   (b) Complete o gráfico dessa expressão, esboçando-o à esquerda da origem;

   (c) Dê os intervalos onde a expressão é crescente (resp. decrescente).

Solução

(a) Sendo a expressão ímpar, seu domínio é um subconjunto da reta, simétrico em relação a origem. Como a parte do domínio da expressão à direita da origem é o intervalo $[0\,,5]$ concluímos que o domínio da expressão é o intervalo: $[-5\,,5]$.

(b) Como a expressão que originou o gráfico é uma expressão ímpar então, a parte do gráfico dessa expressão, à esquerda da origem é obtida refletindo a parte do gráfico que está à direita da origem, primeiro em relação ao eixo das ordenadas e, em seguida, em relação ao eixo das abcissas. Assim, o gráfico da expressão em estudo é o seguinte:

O traço mais claro representa a primeira reflexão: aquela em relação ao eixo das ordenadas. O mais escuro, à esquerda, é o refletido do mais claro em relação ao eixo das abcissas. Esse último é a parte do gráfico da expressão à esquerda da origem.

(c) De posse do gráfico dessa expressão ímpar, podemos concluir que ela é:

- crescente nos intervalos $[-3\,,-1]$ e $[1\,,3]$;
- decrescente nos intervalos $[-5\,,-3]$, $[-1\,,1]$ e $[3\,,5]$.

4. **Considere as potências:** $\boldsymbol{x^{3/2}}$; $\boldsymbol{\sqrt[5]{x^4}}$; $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^7}}$ **.**

(a) Coloque essas potências em ordem crescente para $x \in (1, \infty)$ **;**

(b) Dê os domínios e esboce, em quadros separados, os gráficos dessas expressões;

(c) Esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões acima. Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução Coloquemos a lista $x^{3/2}$; $\sqrt[5]{x^4}$; $\sqrt[3]{x^7}$ na forma $x^{3/2}$; $x^{4/5}$; $x^{7/3}$.

(a) Temos a seguinte ordenação para os expoentes:

$$\frac{4}{5} < 1 < \frac{3}{2} < \frac{7}{3} \quad \text{pois} \tag{15.1}$$

- $\frac{4}{5} < 1 \iff 4 < 5$;
- $1 < \frac{3}{2} \iff 2 < 3$;
- $\frac{3}{2} < \frac{7}{3} \iff 9 < 14$.

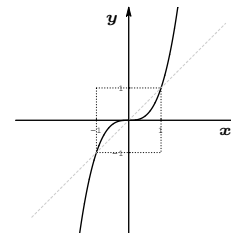
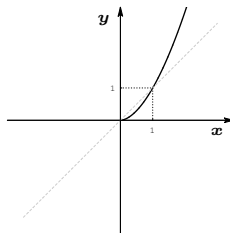
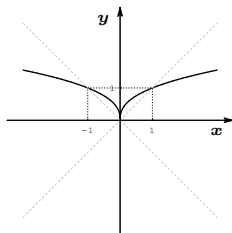
Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, maior será a potência se a base for maior do que 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (15.1) que

$$x^{\frac{4}{5}} < x < x^{\frac{3}{2}} < x^{\frac{7}{3}} \quad \text{quando} \quad x \in (1, \infty)$$

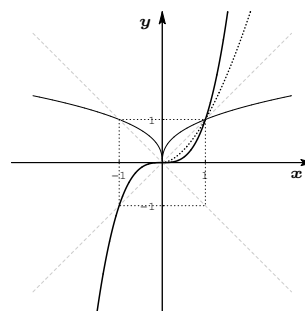
o que finaliza a solução do item (a).

(b) Para as expressões $x^{4/5}$, $x^{3/2}$ e $x^{7/3}$ temos:

- $x^{4/5} = \sqrt[5]{x^4}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar. Logo, o domínio dessa expressão é toda a reta $\mathbb{R}$.
  Além disso:
  $(-x)^{4/5} = \sqrt[5]{(-x)^4} = \sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$ mostrando assim tratar-se de uma expressão par ;
- $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$ só está bem definido para $x \geq 0$ já que a raiz é de índice par e o radicando é uma potência ímpar de x. Portanto, o domínio dessa expressão é o intervalo $[0, \infty)$.
- $x^{7/3} = \sqrt[3]{x^7}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar. Consequentemente, o domínio dessa expressão é toda a reta.
  Além disso,
  $(-x)^{7/3} = \sqrt[3]{(-x)^7} = \sqrt[3]{-x^7} = \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x^7} = -\sqrt[3]{x^7} = -x^{7/3}$
  o que mostra que a expresão $x^{7/3}$ é ímpar.

Os gráficos dessas expressões são exibidos a seguir, na ordem em que foram estudados nesse item.

(c) Antes de colocarmos esses gráficos num mesmo quadro, observemos que:

- Para $x \in (0\,,1)$ temos $x^{\frac{4}{5}} > x > x^{\frac{3}{2}} > x^{\frac{7}{3}}$;
- Para $x \in (1\,,\infty)$ temos $x^{\frac{4}{5}} < x < x^{\frac{3}{2}} < x^{\frac{7}{3}}$.

A comparação entre os gráficos de $x^{4/5}$ (traço fino) , $\pm x$ (tracejado) , $x^{3/2}$ (pontilhado espesso) e $x^{7/3}$ (traço espesso) é mostrada na figura ao lado.

☛ **Nota:** Repare que o problema não solicita que esbocemos os gráficos das expressões $\pm x$ mas nós o fizemos para melhor compreender o gráfico das potências envolvidas no exercício.

5. **Considere as potências $x^{-2/3}$ e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$.**

   (a) Coloque-as em ordem crescente para $x \in (1\,,\infty)$;

   (b) Dê os domínios e esboce, em quadros separados, os gráficos dessas expressões;

   (c) Esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões acima. Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução

(a) Para os expoentes, temos a seguinte ordenação:

$$-\sqrt[3]{2} \; < \; -1 \; < \; -\frac{2}{3} \; < \; 0 \quad \text{pois} \tag{15.2}$$

- $-\sqrt[3]{2} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \sqrt[3]{2}\,;$
- $-1 < -\dfrac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{2}{3} < 1\,.$

Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, maior será a potência se a base for maior do que 1. Portanto, segue da ordenação dada em (15.2) que

$$x^{-\sqrt[3]{2}} < x^{-1} < x^{-2/3} \quad \text{quando} \quad x \in (1\,,\infty)$$

o que finaliza a solução do item (a).

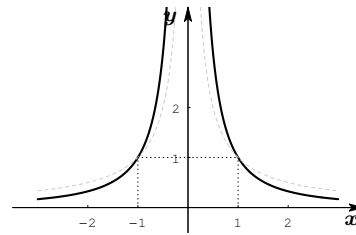
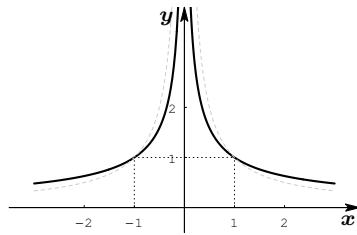
(b) Para as expressões $x^{-2/3}$ e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ temos:

- $x^{-2/3} = \dfrac{1}{x^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ que só não está bem definido quando $x = 0$ pois a raiz envolvida na expressão tem índice ímpar. Portanto, o domínio dessa expressão é $\mathbb{R} - \{0\}$.
  Além disso,
  $(-x)^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3}$ o que mostra que a expressão é par.

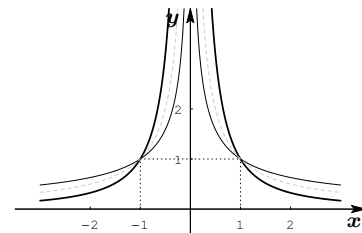
- $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ está bem definido para todo $x \neq 0$ já que a base, nesse caso ($x \neq 0$), é positiva. Logo, o domínio dessa expressão é $\mathbb{R} - \{0\}$.

  Além disso, temos que:

  $|-x|^{-\sqrt[3]{2}} = |x|^{-\sqrt[3]{2}}$ o que mostra que essa expressão também é uma expressão par.

Os gráficos dessas expressões são mostrados abaixo, na ordem em que foram estudados nesse item.

(c) Antes de colocarmos esses gráficos num mesmo quadro, observemos que:

- Para $x \in (0,1)$ temos $x^{-2/3} < x^{-1} < x^{-\sqrt[3]{2}}$;
- Para $x \in (1,\infty)$ temos $x^{-2/3} > x^{-1} > x^{-\sqrt[3]{2}}$.

A comparação entre os gráficos de $x^{-2/3}$ (traço fino) , x^{-1} (tracejado) e $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ (traço espesso).

☛ **Nota:** Note que usamos a seguinte estratégia para estudar a expressão $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$: primeiramente, estudamos a referida expressão para $x > 0$ onde ela tem a forma $x^{-\sqrt[3]{2}}$ e depois, usamos o fato que $|x|^{-\sqrt[3]{2}}$ é uma expressão par para concluir sobre seu comportamento quando $x < 0$. Além disso, o problema não solicita que esbocemos o gráfico da expressão $|x|^{-1}$ mas nós também o fizemos, para melhor entendermos os gráficos das potências consideradas no exercício.

6. **Considere a seguinte lista de potências:**

$$x^{8/5} \quad ; \quad \sqrt[3]{x^5} \quad ; \quad x^{\frac{3}{4}} \quad ; \quad x^{\pi/2}.$$

(a) Coloque essa lista em ordem crescente para $x \in (0,1)$;

(b) Dê os domínios e esboce, em quadros separados, os gráficos dessas expressões;

(c) Esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões acima. Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões.

Solução Coloquemos a lista $x^{8/5}$; $\sqrt[3]{x^5}$; $x^{\frac{3}{4}}$; $x^{\pi/2}$ na forma

$$x^{8/5} \quad ; \quad x^{5/3} \quad ; \quad x^{3/4} \quad ; \quad x^{\pi/2}.$$

(a) Temos a seguinte ordenação dos expoentes:

$$\frac{3}{4} < 1 < \frac{\pi}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} \quad \text{pois} \tag{15.3}$$

- $\frac{3}{4} < 1 \iff 3 < 4$ e $1 < \frac{\pi}{2} \iff 2 < \pi$;
- $\frac{\pi}{2} < \frac{8}{5} \iff \pi < \frac{16}{5} \iff \pi < 3{,}2$;
- $\frac{8}{5} < \frac{5}{3} \iff 24 < 25$.

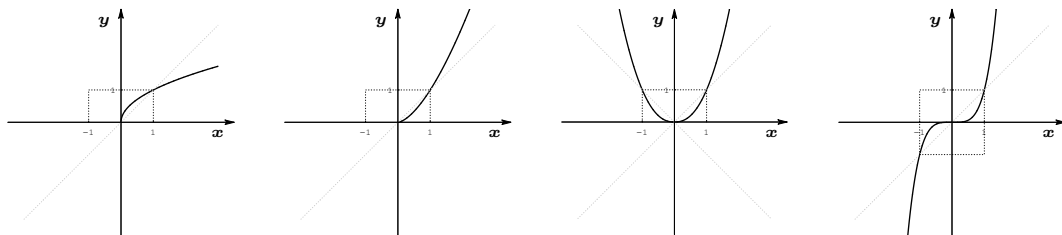
Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, menor será a potência se a base estiver entre 0 e 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (15.3) que

$$x^{\frac{3}{4}} > x > x^{\frac{\pi}{2}} > x^{\frac{8}{5}} > x^{\frac{5}{3}} \quad \text{quando} \quad x \in (0\,,1)$$

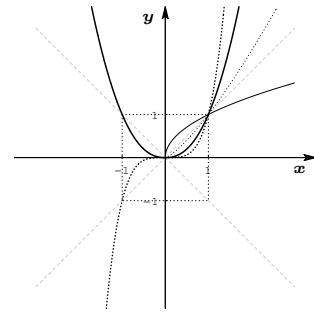
o que finaliza a solução do item (a).

(b) Para as expressões $x^{3/4}$, $x^{\pi/2}$, $x^{8/5}$ e $x^{5/3}$ temos:

- $x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$ que só está bem definido para $x \geq 0$ já que a raiz é de índice par;
- $x^{\pi/2}$ só está bem definido para $x \geq 0$ já que o expoente é um irracional positivo ;
- $x^{8/5} = \sqrt[5]{x^8}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar;
  Além disso,
  $(-x)^{8/5} = \sqrt[5]{(-x)^8} = \sqrt[5]{(-1)^8 x^8} = \sqrt[5]{x^8}$
  o que mostra que a expressão $x^{8/5}$ é par ;
- $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ que está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$ já que a raiz é de índice ímpar;
  Além disso,
  $(-x)^{5/3} = \sqrt[3]{(-x)^5} = \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{x^5} = -\sqrt[3]{x^5}$
  o que mostra que a expresão $x^{5/3}$ é ímpar.

Assim, os domínios dessas expressões são, respectivamente: $[0\,,\infty)$, $[0\,,\infty)$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$. Seus gráficos são mostrados abaixo, seguindo a ordem em que foram estudadas nesse item e comparando-os com os gráficos de $\pm x$.

(c) Antes de colocarmos esses gráficos num mesmo quadro, observemos que:

- $x^{\frac{3}{4}} > x > x^{\frac{\pi}{2}} > x^{\frac{8}{5}} > x^{\frac{5}{3}}$ quando $x \in (0,1)$;
- $x^{\frac{3}{4}} < x < x^{\frac{\pi}{2}} < x^{\frac{8}{5}} < x^{\frac{5}{3}}$ quando $x \in (1,\infty)$;

A comparação entre os gráficos de $x^{3/4}$ (traço fino) , x (tracejado) , $x^{\pi/2}$ (pontilhado) , $x^{8/5}$ (traço espesso) e $x^{5/3}$ (pontilhado espesso) é mostrada na figura ao lado.

7. **Considere a seguinte lista:**

$$\frac{1}{x^4} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad x^{-2\sqrt{2}}.$$

(a) Coloque esta lista em ordem crescente para $x \in (0,1)$;

(b) Dê o domínio e esboce, em quadros separados, os gráficos dessas expressões;

(c) Esboce, num mesmo quadro, os gráficos das expressões acima. Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma dessas expressões.

Solução Coloquemos a lista $1/x^4$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $x^{-2\sqrt{2}}$ na forma: x^{-4} ; $x^{-\frac{1}{3}}$; $x^{-2\sqrt{2}}$.

(a) Temos a seguinte ordenação dos expoentes:

$$-4 < -2\sqrt{2} < -1 < -\frac{1}{3} < 0 \quad \text{pois} \tag{15.4}$$

- $-4 < -2\sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} < 4 \iff 4 \times 2 < 16$;
- $-2\sqrt{2} < -1 \iff 1 < 2\sqrt{2}$;
- $-1 < -\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{1}{3} < 1$.

Por outro lado, sabemos que mantida a base, quanto maior for o expoente, menor será a potência se a base estiver entre 0 e 1. Sendo assim, segue da ordenação dada em (15.4) que

$$x^{-4} > x^{-2\sqrt{2}} > x^{-1} > x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{quando} \quad x \in (0,1)$$

ou seja,

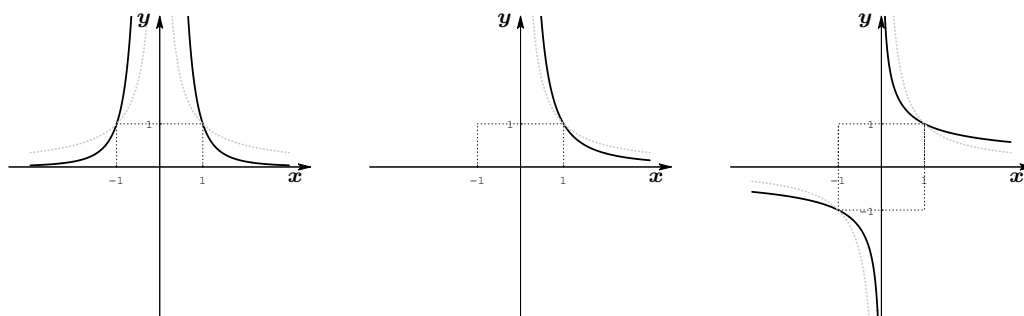
$$x^{-\frac{1}{3}} < x^{-1} < x^{-2\sqrt{2}} < x^{-4} \quad \text{quando} \quad x \in (0,1)$$

o que finaliza a solução do item (a).

(b) Para as expressões $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{-2\sqrt{2}}$ e x^{-4} temos:

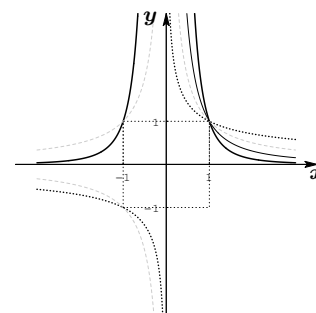
- $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ que está bem definido para $x \neq 0$ já que a raiz no denominador é de índice ímpar. Além disso, $(-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-x}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\big(x^{-\frac{1}{3}}\big)$ o que garante que $x^{-\frac{1}{3}}$ é uma expressão ímpar;
- $x^{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{x^{2\sqrt{2}}}$ só está bem definido para $x > 0$ já que o expoente é irracional e negativo;

- x^{-4} só não está bem definido para $x = 0$.
  Além disso, $(-x)^{-4} = (-1)^{-4} \times x^{-4} = x^{-4}$ o que mostra que ela é uma expressão par ;

Assim, os domínios dessas expressões são, respectivamente: $\mathbb{R} - \{0\}$, $(0, \infty)$ e $\mathbb{R} - \{0\}$. Seus gráficos são mostrados abaixo, seguindo a ordem em que foram analizadas nesse item.

Nos quadros acima também esboçamos, como referências, ramos dos gráficos de $1/x$ e $-1/x$.

(c) Antes de juntarmos esses gráficos num mesmo quadro, lembremos que:

- Para $x \in (0, 1)$ temos $x^{-4} > x^{-2\sqrt{2}} > x^{-1} > x^{-\frac{1}{3}}$;
- Para $x \in (1, \infty)$ temos $x^{-4} < x^{-2\sqrt{2}} < x^{-1} < x^{-\frac{1}{3}}$.

Temos então, a seguinte comparação entre os gráficos de x^{-4} (traço espesso) , $x^{-2\sqrt{2}}$ (traço fino) , $x^{-\frac{1}{3}}$ (pontilhado espessso) , x^{-1} e $|x|^{-1}$ (tracejado) , exibida na figura ao lado.

8. Uma expressão $E(x)$ tem como domínio o conjunto $(2, 5]$. Qual é o domínio das seguintes expressões:

(a) $-E(x)$ **(b)** $E(-x)$ **(c)** $E(x-1)$ **(d)** $E(x+4)$.

Solução

(a) Note que $-E(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(x)$ faz sentido. Isso significa que os domínios de $-E(x)$ e de $E(x)$ são os mesmos.

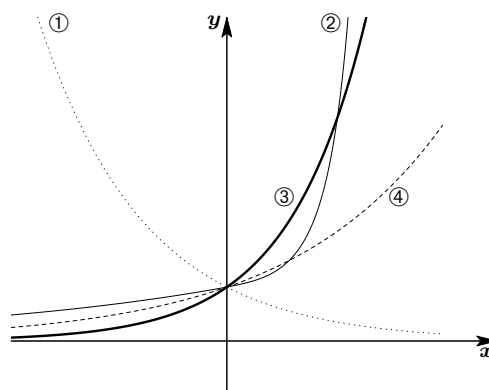
(b) Vimos que o domínio da expressão $E(-x)$ é o simétrico, em relação a origem, do domínio da expressão $E(x)$. Logo, o domínio de $E(-x)$ é o intervalo $[-5, -2)$.

(c) Vimos que o domínio da expressão $E(x-1)$ é o transladado de 1 do domínio de $E(x)$. Portanto, o domínio de $E(x-1)$ é o conjunto $(2+1, 5+1] = (3, 6]$.

(d) O domínio da expressão $E(x+4)$ é o transladado de -4 do domínio de $E(x)$. Portanto, o domínio de $E(x+4)$ é o conjunto $(2-4, 5-4] = (-2, 1]$.

9. Dentre os quatro gráficos ao lado, três deles são os gráficos das exponenciais 2^x , $(\sqrt{2})^x$ e $0{,}61^x$. Quais são esses gráficos? Porque o gráfico que você não escolheu, de fato, não é gráfico de uma exponencial?

Solução A exponencial $(0{,}61)^x$ é uma expressão decrescente já que sua base $0{,}61$ é positiva e menor do que 1. Conseqüentemente, o único gráfico da lista dada que pode representá-la é o de número ①.

Por sua vez, as exponenciais 2^x e $(\sqrt{2})^x$ são expressões crescentes já que suas bases são maiores do que 1 e devem ser representadas por dois dentre os gráficos que restaram (② , ③ e ④). Além disso sabemos que $2^x > (\sqrt{2})^x$ quando $x > 0$.
Também sabemos que os gráficos de duas exponenciais com bases distintas só se intersectam em um único ponto, a saber, quando $x = 0$. Portanto, os gráficos de números ② e ③ não podem ser os gráficos de 2^x e $(\sqrt{2})^x$ respectivamente. Pela mesma razão ② e ④ também não podem ser gráficos das exponenciais 2^x e $(\sqrt{2})^x$. Logo, os gráficos de 2^x e $(\sqrt{2})^x$ só podem ser representados pelos gráficos ③ e ④ respectivamente.

10. Uma expressão $E(x)$ tem como domínio o conjunto $(-3\,,5\,]$. Qual é o domínio das seguintes expressões:

(a) $2E(x)$ **(b) $E(-3x)$** **(c) $E(2x-1)$** **(d) $E(-3x+5)$.**

Solução

(a) Note que $2E(x)$ faz sentido se, e somente se, $E(x)$ faz sentido. Logo, as espressões $2E(x)$ e $E(x)$ têm o mesmo domínio.

(b) Nesse caso temos que: $E(-3x)$ faz sentido se, e somente se, $-3x$ está no domínio de $E(x)$ ou seja, se, e somente se, $-3x \in (-3\,,5\,]$. Por outro lado, temos que:

$$-3x \in (-3\,,5\,] \iff -3 < -3x \leq 5 \iff 3 > 3x \geq -5 \iff -5 \leq 3x < 3$$
$$\iff -\frac{5}{3} \leq x < 1 \iff x \in [-5/3\,,1\,).$$

Portanto, o domínio da expressão $E(-3x)$ é o intervalo $[-5/3\,,1\,)$.

(c) A expressão $E(2x-1)$ faz sentido se, e somente se, $2x-1$ está no domínio de $E(x)$ ou seja, se, e somente se, $2x-1 \in (-3\,,5\,]$. Por outro lado, temos que:

$$2x-1 \in (-3\,,5\,] \iff -3 < 2x-1 \leq 5 \iff -2 < 2x \leq 6 \iff -1 < x \leq 3\,.$$

Portanto, o domínio da expressão $E(2x-1)$ é o intervalo $(-1\,,3\,]$.

(d) Analogamente, expressão $E(-3x+5)$ faz sentido se, e somente se, $-3x+5$ está no domínio de $E(x)$ ou seja, se, e somente se, $-3x+5 \in (-3\,,5\,]$. Por outro lado, temos que:

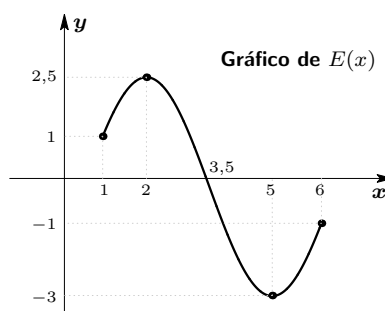
$$\begin{aligned} -3x+5 \in (-3\,,5\,] \quad &\Longleftrightarrow \quad -3 < -3x+5 \leq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -8 < -3x \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 8 > 3x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq 3x < 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x < 8/3\,. \end{aligned}$$

Portanto, o domínio da expressão $E(-3x+5)$ é o intervalo $[\,0\,,8/3\,)$.

11. Na figura ao lado é dado o gráfico de uma expressão $E(x)$ cujo domínio é o intervalo $[\,1\,,6\,]$. Dê o domínio e construa os gráficos das seguintes expressões

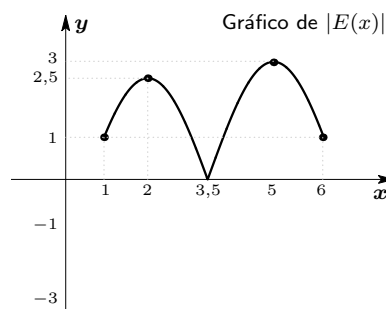
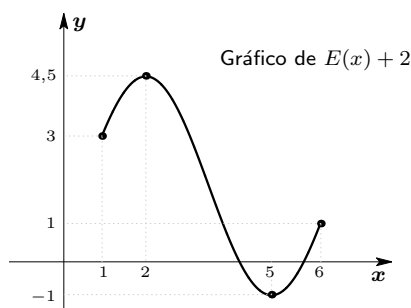
(a) $|E(x)|$;

(b) $E(x)+2$.

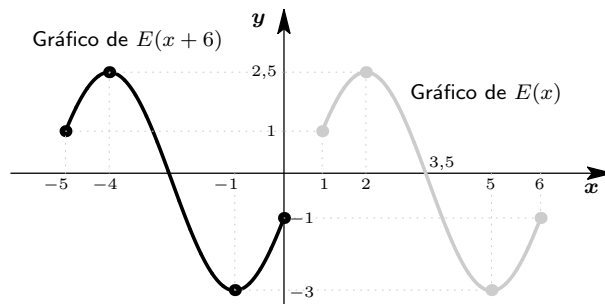
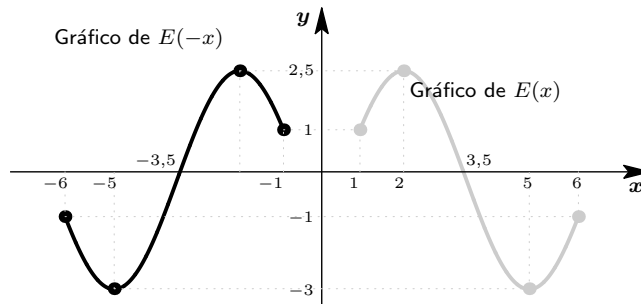
Para itens distintos use quadros distintos.

Solução

(a) Sabemos que $|E(x)|$ faz sentido se, e somente se, $E(x)$ faz sentido. Logo, essas duas expressões têm o mesmo domínio. Além disso,

- o gráfico de $|E(x)|$ coincide com o de $E(x)$ quando $E(x) \geq 0$;
- o gráfico de $|E(x)|$ é o simétrico, em relação ao eixo das abcissas, do gráfico de $E(x)$ quando $E(x) \leq 0$.

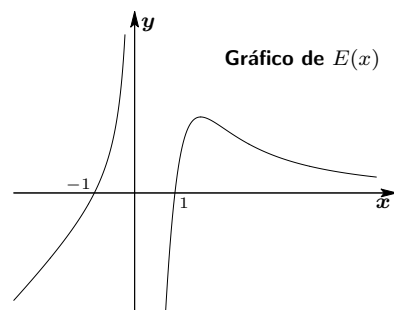
Na figura ao lado mostramos o gráfico da expressão $|E(x)|$.

(b) Sabemos que as expressões $E(x)$ e $E(x)+2$ têm o mesmo domínio e que o gráfico da segunda é obtido transladando verticalmente de 2 o gráfico da primeira. Assim, o gráfico da expressão $E(x)+2$ tem a forma mostrada abaixo.

12. **Repita o exercício anterior para as expressões: (a) $E(x+6)$ e (b) $E(-x)$. Em cada item, faça dois gráficos num mesmo quadro: o de $E(x)$ e o da expressão do item. Dê indicações para diferenciar com clareza esses dois gráficos. Para itens distintos use quadros distintos.**

Solução

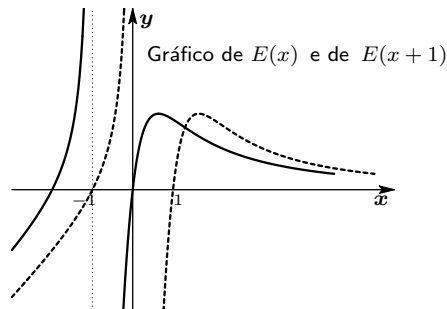
(a) Sabemos que o domínio da expressão $E(x+6)$ é obtido transladando o domínio da expressão $E(x)$ de -6. Logo, seu domínio será o intervalo: $[-5\,,0]$. Além disso, o gráfico de $E(x+6)$ é obtido transladando horizontalmente de -6 o gráfico de $E(x)$. Exibimos na figura a seguir o gráfico de $E(x+6)$ (traço escuro) e o gráfico de $E(x)$ (traço mais claro).

(b) Vimos que o domínio da expressão $E(-x)$ é o simétrico em relação a origem do domínio de $E(x)$. Logo, seu domínio será o intervalo $[-6\,,-1]$. Além disso, mostramos que o gráfico de $E(-x)$ é o simétrico do gráfico de $E(x)$ em relação ao eixo das ordenadas. Mostramos na figura a seguir o gráfico de $E(-x)$ (traço escuro) e o gráfico de $E(x)$ (traço mais claro).

13. **Na figura ao lado é dado o gráfico de uma expressão $E(x)$ cujo domínio é toda a reta menos a origem. Dê os domínios e construa os gráficos das expressões:**

    (a) $E(x+2)$;

    (b) $E(|x|)$.

Em cada item, faça num mesmo quadro, os gráficos de $E(x)$ e da expressão do item. Dê indicações para diferenciar com clareza esses dois gráficos. Para itens distintos use quadros distintos.

Solução Vamos construir os gráfico solicitados a partir do gráfico da expressão $E(x)$.

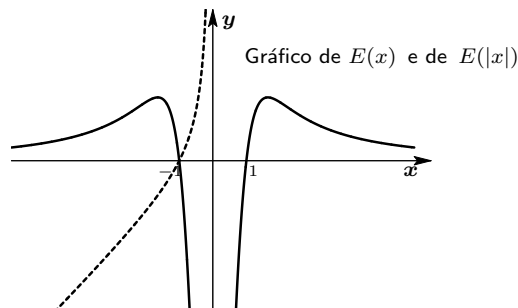
(a) O domínio da expressão $E(x+1)$ é obtido transladando de -1 o domínio de $E(x)$ ou seja, transladando o conjunto $(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)$ de -1, no que obtemos o conjunto $(-\infty\,,-1\,)\cup(-1\,,\infty)$. Portanto, o domínio de $E(x+1)$ é $(-\infty\,,-1\,)\cup(-1\,,\infty)$.

Por sua vez, o gráfico da expressão $E(x+1)$ é obtido transladando horizontalmente de -1 o gráfico de $E(x)$. No quadro abaixo superpomos os gráficos de $E(x)$ (tracejado) e de $E(x+1)$ (traço espesso).

(b) A expressção $E(|x|)$ faz sentido se, e somente se, $|x|$ pertence ao domínio de $E(x)$ ou seja, quando $|x|\in(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)$. Por outro lado:

$$|x|\in(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty) \iff |x|\in(\,0\,,\infty) \iff x\in(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)\,.$$

Concluímos então que o domínio da expressão $E(|x|)$ também é o conjunto $(-\infty\,,0\,)\cup(\,0\,,\infty)$.

Note que $E(|-x|)=E(|x|)$. Isso significa que a expressão $E(|x|)$ é par. Consequentemente, o gráfico de $E(|x|)$ coincide com o gráfico de $E(x)$ quando $x>0$ e é o seu refletido em relação ao eixo das ordenadas quando $x<0$.

Na figura abaixo superpomos os gráficos de $E(|x|)$ (traço espesso) e de $E(x)$ (tracejado). Como já observamos, esses gráficos coincidem quando $x>0$.

Exercícios

1. Dê os domínios das expressões e diga quais delas são pares e quais são ímpares?

(a) $1/x^5$ (b) $x/(x^2-1)^3$
(c) $\sqrt[3]{1-|x|}$ (d) $x/|x|$
(e) $\dfrac{2}{x^2-x^4}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-x^3}}$.

2. Mostre que as expressões a seguir não são pares, nem ímpares.

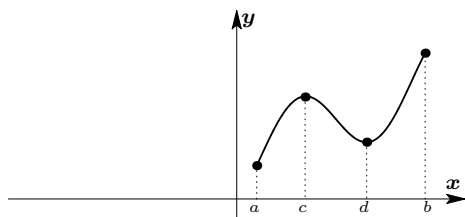
(a) x^3-1 (b) $x/(x-1)^3$
(c) $\sqrt[3]{x-|x|}$ (d) $(x+2)/|x|$
(e) $2/(x-x^4)$ (f) $(x-2)(1-x^2)$.

3. Sejam $E(x)$ e $F(x)$ duas expressões com mesmo domínio.

(a) Mostre que se $E(x)$ e $F(x)$ são pares então a expressão $E(x)+F(x)$ é par;
(b) Mostre que se $E(x)$ e $F(x)$ são ímpares então a expressão $E(x)+F(x)$ é ímpar.

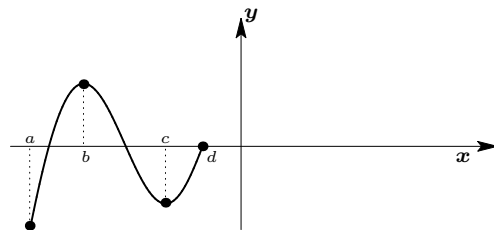
4. Sejam $E(x)$ e $F(x)$ duas expressões com mesmo domínio.

(a) Mostre que se $E(x)$ e $F(x)$ são pares então a expressão $E(x)\times F(x)$ é par;
(b) Mostre que se $E(x)$ e $F(x)$ são ímpares então a expressão $E(x)\times F(x)$ é par;
(c) Mostre que se $E(x)$ é par e $F(x)$ é ímpar então a expressão $E(x)\times F(x)$ é ímpar.

5. Uma expressão par tem o gráfico a seguir à direita da origem.

(a) Qual o domínio dessa expressão?
(b) Complete o gráfico dessa expressão desenhando o que falta à esquerda da origem;
(c) Dê os intervalos onde a expressão é crescente;
(d) Dê os intervalos onde a expressão é decrescente.

6. Uma expressão ímpar tem gráfico à direita da origem como aquele mostrado na figura do exercício anterior.

(a) Qual o domínio da expressão?
(b) Complete o gráfico dessa expressão desenhando o que falta à esquerda da origem;
(c) Dê os intervalos onde a expressão é crescente;
(d) Dê os intervalos onde a expressão é decrescente.

7. Uma expressão ímpar tem o seguinte gráfico à esquerda da origem.

(a) Qual o domínio da expressão?
(b) Complete o gráfico dessa expressão desenhando o que falta à direita da origem;
(c) Dê os intervalos onde a expressão é crescente;
(d) Dê os intervalos onde a expressão é decrescente.

8. Esboce os gráficos das expressões

$$E(x)=1/x \text{ e de } F(x)=1/\sqrt[5]{x}$$

num mesmo quadro.

(a) Dê os intervalos nos quais a primeira é maior do que a segunda;
(b) Dê os intervalos nos quais a primeira é menor do que a segunda;
(c) Dê os pontos onde as duas expressões coincidem.

9. Idem para $E(x) = 1/|x|$ e $F(x) = 1/\sqrt[3]{x^4}$.

10. Dadas as expresssões a seguir, pergunta-se: em quais intervalos uma expressão domina a outra ?
(a) $y = x^{2/3}$ e $y = x^{5/7}$
(b) $y = x^{-7/5}$ e $y = x^{-29/18}$
(c) $y = |x|^{\pi/\sqrt{2}}$ e $y = |x|^{\sqrt{11/2}}$
(d) $y = \pi^x$ e $y = \pi^{2x}$
(e) $y = \pi^x$ e $y = \pi^{x^2}$.

11. Use um software apropriado para esboçar o gráfico das expressões do exercício anterior e compare o resultado obtido com a sua solução.

12. Em cada item determine os intervalos on a primeira expressão domina a segunda.
(a) $|x+1|^{-3}$ e 4^{-3}
(b) $(2+x^4)^{\sqrt[3]{3}}$ e $(x^2+2)^{\sqrt[3]{3}}$
(c) $(1-x^2)^{3/2}$ e $\sqrt{3}$
(d) $(2x-1)^{2/5}$ e $(3x^2+1)^{1/5}$.

13. Considere as expressões:

$$x^{2/3} \;\; ; \;\; x^{3/5} \;\; ; \;\; x^{\pi/4} \;\; ; \;\; x^{\sqrt{2}/\sqrt{3}}$$

(a) Dê o domínio de cada uma delas ;
(b) Coloque-as em ordem crescente no intervalo $(0,1)$;
(c) Coloque-as em ordem crescente no intervalo $(1,\infty)$
(d) Esboce num mesmo quadro o gráfico dessas expressões.

14. Faça o mesmo para as expressões

$$x^{3/2} \;\; ; \;\; x^{5/3} \;\; ; \;\; x^{4/\pi} \;\; ; \;\; x^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}.$$

15. Idem para as expressões

$$x^{-2/3} \;\; ; \;\; x^{-3/5} \;\; ; \;\; x^{-\pi/4} \;\; ; \;\; x^{-\sqrt{2}/\sqrt{3}}.$$

16. Idem para as expressões

$$x^{-3/2} \;\; ; \;\; x^{-5/3} \;\; ; \;\; x^{-4/\pi} \;\; ; \;\; x^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}.$$

17. Use um software adequado para fazer o gráfico das expressões listadas nos quatro últimos exercícios para conferir as suas soluções.

18. Dê o domínio, esboce o gráfico das expressões e compare-as em intervalos adequados:

$$2^x \;\; ; \;\; 2^{2x} \;\; ; \;\; 3^x.$$

19. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dê o domínio e esboce o gráfico da expressão $E(x)$ dada a seguir, dividindo a análise em casos adequados, segundo os valores do parâmetro a :

$$E(x) = |x|^{a^2-4}.$$

20. Dê o domínio, esboce o gráfico das expressões e compare-as em intervalos adequados:

$$2^{-x} \;\; ; \;\; 2^{-2x} \;\; ; \;\; 3^{-x}.$$

21. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dê o domínio e esboce o gráfico da expressão $E(x)$ dada a seguir, dividindo a análise em casos adequados, segundo os valores do parâmetro a :

$$E(x) = 2^{(a^2-1)x}.$$

22. Considere a seguinte lista:

$$x^{\sqrt{3}} \;\; ; \;\; \left(\frac{1}{x}\right)^{\pi} \;\; ; \;\; x^{-4} \;\; ; \;\; \sqrt[3]{x^2}.$$

(a) Coloque essa lista em ordem crescente para $x \in (0,1)$;
(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x| \quad , \quad x^{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x^2}.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x|^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\pi} \quad \text{e} \quad x^{-4}.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima.

23. Considere a seguinte lista:

$$x^{\sqrt{5}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\pi} \quad ; \quad x^{-12} \quad ; \quad \sqrt[5]{x^3}.$$

(a) Coloque essa lista em ordem crescente para $x \in (1, \infty)$;

(b) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$x \quad , \quad x^{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sqrt[5]{x^3}.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima;

(c) Dê o domínio e esboce, num mesmo quadro, os gráficos de

$$|x|^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\pi} \quad \text{e} \quad x^{-12}.$$

Faça esboços gráficos que permitam identificar com clareza cada uma das expressões listadas acima.

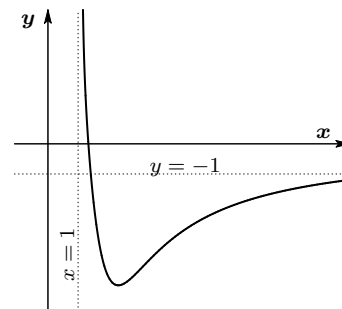
24. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões a seguir. Explique como obter o gráfico dessas expressões a partir do gráfico da primeira delas.

(a) 2^x (b) $2^x - 1$
(c) $2^{|x|}$ (d) 2^{-x}
(e) 2^{2+x} (f) $2^{2+|x|}$.

25. Dê o domínio e esboce o gráfico das expressões a seguir. Explique como obter o gráfico dessas expressões a partir do gráfico da primeira delas.

(a) $x^{3/2}$ (b) $x^{3/2} - 1$
(c) $|x|^{3/2}$ (d) $(-x)^{3/2}$
(e) $(2-x)^{3/2}$ (f) $(2+|x|)^{3/2}$.

26. Na figura a seguir é apresentado o gráfico de uma expressão $E(x)$ cujo domínio é o intervalo $(1, \infty)$. Em cada item, dê o domínio da expressão apresentada e construa o respectivo gráfico.

(a) $|E(x)|$ (b) $-E(x)$
(c) $E(|x|)$ (d) $E(x) + 1$
(e) $E(-x)$ (f) $E(x-1)$.

16

Progressões e séries

Considere a dízima periódica $2{,}2222\ldots$ Aprendemos na Lição 5 como descobrir a fração de inteiros que ela representa. Nesta lição vamos analisar a dízima periódica sobre um outro foco. Note que podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$2{,}2222\ldots = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + 0{,}00002 + \cdots$$

Ou ainda, podemos escrevê-la como:

$$2{,}22222\ldots = 2 + 2\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 2\times 10^{-3} + 2\times 10^{-4} + 2\times 10^{-5} + \cdots$$

que representa a soma de todos os termos do que chamamos de *progressão geométrica* de *primeiro termo* 2 e *razão* 10^{-1}.

1 Progressão geométrica

Progressão geométrica (ou *pg*) de *razão* r e *primeiro termo* b é a lista ordenada

$$b \;;\; br \;;\; br^2 \;;\; br^3 \;;\; \ldots \;;\; br^{n-1} \;;\; br^n \;;\; br^{n+1} \;;\; \ldots$$

O termo br^n é dito o *termo geral* da progressão.

Note que numa progressão geométrica com termo inicial[1] $b \neq 0$ e razão[2] $r \neq 0$, o quociente

[1]Se o termo inicial de uma progressão geométrica é nulo então todos os termos da progressão são nulos.
[2]Se a razão de uma progressão geométrica é nula então a progressão tem a forma $b\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,\cdots$.

entre um dado termo e o seu antecessor é igual a razão, isto é: $br^{n+1} \div br^n = r$ para todo inteiro $n \geq 0$. Essa, não só é uma maneira de determinar a razão numa progressão geométrica dada, como também serve para verificar se a progressão é, de fato, uma progressão geométrica.

A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão vale:

$$S_n = \underbrace{b + br + br^2 + br^3 + \cdots + br^{n-1}}_{n \text{ termos}} \quad \text{onde} \quad n \geq 1\,.$$

Assim,

$$\begin{array}{rl} S_n &= b + br + br^2 + br^3 + \cdots + br^{n-1} \\ rS_n &= br + br^2 + br^3 + br^4 + \cdots + br^n \\ \hline S_n - rS_n &= b - br^n\,. \end{array}$$

Consequentemente, quando $r \neq 1$ temos[3] que:

$$S_n = \frac{b}{1-r}(1 - r^n) \quad \text{para todo } n \geq 1\,. \tag{16.1}$$

Repare que a medida que o número n de termos aumenta, o único fator da expressão (16.1) que se altera é o fator r^n. Se a razão r satisfaz a condição $\mathbf{-1 < r < 1}$ então r^n se aproxima cada vez mais de zero a medida que n cresce indefinidamente (veja os exercícios (29) e (30) na página 362). Nesse caso dizemos que r^n tende a zero quando n tende a infinito e escrevemos: $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Conseqüentemente, $1 - r^n$ tende a 1 quando $n \to \infty$ e concluímos que :

$$\frac{b}{1-r}(1 - r^n) \quad \text{se aproxima cada vez mais de} \quad \frac{b}{1-r}$$

quando n cresce indefinidamente. Sendo assim, entenderemos que a expressão

$$\frac{b}{1-r}$$

representa a soma de todos os termos de uma progressão geométrica de termo inicial $b \in \mathbb{R}$ e razão $r \in (-1\,,1\,)$, e escrevemos

$$b + br + br^2 + \cdots + br^n + \cdots = \frac{b}{1-r} \quad \text{quando} \quad \mathbf{-1 < r < 1} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

Esses são os únicos valores da razão para os quais faz sentido a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com termo inicial não nulo.

Em resumo, dados números reais r e b :

[3] Quando a razão $r = 1$, a progressão geométrica tem a forma b ; b ; b ; $\cdots$ e, consequentemente, a soma S_n dos seus n primeiros termos vale $S_n = nb$.

- dizemos que $b + br + br^2 + \cdots + br^n + \cdots$ é uma *série geométrica* ;
- quando $|r| < 1$ dizemos que a série geométrica é *convergente* (ou *somável*) e que sua *soma* vale $\dfrac{b}{1-r}$;
- quando $|r| \geq 1$ dizemos que a série geométrica é *divergente* (ou *não somável*), a menos que $b = 0$.

Também usamos as notações $\sum_{n \geq 0} b\,r^n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} b\,r^n$ ou $b + \sum_{n=1}^{\infty} b\,r^n$ no lugar da expressão $b + b\,r + b\,r^2 + \cdots + b\,r^n + \cdots$.

Exemplos

❄ $1 \;;\; \dfrac{1}{2} \;;\; \dfrac{1}{2^2} \;;\; \dfrac{1}{2^3} \;;\; \dfrac{1}{2^4} \;;\; \dfrac{1}{2^5} \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica cujo primeiro termo vale 1 e cuja razão vale $1/2$.

❄ $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^5} + \cdots$
é uma série geométrica convergente pois sua razão r vale $r = \frac{1}{2} \in (-1\,,1)$. Além disso, temos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2\,.$$

❄ $2 \;;\; 2\pi \;;\; 2\pi^2 \;;\; 2\pi^3 \;;\; 2\pi^4 \;;\; 2\pi^5 \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica de razão π e termo inicial 2 . A soma dos seus n primeiros termos vale

$$S_n = 2 \times \frac{1-\pi^n}{1-\pi} = 2 \times \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \frac{2}{\pi - 1}(\pi^n - 1)\,.$$

A série geométrica correspondente $2 + 2\pi + 2\pi^2 + 2\pi^3 + 2\pi^4 + 2\pi^5 + \cdots$ é não somável pois sua razão $r = \pi > 1$. Note que para todo inteiro positivo n temos que:

$$2 + 2\pi + 2\pi^2 + 2\pi^3 + 2\pi^4 + 2\pi^5 + \cdots + 2\pi^n > n + 1\,.$$

Isso nos garante que a soma parcial S_n ultrapassa todos os números reais positivos a medida que n cresce indefinidamente. Nesse sentido dizemos que S_n tende para infinito quando n tende para infinito e escrevemos $2 + 2\pi + 2\pi^2 + 2\pi^3 + 2\pi^4 + 2\pi^5 + \cdots + 2\pi^n + \cdots = \infty$.

❄ $3 \;;\; -3 \;;\; 3 \;;\; -3 \;;\; 3 \;;\; -3 \;;\; \cdots$
é uma progressão geométrica tendo 3 como primeiro termo e cuja razão vale -1 . A soma S_n dos seus n primeiros termos vale:

$$S_n = \begin{cases} 3 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é par}\,. \end{cases}$$

Aqui também, a série geométrica correspondente $3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$ é não somável pois a razão $r = -1$. Note que a soma dos n primeiros termos fica *oscilando* indefinidamente, ora assumindo o valor 3 , ora assumindo o valor zero a medida que n cresce indefinidamente. Esse é um comportamento bem diferente daquele mostrado no exemplo anterior.

❄ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \cdots$
é uma série geométrica convergente pois sua razão r vale $r = -\frac{1}{3} \in (-1\,,1)$. Além disso, temos:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}\,.$$

❄ A série geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ tem razão $r = x$. Logo, ela é somável quando, e somente quando $|r| < 1$, isto é, quando, e somente quando $|x| < 1$. Nesse caso sua soma vale :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Além disso, a série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ não é somável quando $|x| \geq 1$.

❄ A série geométrica $1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots$ tem razão $r = z/2$. Portanto, ela é convergente quando $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, ou seja, quando $|z| < 2$ e temos:

$$1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}\,.$$

Sabemos também que $1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots$ diverge quando $|z| \geq 2$.

❄ Considere a dízima periódica $2{,}222\ldots$ citada no início desta Lição. Temos que:

$$2{,}222\ldots = 2 + 2\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 2\times 10^{-2} + \cdots$$

que representa uma série geométrica convergente já que sua razão vale $10^{-1} \in (-1\,,1)$. Além dissso, temos que:

$$2{,}222\ldots = 2 + 2\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 2\times 10^{-2} + \cdots = \frac{2}{1-10^{-1}} = \frac{2\times 10}{10-1} = \frac{20}{9}\,.$$

Determinamos assim a geratriz da dízima $2\,,222\ldots$ usando um processo diferente daquele apresentado na seção 2 da Lição 5.

2 Progressão aritmética

Outro tipo de progressão é a *progressão aritmética*.

Progressão aritmética (ou *pa*) de *razão* r e *primeiro termo* b é a lista ordenada

b ; $b + r$; $b + 2r$; $b + 3r$; ... ; $b + (n-1)r$; $b + nr$; $b + (n+1)r$; ...

O termo $b + nr$ é dito o *termo geral* da progressão.

Numa progressão aritmética a diferença entre um dado termo e o seu antecessor é igual a razão, isto é: $\big(b+(n+1)r\big)-(b+nr)=r$ para todo $n\geq 0$. Essa, não só é uma maneira de determinar a razão da progressão aritmética, como também serve para verificar se a progressão dada é, de fato, uma progressão aritmética.

A soma dos n primeiros termos dessa progressão vale:

$$S_n=\underbrace{b+(b+r)+(b+2r)+(b+3r)+\cdots+\big(b+(n-1)r\big)}_{n\ termos}\,.$$

Assim,

$$\begin{array}{rl} S_n &= b+(b+r)+(b+2r)+(b+3r)+\cdots+\big(b+(n-1)r\big)\\ S_n &= \big(b+(n-1)r\big)+\cdots+(b+3r)+(b+2r)+(b+r)+b \\ \hline 2S_n &= n\big(2b+(n-1)r\big)\,. \end{array}$$

Consequentemente, temos que:

$$S_n=\frac{n\big(2b+(n-1)r\big)}{2}\quad \text{para todo } n\geq 1\,.$$

Também podemos associar uma série a uma progressão aritmética, a saber:

$$\sum_{n\geq 0}(b+nr)=b+(b+r)+(b+2r)+(b+3r)+\cdots+(b+nr)+\cdots$$

No entanto, podemos mostrar que essa série *nunca é somável*, a menos que o primeiro termo e a razão sejam ambos nulos.

Usando argumentos de Cálculo I não é difícil mostrar que a expressão $S_n=\frac{n\big(2b+(n-1)r\big)}{2}$ tende a ∞ ou $-\infty$ quando n cresce indefinidamente (isto é, $n\to\infty$), a menos que b e r sejam, ambos, nulos.

Exemplos

❄ $1\ ;\ 1+\frac{1}{2}\ ;\ 1+\frac{2}{2}\ ;\ 1+\frac{3}{2}\ ;\ 1+\frac{4}{2}\ ;\ 1+\frac{5}{2}\ ;\ \cdots$
é uma progressão aritmética cujo primeiro termo vale 1 e cuja razão vale $1/2$.

❄ A progressão $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ \cdots\ ;\ n\ ;\ \cdots$ é uma progressão aritmética tendo 1 como termo inicial e 1 como razão. A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão vale:

$$S_n=1+2+3+4+5+\cdots+n=\frac{n\big(2+(n-1)\big)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Note que para todo inteiro $n>1$ temos que:

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}>\frac{n+n}{2}=n\,.$$

A propriedade $S_n > n$ quando $n > 1$, nos garante que S_n ultrapassa todos os números reais positivos a medida que n cresce indefinidamente, isto é, $S_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mostramos assim que a série em estudo é não somável, ou seja, é divergente.

❄ A soma S_n dos n primeiros termos da progressão do exemplo anterior vale:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{2}{2}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right) + \left(1 + \frac{4}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \\
&= \frac{n\big(2 + (n-1)\frac{1}{2}\big)}{2} = \frac{n(4 + (n-1))}{4} = \frac{n(n+3)}{4} .
\end{aligned}
$$

Aqui também, para todo inteiro $n > 1$ temos que:

$$
S_n = \frac{n(n+3)}{4} = \frac{n^2 + 3n}{4} > \frac{n + 3n}{4} = n .
$$

Analogamente, a propriedade $S_n > n$ quando $n > 1$, nos garante que S_n ultrapassa todos os números reais positivos a medida que n cresce indefinidamente, ou seja, $S_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mostramos assim que a série em estudo é divergente.

3 Sequências e séries

Uma *sequência* de números reais é uma lista ordenada de números reais

$$
a_1 \;;\; a_2 \;;\; a_3 \;;\; a_4 \;;\; \dots \;;\; a_n \;;\; \dots
$$

onde a *ordenação* é dada pelos sub-índices $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ Assim, a_1 é o *primeiro elemento* da sequência, a_2 é o *segundo elemento*, a_3 é o *terceiro elemento*, ..., a_n é o *n-ésimo elemento* e assim sucessivamente. O n-ésimo elemento também é dito *termo geral* da sequência.

As progressões geométricas e aritméticas aqui estudadas são exemplos de sequências de números reais. Outros exemplos de sequências são:

☞ $2 \;;\; 3^2 \;;\; 4^3 \;;\; 5^4 \;;\; 6^5 \;;\; \dots \;;\; (n+1)^n \;;\; \dots$

☞ $5 \;;\; -1 \;;\; 2 \;;\; 3^2 \;;\; 4^2 \;;\; 5^2 \;;\; \dots \;;\; n^2 \;;\; \dots$

☞ $1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{3} \;;\; \frac{1}{4} \;;\; \frac{1}{5} \;;\; \dots \;;\; \frac{1}{n} \;;\; \dots$

☞ $1 \;;\; \frac{1}{2^2 - 1} \;;\; \frac{1}{3^2 - 1} \;;\; \frac{1}{4^2 - 1} \;;\; \frac{1}{5^2 - 1} \;;\; \dots \;;\; \frac{1}{n^2 - 1} \;;\; \dots$

Uma sequência de números reais

$$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ a_4 \ ; \ \ldots \ ; \ a_n \ ; \ \ldots \quad \text{também é denotada por} \quad \big(a_n\big)_{n\geq 1}.$$

A ela associamos uma série, como fizemos para as progressões, a saber:

$$\sum_{n\geq 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Essa série pode ser ou não somável, isso depende da sequência que lhe dá origem.

Uma maneira de saber se uma série é *convergente* (ou *somável*) é fazer o que fizemos com a série geométrica: determinamos a expressão da soma S_n dos n primeiros termos da sequência (nem sempre é possível explicitar de forma simples tal soma) e depois analisamos o que ocorre com S_n quando o número n de termos cresce indefinidamente. É o comportamento de S_n que dirá se a série é ou não somável. Se S_n se aproxima de um único valor real A, a medida que n cresce indefinidamente, diremos que a série é *somável* e que sua *soma* vale A. Caso contrário, ela é dita *não somável*, ou *divergente*.

Exemplos

❄ A soma S_n dos n primeiros termos da sequência

$$1-\frac{1}{2} \ ; \ \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \ ; \ \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \ ; \ \cdots \ ; \ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \ ; \ \cdots$$

vale

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$$

a qual se aproxima de 1 quando n cresce indefinidamente, já que, nesse caso, $\frac{1}{n+1}$ se aproxima de *zero*. Isso significa que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{é somável e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Como $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ para $n \neq -1\,,0$ concluímos, também, que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{é somável e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

Repare que as séries acima não são séries geométricas.

❄ A sequência

$$\frac{1}{2^2-1} \ ; \ \frac{1}{3^2-1} \ ; \ \frac{1}{4^2-1} \ ; \ \frac{1}{5^2-1} \ ; \ \ldots \ ; \ \frac{1}{n^2-1} \ ; \ \ldots \qquad (16.2)$$

tem $\dfrac{1}{n^2-1}$ como termo geral o qual pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right\} \quad \text{quando } n \neq \pm 1\,. \tag{16.3}$$

A soma S_n dos $n \geq 2$ primeiros termos de (16.2) nos fornece:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right\} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right\} \end{aligned}$$

que tende para $3/4$ quando n cresce indefinidamente já que $1/(n+1)$ e $1/(n+2)$ tendem a zero quando n cresce indefinidamente. Consequentemente, a série associada à sequência (16.2) satisfaz:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \quad \text{é convergente e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}\,.$$

Note também que essa série não é uma série geométrica.

❄ A série $1+1+1+1+\cdots$ é divergente. A soma S_n das n primeiras parcelas vale $S_n = n$. Essa soma parcial ultrapassa todos os números reais positivos a medida que n cresce indefinidamente. Isto é, S_n tende a infinito quando n tende a infinito, ou seja : $S_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Pela mesma razão a série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$ é divergente, pois

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n}{2} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Portanto, S_n vai ultrapassar todos os reais positivos a medida que $n \to \infty$, isto é, novamente teremos que $S_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

❄ O termo geral da sequência $1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{1}{n}\ ;\ \ldots$ é $1/n$ e a série a ela associada é a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{a qual é denominada } \textit{série harmônica}.$$

Esta série é divergente. Vamos mostrar sua divergência agrupando de forma conveniente os termos desta série. Para isso, façamos :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \Big\{\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}\Big\} + \Big\{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}\Big\} + \Big\{\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}\Big\} \\ &\quad + \Big\{\underbrace{\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}}_{\geq \frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}}\Big\} \\ &\quad + \cdots \ \geq\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty\,. \end{aligned}$$

Outros exemplos de séries divergentes, isto é, não somáveis, são:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1-2n} = 1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots$$

4 Propriedades das séries

Mesmo sem saber exatamente como se define a *convergência* de uma série não geométrica de números reais, podemos manipular algebricamente com tais séries, usando algumas de suas propriedades, apresentadas a seguir.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes então $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, a_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ são convergentes.

Além disso, $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (resp. divergente) $\iff$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente (resp. divergente).

No caso convergente, vale a igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+\cdots+a_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{onde } n_0 \geq 2\,.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é **divergente** então

$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\, b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\lambda b_n)$ são **divergentes** quando $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$.

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente

Aqui estamos entendendo que

$$\sum_{n\geq k} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$$

Exemplos

❄ As propriedades acima nos garantem que a série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2}{3^n}\right)$ é convergente. Ela não é uma série geométrica mas, pode ser vista como soma de duas séries geométricas convergentes. Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{1/2}{1-1/2} + 2\,\frac{1/3}{1-1/3} = 1 + 2\times\frac{1}{2} = 2\,.\end{aligned}$$

❄ Provamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ é divergente. Além disso, sabemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots$ é convergente pois é uma série geométrica de razão $1/2$. Logo, pelas propriedades que acabamos de listar, são *divergentes* as seguintes séries:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \quad;\quad \sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots \quad;\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{10}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}10\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots \quad;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n} + \frac{1}{n}\right) \quad;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n} - \frac{1}{n}\right).$$

❄ A série $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \cdots$ é divergente pois

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{é divergente}.$$

❄ A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1} = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \cdots$ é divergente pois

$$1 > \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \;;\; \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \;;\; \frac{1}{7} > \frac{1}{8} \quad \cdots \quad \text{e assim sucessivamente}.$$

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ é divergente, concluímos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ também é divergente.

Você pode aprender muito mais sobre séries nas referências [1, 5, 12]

Exercícios resolvidos

1. **Verifique quais das progressões a seguir são progressões geométricas. Determine a soma dos n primeiros termos das duas primeiras progressões.**

   (a) Progressão de termo geral $3^{n/2}$ onde $n \geq 0$;

   (b) 2 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; $\ldots$

   (c) Progressão de termo geral $n!$ onde $n \geq 1$;

   Solução

   (a) Temos que $3^{\frac{n+1}{2}} \div 3^{\frac{n}{2}} = 3^{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ para todo $n \geq 0$. Portanto, essa progressão é uma *pg* com razão $\sqrt{3}$. A soma S_n dos n primeiros termos 1 ; $3^{1/2}$; $3^{2/2}$; $3^{3/2}$; $\cdots$; $3^{(n-1)/2}$ vale

$$S_n = \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^n}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3^n})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3^n}-\sqrt{3^{n+1}}}{2} = \frac{\sqrt{3^{n+1}}+\sqrt{3^n}-\sqrt{3}-1}{2} \,.$$

   (b) Comparando os três primeiros termos da progressão, temos que: $3^2 \div 2 \neq 3^3 \div 3^2$. Logo, essa progressão não é uma *pg*. No entanto, ela é uma *pg* com razão $r = 3$ a partir do segundo termo. Assim, a soma S_n dos n primeiros termos 2 ; $\underbrace{3^2 \;;\; 3^3 \;;\; 3^4 \;;\; \cdots \;;\; 3^n}_{n-1 \; termos}$ vale

$$S_n = 2 + 3^2 \times \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = 2 + \frac{9}{2}(3^{n-1}-1) = 2 + \frac{3}{2}(3^n - 3) \quad \text{quando} \quad n \geq 1 \,.$$

   (c) Temos que $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = n+1$ que depende de n . Consequentemente, a progressão em questão não é uma *pg*.

2. **Calcule o 15^{o} termo da progressão geométrica cujo segundo termo vale 5 e cuja razão vale $5{,}1$.**

   Solução O termo procurado é o 14^{o} termo da *pg* de razão $r = 5{,}1$ e tendo 5 como primeiro termo. O n-ésimo termo dessa *pg* vale: $5r^{n-1} = 5 \times 5{,}1^{n-1}$. Fazendo $n = 14$ concluímos que o termo procurado vale $5 \times 5{,}1^{13}$.

3. **Seja $a \in \mathbb{R}$. Pergunta-se: sempre existe uma progressão geométrica onde o termo inicial vale 2 e o nono termo vale a ?**

Solução Se tal *pg* de razão r existe, o 9^o termo precisa satisfazer a condição $2r^{9-1} = a$, ou seja, $r = \sqrt[8]{a/2}$. No entanto, uma tal razão não existe quando, por exemplo, $a = -1$. Portanto, a resposta à pergunta colocada é **NÃO**.

4. **Compare a soma dos n primeiros termos das seguintes progressões:**
$\mathbf{1 \ ; \ 1 \ ; \ 1 \ ; \ 1 \ ; \ 1 \ ; \ 1 \ ; \ \dots}$ **e** $\mathbf{1 \ ; \ -1 \ ; \ 1 \ ; \ -1 \ ; \ 1 \ ; \ -1 \ ; \ 1 \ ; \ \dots}$

Solução Para a primeira progressão, a soma S_n dos n primeiros termos vale

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \ parcelas} = n\,.$$

Para a segunda, a soma $\mathcal{T}_n$ pode assumir os seguintes valores:
$\mathcal{S}_1 = 1 \ ; \ \mathcal{S}_2 = 0 \ ; \ \mathcal{S}_3 = 1 \ ; \ \mathcal{S}_4 = 0 \ ; \ \mathcal{S}_5 = 1 \ ; \ \mathcal{S}_6 = 0 \ ; \ \cdots$
De fato, podemos expressar a soma dos termos dessa *pg* da seguinte forma :

$$\mathcal{S}_n = \begin{cases} 1 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é par}\,. \end{cases}$$

Quando o número n de termos cresce indefinidamente, as somas S_n e $\mathcal{S}_n$ têm comportamentos distintos :

- S_n cresce indefinidamente, ultrapassando todos os números reais ;
- $\mathcal{S}_n$ não cresce indefinidamente mas, fica oscilando, assumindo periodicamente os valores 1 e 0.

É por causa desses comportamentos que elas são *não somáveis*, ou seja, *não convergentes*.

5. **As séries geométricas a seguir são convergentes ?**
(a) $\mathbf{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots}$
(b) $\mathbf{0{,}9^{-2} + 0{,}9^{-3} + 0{,}9^{-4} + 0{,}9^{-5} + \cdots}$
(c) $\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 + \cdots$
(d) $\pi - \pi^2 + \pi^3 - \pi^4 + \pi^5 - \pi^6 + \cdots$

Solução Para responder a pergunta precisamos saber se a razão r satisfaz ou não a condição $|r| < 1$.
(a) Nesse caso $r = 2 > 1$. Logo, a série é **divergente**.
(b) Aqui, a série é da forma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 0{,}9^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{0{,}9}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{10}{9}\right)^n$ que é **divergente** pois a razão $r = \frac{10}{9} > 1$.
(c) Nesse item, começamos com a seguinte análise:

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} < \sqrt{2} \iff \sqrt{5} < \sqrt{3} + \sqrt{2} \iff 5 < 3 + 2 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}\,.$$

Acabamos de mostrar que $\sqrt{5}-\sqrt{3}<\sqrt{2}$. Consequentemente, $0<\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<1$ o que mostra que a série geométrica em estudo é **convergente**.

(d) Nesse caso a razão $r=-\pi\notin(-1\,,1)$. Logo, a série é **divergente**.

6. **Determine os valores de x para os quais as séries geométricas a seguir são somáveis e calcule a soma de cada uma delas. Determine também os valores de x para os quais elas não são somáveis.**

(a) $\boldsymbol{2x+(2x)^2+(2x)^3+(2x)^4+\cdots}$

(b) $\boldsymbol{\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots}$

(c) $\boldsymbol{\left(\frac{x}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{x}{3}\right)^{-4}+\cdots}$

(d) $\boldsymbol{-1+(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5-(x-1)^6+\cdots}$

(e) $\boldsymbol{1+\frac{2}{x}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^2+\left(1+\frac{2}{x}\right)^3+\left(1+\frac{2}{x}\right)^4+\cdots}$

Solução Note que em cada um dos itens, a razão r e o termo inicial b dependem da variável x.

(a) Essa série geométrica tem razão $r=2x$ e primeiro termo $b=2x$. Assim, ela é somável quando

$$|2x|<1\quad\Longleftrightarrow\quad|x|<\frac{1}{2}$$

e temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n=\frac{2x}{1-2x}\quad\text{quando}\quad|x|<\frac{1}{2}\,.$$

Quando $|x|\geq 1/2$ a série não é somável.

(b) Nesse caso a razão vale $r=x/3$ e o termo inicial $b=(x/3)^2$. Logo, a série será somável quando

$$\left|\frac{x}{3}\right|<1\quad\Longleftrightarrow\quad|x|<3\,.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\frac{x^2/9}{1-x/3}=\frac{x^2}{3(3-x)}\quad\text{quando}\quad|x|<3\,.$$

Quando $|x|\geq 3$ a série não é somável.

(c) Temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^{n}$. Assim, a razão $r=3/x$ e o termo inicial $b=3/x$ estão bem definidos desde que $x\neq 0$. Para garantir a somabilidade da série devemos ter $|r|<1$, ou seja:

$$\left|\frac{3}{x}\right|<1\quad\Longleftrightarrow\quad|x|>3\,.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{-n} = \frac{3/x}{1-3/x} = \frac{3}{x-3} \quad \text{quando} \quad |x| > 3\,.$$

Para $0 < |x| \leq 3$ a série não é somável e quando $x = 0$ a série não está bem definida.

(d) Nesse item, temos que $r = -(x-1)$ e $b = -1$. Assim, para garantir a somabilidade, devemos ter:

$$|x-1| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (\,0\,,2\,)\,.$$

Consequentemente,

$$-1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + \cdots = \frac{-1}{1+(x-1)} = -\frac{1}{x} \quad \text{quando} \quad x \in (\,0\,,2\,)\,.$$

Além disso, essa série diverge para $x \in (-\infty\,,0\,] \cup [\,2\,,\infty)$.

(e) Temos que $r = 1 + \dfrac{2}{x} = b$ estão bem definidos para $x \neq 0$. Para garantir a convergência, devemos ter:

$$\left|1 + \frac{2}{x}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 1 + \frac{2}{x} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < \frac{2}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < \frac{1}{x} < 0\,.$$

Agora, para $x \neq 0$ temos:

- $\dfrac{1}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0\,;$
- $\dfrac{1}{x} > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{x} > -x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x+1) > 0$

  $\Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty\,,-1\,) \cup (\,0\,,\infty)$

  já que -1 e 0 são as soluções do trinômio $x(x+1) = 0$.

Combinando as soluções das duas inequações acima estudadas, obtemos:

$$\left|1 + \frac{2}{x}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty\,,-1\,)\,.$$

Concluímos então que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{n} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - 1 - \frac{2}{x}} = -\frac{x+2}{2} \quad \text{quando} \quad x \in (-\infty\,,-1\,)\,.$$

Quando $x \in [-1\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$ a série não é somável. Para $x = 0$ ela não está bem definida.

7. Escreva as dízimas periódicas abaixo na forma de uma fração de números inteiros, usando séries geométricas.

(a) $\mathbf{0{,}210\overline{2}}$ **(b)** $\mathbf{13{,}\overline{023}}$ **(c)** $\mathbf{1{,}21\overline{232}}$**.**

Solução Escrevendo essas dízimas periódicas na forma de séries geométricas, obtemos:

(a) $0{,}210\overline{2} = 10^{-3} \times 210{,}\overline{2} = 10^{-3} \times \big(210 + 2 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \cdots\big)$

$$= 10^{-3} \times \left(210 + \frac{2 \times 10^{-1}}{1 - 10^{-1}}\right) = 10^{-3} \times \left(210 + \frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{210 \times 9 + 2}{9000} = \frac{1.892}{9.000} = \frac{473}{2250}\,.$$

(b) $13{,}\overline{023} = 13 + 23 \times 10^{-3} + 23 \times 10^{-6} + 23 \times 10^{-9} + \cdots$

$$= 13 + \frac{23 \times 10^{-3}}{1 - 10^{-3}} = 13 + \frac{23}{999}$$

$$= \frac{13 \times 999 + 23}{999} = \frac{13.010}{999}\,.$$

(c) $1{,}21\overline{232} = 10^{-2} \times 121{,}\overline{232} = 10^{-2} \times \big(121 + 232 \times 10^{-3} + 232 \times 10^{-6} + 232 \times 10^{-9} + \cdots\big)$

$$= 10^{-2} \times \left(121 + \frac{232 \times 10^{-3}}{1 - 10^{-3}}\right) = 10^{-2} \times \left(121 + \frac{232}{999}\right)$$

$$= \frac{121 \times 999 + 232}{99900} = \frac{121.111}{99.900}\,.$$

8. **Verifique quais das progressões a seguir são progressões aritméticas:**

(a) Progressão de termo geral $2(n+1)$ onde $n \geq 0$;

(b) Progressão de termo geral $3\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ onde $n \geq 1$;

(c) Progressão de termo geral $\dfrac{1+n}{n^2-1}$ onde $n \geq 2$

(d) Progressão de termo geral $\dfrac{n^2-1}{1+n}$ onde $n \geq 0$.

Solução Temos que:

(a) $2\{(n+1)+1\} - 2(n+1) = 2$ para todo $n \geq 0$. Logo, a progressão em questão é uma *pa*.

(b) $3\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) - 3\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{3}{n} = \dfrac{3n - 3n - 3}{n(n+1)} = -\dfrac{3}{n(n+1)}$ que depende de n.

Concluímos então que essa progressão não é uma progressão aritmética.

(c) Note que $\dfrac{1+n}{n^2-1} = \dfrac{n+1}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{n-1}$ para $n \neq 1$. Assim, temos que

$$\frac{1+(n+1)}{(n+1)^2-1} - \frac{1+n}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)-1} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \quad \text{que depende de } n.$$

Consequentemente, a progressão desse item não é uma *pa*.

(d) Do item anterior temos que $\dfrac{n^2-1}{1+n} = n - 1$ para $n \neq -1$. Assim, $\big((n+1)-1\big) - (n-1) = -1$.
Consequentemente, a progressão é uma *pa*.

9. Mostre que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ onde $a_n = 1/n$ não é uma progressão geométrica, nem aritmética.

Solução Essa sequência não é uma progressão geométrica pois:

$$\frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} \quad \text{não é uma constante (depende de } n\text{).}$$

Ela também não é uma progressão aritmética pois:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{não é uma constante (depende de } n\text{).}$$

10. Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{na_n - (n+1)}{(n+2)^2} \quad \text{para todo } n \geq 0\,. \tag{16.4}$$

(1) Calcule a_i para $i = 1, 2, 3, 4$;

(2) Relacione a_n e a_{n-1} para $n \geq 1$.

Solução Da definição de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ concluímos que:

(1) Fazendo $n = 0\,, 1\,, 2\,, 3\,, 4$ em (16.4) obtemos

$$a_1 = a_{0+1} = \frac{0 \times a_0 - (0+1)}{(0+2)^2} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$a_2 = a_{1+1} = \frac{1 \times a_1 - (1+1)}{(1+2)^2} = \frac{a_1 - 2}{9} = -\frac{1/4+2}{9} = -\frac{9/4}{9} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$a_3 = a_{2+1} = \frac{2 \times a_2 - (2+1)}{(2+2)^2} = \frac{2a_2 - 3}{16} = -\frac{1/2+3}{16} = -\frac{7/2}{16} = -\frac{7}{32}\,;$$

$$a_4 = a_{3+1} = \frac{3 \times a_3 - (3+1)}{(3+2)^2} = \frac{3a_3 - 4}{25} = -\frac{21/32+4}{25} = -\frac{21/32+128/32}{25} = -\frac{149}{32 \times 25}\,.$$

(2) Quando $n \geq 1$, segue que $n-1 \geq 0$ e podemos concluir de (16.4) que

$$a_n = a_{(n-1)+1} = \frac{(n-1)a_{n-1} - \big((n-1)+1\big)}{\big((n-1)+2\big)^2} = \frac{(n-1)a_{n-1} - n}{(n+1)^2}$$

o que exprime a relação entre a_n e a_{n-1} para $n \geq 1$.

11. Dê a expressão da n-ésima parcela das seguintes séries:

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

(b) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$

(c) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots$

(d) $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \frac{81}{32} + \cdots\,.$

Solução Enumerando as parcelas, obtemos:

(a) $1 \; ; \; \dfrac{1}{2\times\mathbf{2}-1} \; ; \; \dfrac{1}{2\times\mathbf{3}-1} \; ; \; \dfrac{1}{2\times\mathbf{4}-1} \; ; \; \cdots \; ; \; \dfrac{1}{2\times\boldsymbol{n}-1}$

(b) $\dfrac{2+\mathbf{1}}{4} \; ; \; \dfrac{2+\mathbf{2}}{(2+\mathbf{1})^2} \; ; \; \dfrac{2+\mathbf{3}}{(2+\mathbf{2})^2} \; ; \; \dfrac{2+\mathbf{4}}{(2+\mathbf{3})^2} \; ; \; \cdots \; ; \; \dfrac{2+\boldsymbol{n}}{\big(2+(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\big)^2}$

(c) $1 \; ; \; \dfrac{1}{1+\mathbf{2}} \; ; \; \dfrac{1}{1+2+\mathbf{3}} \; ; \; \dfrac{1}{1+2+3+\mathbf{4}} \; ; \; \cdots \; ; \; \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+\boldsymbol{n}} = \dfrac{2}{n(n+1)}$

(d) $\dfrac{3^{\mathbf{1}}}{2^{\mathbf{2}}} \; ; \; \dfrac{3^{\mathbf{2}}}{2^{\mathbf{3}}} \; ; \; \dfrac{3^{\mathbf{3}}}{2^{\mathbf{4}}} \; ; \; \dfrac{3^{\mathbf{4}}}{2^{\mathbf{5}}} \; ; \; \cdots \; ; \; \dfrac{3^{\boldsymbol{n}}}{2^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}}.$

Assim, os n-ésimos termos são, respectivamente,

$$\frac{1}{2n-1} \; ; \; \frac{2+n}{\big(2+(n-1)\big)^2} \; ; \; \frac{2}{n(n+1)} \; ; \; \frac{3^n}{2^{n+1}}.$$

12. Dê uma expressão para a soma dos n primeiros termos da sequência

$$\mathbf{1 \; ; \; 2 \; ; \; -3 \; ; \; 4 \; ; \; 10 \; ; \; 10^2 \; ; \; 10^3 \; ; \; \cdots \; ; \; 10^k \; ; \; \cdots}$$

que seja verdadeira para todo $n \geq 4$.

Solução Essa sequência é uma progressão geométrica, a partir do 5^o termo. Assim, quando $n \geq 5$ a soma S_n dos n primeiros elementos pode ser feita da seguinte forma: somamos os quatro primeiros elementos com a soma dos $n-4$ primeiros elementos da *pg* de razão e termo inicial iguais a 10. Assim, obtemos:

$$S_n = 1+2-3+4+10\times\frac{1-10^{n-4}}{1-10} = 4+10\times\frac{1-10^{n-4}}{1-10} = 4+10\times\frac{10^{n-4}-1}{9} \quad \text{quando } n \geq 4.$$

☛ Note que essa expressão para S_n não é correta quando $n \in \{1,2,3\}$.

13. Mostre que as séries a seguir são convergentes e calcule as suas somas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5^n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}$

Solução Nas séries que não são séries geométricas vamos calcular a soma S_n das n primeiras parcelas e analizar o seu comportamento quando n cresce indefinidamente.

(a) Temos que $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{0} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \cdots = \frac{3}{2} + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \cdots$

é uma série geométrica cuja razão $r = 2/3$ e cujo termo inicial vale $b = 3/2$. Como $|r| < 1$ segue que a série é convergente e sua soma vale

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{b}{1-r} = \frac{3/2}{1-2/3} = \frac{3/2}{1/3} = \frac{9}{2}.$$

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 3^{-n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = 1/3$ e termo inicial $b = 1/3$. Como $|r| < 1$, segue que a série é convergente, e

$$\sum_{n\geq 1} 3^{-n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

(c) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 4} \frac{1}{\sqrt[3]{5^n}} = \sum_{n\geq 4} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^n} = \sum_{n\geq 4} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = 1/\sqrt[3]{5}$ e termo inicial $b = 1/\left(5\sqrt[3]{5}\right)$. Como $|r| < 1$, segue que a série é convergente, e

$$\sum_{n\geq 4} \frac{1}{\sqrt[3]{5^n}} = \frac{1/\left(5\sqrt[3]{5}\right)}{1-1/\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{5\left(\sqrt[3]{5}-1\right)}.$$

(d) Vimos na página 338 que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Consequentemente, segue das propriedades das séries que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \pi \qquad \text{já que} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(e) Imitando a decomposição que fizemos da expressão (16.3), na página 339, temos:

$$\frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right\} \quad \text{para todo} \quad n \neq \pm 2.$$

Assim, a soma S_n dos n termos $\displaystyle\frac{1}{3^2-4} + \frac{1}{4^2-4} + \cdots + \frac{1}{n^2-4} + \frac{1}{(n+1)^2-4} + \frac{1}{(n+2)^2-4}$ vale

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots\right.\\
&\quad \left.\cdots + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right\}\\
&\quad = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right\}
\end{aligned}$$

isto é,

$$S_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right\}$$

que tende para $\frac{1}{4} \times \frac{25}{12}$ quando n cresce indefinidamente já que todas as parcelas que dependem de n na expressão acima, tendem para zero quando n cresce indefinidamente. Mostramos assim, que a série em estudo é convergente e

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} = \frac{25}{48}\,.$$

(f) Temos que

$$\frac{1}{n^2-5n+6} = \frac{1}{(n-3)(n-2)} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \quad \text{quando} \quad n \neq 2\,,3\,.$$

Assim,

$$\sum_{n\geq 4} \frac{1}{n^2-5n+6} = \sum_{n\geq 4} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right). \tag{16.5}$$

Fazendo a mudança de variável $k = n-3$, resulta que:

- $n \geq 4 \iff k \geq 1$;
- $n-3 = k$ e $n-2 = k+1$.

A série acima, escrita em termos da nova variável k, toma a forma[4]:

$$\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1\,.$$

Concluímos então que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 4} \frac{1}{n^2-5n+6}$ é convergente e sua soma vale 1.

14. Quais das afirmações a seguir são falsas ?

(a) Se $b > 0$ e $r \neq 0$ então todas as parcelas da série $\sum_{n=1}^{\infty} br^n$ são positivas ;

(b) Se $b > 0$ e $|r| < 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} br^n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} br^n > 0$;

(c) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-3}$ é convergente ;

(d) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ é divergente ;

(e) A soma, termo a termo, de duas séries distintas e divergentes produz uma série divergente .

Solução

[4] Você também pode ver isso diretamente da expressão no membro direito de (16.5). Basta escrevê-la termo a termo.

(a) Essa afirmação é **falsa** pois quando $b > 0$ e $r = -1$ os termos br^n são negativos sempre que n for ímpar.

(b) Como $|r| < 1$ segue que essa série geométrica é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} br^n = \dfrac{b}{1-r}$. Além disso, sendo $r < 1$, temos que $1 - r > 0$. Assim, como $b > 0$, segue que $\dfrac{b}{1-r} > 0$ e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} br^n > 0$.

Concluímos então que a afirmação é **verdadeira**.

(c) Considere a mudança de variável $n = k + 2$. Assim: $n = 2 \iff k = 0$. Consequentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+2)-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

que como já vimos é divergente. Logo, a afirmação é **falsa**.

(d) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{é divergente pois} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{é divergente.}$$

Logo, a afirmação é **verdadeira**.

(e) Essa afirmação é **falsa** pois, como já vimos, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{é convergente}$$

mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} \quad \text{são séries distintas e divergentes.}$$

☛ **Nota:** Você pode construir exemplos muito mais simples que esse !

15. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = 1 + \frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 + \cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq 2x\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}:\ 1+\frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \textit{razão}:\ 1+\frac{1}{x}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1+\frac{1}{x} < 1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1+\dfrac{1}{x} < 1 \iff \dfrac{1}{x} < 0 \iff x < 0\,;$
- Além disso, para $x \neq 0$ temos:

$$1+\frac{1}{x} > -1 \iff \frac{1}{x} > -2 \iff \frac{x^2}{x} > -2x^2$$
$$\iff 2x^2 + x > 0 \iff x(2x+1) > 0\,.$$

  Lembramos que o trinômio do segundo grau $x(2x+1)$ é positivo fora do intervalo definido pelas suas raízes que são 0 e $-1/2$. Isto é, $x(2x+1) > 0$ se, e somente se, $x \in (-\infty\,, -1/2\,) \cup (\,0\,, \infty)$.

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1 < 1+\frac{1}{x} < 1 \iff x \in (-\infty\,, -1/2\,).$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \ \text{converge} \iff x \in (-\infty\,, -1/2\,).$$

(b) No item anterior determinamos o domínio de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -(x+1) \quad \text{quando} \quad x \in (-\infty\,, -1/2\,).$$

Assim, no intervalo $(-\infty\,, -1/2\,)$ a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \leq 2x \quad \text{toma a forma} \quad -(x+1) \leq 2x\,.$$

Donde concluímos:

$$-(x+1) \leq 2x \iff 2x \geq -x-1 \iff 3x \geq -1 \iff x \geq -1/3.$$

Portanto, as soluções para a inequação proposta são os pontos do intervalo $[-1/3\,, -1/2\,)$ e a solução da questão está terminada.

16. Admitindo que o limite $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\cdots}}}}$ **existe, pergunta-se: quanto vale ?**

Solução Admitamos então que o limite em questão existe e denotemo-lo por z. Assim, explorando a periodicidade da expressão, obtemos a seguinte relação

$$z = \frac{1}{1+2z}\,.$$

Para $z \neq -1/2$ temos:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{1+2z} \quad &\Longleftrightarrow \quad z(1+2z) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2z^2 + z - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\times 2\times(-1)}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}\,. \end{aligned}$$

Como o limite acima não pode ser negativo, concluímos que o seu valor é $\dfrac{-1+3}{4} = 1/2\,.$

17. Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n = 1 + \left(1-\frac{1}{2^x}\right) + \left(1-\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2^x}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{2^x}\right)^4 + \cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n \leq 4^{x^2-1}\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$primeiro\ termo:\ 1 \qquad \text{e} \qquad razão:\ 1-\frac{1}{2^x}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1 - \frac{1}{2^x} < 1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1-\dfrac{1}{2^x} < 1 \iff -\dfrac{1}{2^x} < 0 \iff \dfrac{1}{2^x} > 0$ que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Consequentemente, essa primeira desigualdade é satisfeita por todos os números reais.

- Além disso, será necessário que:

$$1 - \frac{1}{2^x} > -1 \iff 2 > \frac{1}{2^x} \iff 2 > 2^{-x} \iff 1 > -x \iff x > -1.$$

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1 < 1 - \frac{1}{2^x} < 1 \iff x \in (-1\,, \infty).$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^n \quad \text{converge} \quad \iff \quad x \in (-1\,, \infty).$$

(b) No item anterior determinamos o intervalo de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^x}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{2^x}} = 2^x \quad \text{quando} \quad x \in (-1\,, \infty).$$

Portanto, no intervalo $(-1\,, \infty)$ a inequação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \le 4^{x^2-1} \quad \text{toma a forma} \quad 2^x \le 4^{x^2-1}\,.$$

Donde concluímos:

$$\begin{aligned} 2^x \le 4^{x^2-1} \quad &\iff \quad 2^x \le \left(2^2\right)^{x^2-1} \quad \iff \quad 2^x \le 2^{2x^2-2} \\ &\iff \quad x \le 2x^2 - 2 \quad \iff \quad 2x^2 - x - 2 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Sabemos que o trinômio $2x^2 - x - 2$ é positivo fora do intervalo das raízes que, nesse caso, valem:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Isto é,

$$2x^2 - x - 2 \ge 0 \quad \iff \quad x \in \left(-\infty\,, \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\,, \infty\right).$$

Agora, precisamos saber quais desses valores de x estão no intervalo $(-1\,, \infty)$. Para isso, observamos:

- Evidentemente, $\dfrac{1 + \sqrt{17}}{4} > -1$ ou seja, $\dfrac{1 + \sqrt{17}}{4} \in (-1\,, \infty)$
- Além disso,

$$\frac{1 - \sqrt{17}}{4} > -1 \iff 1 - \sqrt{17} > -4 \iff 1 + 4 > \sqrt{17} \iff 25 > 17$$

  o que mostra que $\dfrac{1 - \sqrt{17}}{4} \in (-1\,, \infty)$.

Portanto, o conjunto solução da inequação proposta é:

$$(-1\,,\infty)\cap\left\{\left(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\,,\infty\right)\right\}=\left(-1\,,\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\,,\infty\right).$$

18. Considere a série $\mathbf{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots}$

(a) Para quais valores da variável x a série acima é convergente ?

(b) Calcule $\mathbf{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots}$ **;**

(c) Resolva a equação $\mathbf{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots=x}$ **;**

(d) Resolva a inequação $\mathbf{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\leq x}$**.**

Solução Consideremos a série

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots$$

Trata-se de uma série geométrica a partir da segunda parcela, cuja razão vale $-1/x$.

(a) Essa série é convergente se, e somente se,

$$-1<-\frac{1}{x}<1 \iff -1<\frac{1}{x}<1 \iff \left|\frac{1}{x}\right|<1 \iff \frac{1}{|x|}<1$$
$$\iff |x|>1 \iff x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1,\infty).$$

(b) Para $x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)$ temos que:

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots=1+\frac{1/x}{1-(-1/x)}=1+\frac{1/x}{1+1/x}=1+\frac{1}{1+x}\,.$$

(c) Novamente, para $x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)$ temos que:

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots=x \iff 1+\frac{1}{1+x}=x \iff 2+x=x+x^2$$
$$\iff x^2=2\,.$$

Concluímos daí que $\pm\sqrt{2}$ são as duas únicas soluções da equação proposta já que $\sqrt{2}\in(\,1\,,\infty)$ e $-\sqrt{2}\in(-\infty\,,-1\,)$.

(d) Para resolver a inequação

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\leq x \tag{16.6}$$

observamos que:

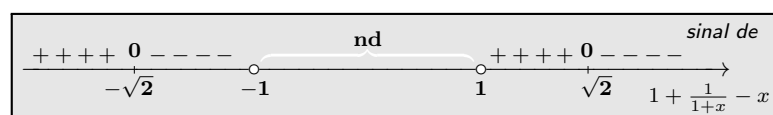
$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\leq x \quad\Longleftrightarrow\quad 1+\frac{1}{1+x}\leq x$$

quando $x\in(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)$. Assim sendo, para resolver (16.6) precisamos estudar o sinal da expressão

$$1+\frac{1}{1+x}-x \quad \text{em} \quad (-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty). \tag{16.7}$$

Vimos que essa expressão só se anula em $\pm\sqrt{2}$. Além disso, como trata-se de uma expressão que varia continuamente em todo o seu domínio de definição, temos a seguinte informação sobre a sua distribuição de sinais:

- Avaliando a expressão (16.7) em $x=2\in(\,\sqrt{2}\,,\infty)$ obtemos:
  $1+\dfrac{1}{1+x}-x\Big]_{x=2}=1+\dfrac{1}{1+2}-2=-1+\dfrac{1}{3}<0 \quad (-)\,;$
- Note que $1<4/3<\sqrt{2}$. Assim, avaliando a expressão (16.7) em $x=4/3\in(\,1\,,\sqrt{2}\,)$ obtemos:
  $1+\dfrac{1}{1+x}-x\Big]_{x=4/3}=1+\dfrac{1}{1+\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{21}>0 \quad (+)\,;$
- Avaliando a expressão (16.7) em $x=-2\in(-\infty\,,-\sqrt{2}\,)$ obtemos:
  $1+\dfrac{1}{1+x}-x\Big]_{x=-2}=1+\dfrac{1}{1-2}+2=2>0 \quad (+)\,;$
- Note que $-\sqrt{2}<-4/3<-1$. Assim, avaliando a expressão (16.7) em $x=-4/3\in(-\sqrt{2}\,,-1\,)$ obtemos:
  $1+\dfrac{1}{1+x}-x\Big]_{x=-4/3}=1+\dfrac{1}{1-\frac{4}{3}}+\dfrac{4}{3}=1-3+\dfrac{4}{3}=-2+\dfrac{4}{3}<0 \quad (-)\,.$

Temos assim, o seguinte quandro de sinais para a expressão (16.7):

Isso nos permite concluir que:

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\leq x \quad\Longleftrightarrow\quad x\in[-\sqrt{2}\,,-1\,)\cup[\,\sqrt{2}\,,\infty)$$

o que finaliza a solução da questão.

19. **Considere a série**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n=1-\frac{1}{x^2}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^4+\cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Resolva a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n \leq x\,.$$

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}:\ 1-\frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \textit{razão}:\ 1-\frac{1}{x^2}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1 < 1-\frac{1}{x^2} < 1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1-\dfrac{1}{x^2} < 1 \iff \dfrac{1}{x^2} > 0 \iff x \neq 0\,;$
- Além disso, devemos ter:

$$1-\frac{1}{x^2} > -1 \iff \frac{1}{x^2} < 2 \iff x^2 > \frac{1}{2} \iff x^2-\frac{1}{2} > 0$$
$$\iff \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

o que ocorre se, e somente se, $x \in \big(-\infty\,,-\sqrt{2}/2\big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,,\infty\big)$.

Lembramos que o trinômio do segundo grau $x^2-1/2$ é positivo fora do intervalo definido pelas suas raízes que são $\pm\sqrt{2}/2$.

Combinando as soluções das duas inequações acima resolvidas, concluímos:

$$-1 < 1-\frac{1}{x^2} < 1 \iff x \in \big(-\infty\,,-\sqrt{2}/2\big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,,\infty\big)\,.$$

Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n \ \text{converge} \iff x \in \big(-\infty\,,-\sqrt{2}/2\big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,,\infty\big).$$

(b) No item anterior determinamos o domínio de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = x^2-1$$

quando $x \in \big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2\big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty\big)$. Assim, em $\big(-\infty\,, -\sqrt{2}/2\big) \cup \big(\sqrt{2}/2\,, \infty\big)$ a inequação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n \leq x \quad \text{toma a forma} \quad x^2-1 \leq x\,.$$

Por outro lado:

$$x^2-1\leq x \iff x^2-x-1\leq 0 \iff x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

onde as extremidades do intervalo acima são as raízes de x^2-x-1 .

Agora, precisamos saber qual é a parte do intervalo acima que está contido no domínio de convergência da série em questão. Para isso precisamos comparar $-\sqrt{2}$ com $1-\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$ com $1+\sqrt{5}$.

Sabemos que $\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$.

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{5}<-\sqrt{2} &\iff \sqrt{2}<\sqrt{5}-1 \iff 2<5-2\sqrt{5}+1 \iff 2<6-2\sqrt{5} \\ &\iff 2\sqrt{5}<4 \iff \sqrt{5}<2 \iff 5<4 \quad \text{(o que é falso)}\,. \end{aligned}$$

Isso mostra que $-\sqrt{2}<1-\sqrt{5}$ já que $-\sqrt{2}\neq 1-\sqrt{5}$.

Portanto, a solução para a inequação dada é o intervalo $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

20. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^n = 1-\frac{2}{x}+\left(1-\frac{2}{x}\right)^2+\left(1-\frac{2}{x}\right)^3+\left(1-\frac{2}{x}\right)^4+\cdots$$

(a) Para quais valores de x essa série converge ?

(b) Dê a distribuição de sinais dessa série em seu domínio de convergência.

Solução A série dada é a série geométrica associada a progressão geométrica de

$$\textit{primeiro termo}:\ 1-\frac{2}{x} \qquad \text{e} \qquad \textit{razão}:\ 1-\frac{2}{x}\,.$$

(a) Já vimos que uma tal série converge se, e somente se, sua razão satisfaz a condição:

$$-1<1-\frac{2}{x}<1\,.$$

Assim, para garantir a convergência, devemos ter:

- $1-\dfrac{2}{x}<1 \iff \dfrac{2}{x}>0 \iff x>0\,;$

- Além disso, devemos ter:

$$1-\frac{2}{x} > -1 \iff \frac{2}{x} < 2 \iff \frac{1}{x} < 1\,.$$

Como do primeiro item já havíamos concluído que $x > 0$, do segundo concluímos que $x > 1$.
Assim, a resposta do item (a) é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{n} \ \text{converge} \iff x \in (\,1\,,\infty\,).$$

(b) No item anterior determinamos o intervalo de convergência da série. Agora, podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{n} = \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = \frac{x-2}{2}$$

quando $x \in (\,1\,,\infty\,)$. Assim, em $(\,1\,,\infty\,)$ a distribuição de sinais da série em questão é:

- ela é positiva quando $x > 2$;
- ela é negativa quando $x < 2$;
- e se anula quando $x = 2$.

Exercícios

1. Determine o 5º termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é $-2/3$ e cuja razão é 7.

2. Determine o 105º termo da progressão geométrica cujo 5º termo é $-2/5$ e cuja razão é -2.

3. Determine o 25º termo da progressão geométrica cujo 5º e 11º termos valem respectivamente $1/5$ e 2^6.

4. Conhecendo as estimativas

$$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3 \quad \text{e} \quad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

faça uma estimativa para

(a) $1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots$

(b) $1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots$

5. Mostre que numa progressão geométrica de primeiro termo a_1 e n-ésimo termo a_n, o produto P_n dos n primeiros termos é dado por

$$P_n = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n}\,.$$

6. Calcule as somas infinitas a seguir e determine os valores de x para os quais elas estão bem definidas.

(a) $x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$

(b) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \cdots$

(c) $x - 2x^3 + 3x^5 - 2x^7 + 3x^9 - 2x^{11} + \cdots$

7. Resolva a inequação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \cdots \leq x\,.$$

8. Resolva a equação

$$\sqrt{x + x^2 + x^3 + \cdots} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots$$

9. Determine o domínio de definição das expressões a seguir.

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \cdots}$

(b) $(x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots)^x$.

10. Considere a progressão geométrica

$$a\ ;\ ar\ ;\ ar^2\ ;\ ar^3\ ;\ ar^4\ ;\ \ldots$$

onde $a\,, r \in \mathbb{R}$.

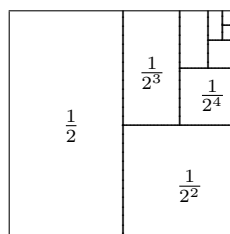
(1) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do primeiro termo e da razão;

(2) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do segundo termo e da razão;

(3) Determine o n-ésimo termo da progressão em função do terceiro termo e da razão;

(4) Determine o $(n+k)$-ésimo termo da progressão em função do k-ésimo termo e da razão, onde $n\,, k \in \mathbb{Z}^+$.

11. Mais uma *Demonstração sem Palavras*, desta vez para a série geométrica[5]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = 1\,.$$

Explique como você vê essa *demonstração*.

12. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > 1$. Calcule

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \cdots + \frac{1}{a^n} + \cdots$

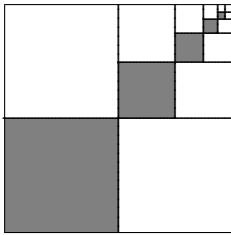
(3) $\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|a|^3} + \frac{1}{|a|^4} + \frac{1}{|a|^5} \cdots$

(4) $\frac{1}{|a|} - \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|a|^3} - \frac{1}{|a|^4} + \frac{1}{|a|^5} \cdots$

(5) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \cdots$

[5] Autor: Warren Pare, Extraído de *Proofs without words*, de Roger B. Nelsen, The Mathematical Association of America.

13. Mais uma *Demonstração sem Palavras*, desta vez para a série geométrica[6]

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\cdots=\frac{1}{3}\,.$$

Explique como você vê essa *demonstração*.

14. Sejam $a\,,b>0$ e $n>1$. Calcule

(1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}}}$

(2) $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\ldots}}}}}}$

(3) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\ldots}}}}}}$

(4) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\sqrt[n]{a\sqrt[n]{b\ldots}}}}}}$

admitindo que tais expressões existem e são não nulas.

Nota: Quando você estiver num curso de Análise na Reta Real verá que não é dificil provar que tais expressões de fato existem.

15. Resolva a equação

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\cdots=48\,.$$

16. Resolva a equação

$$x+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots=1\,.$$

17. Resolva a inequação

$$x+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots<1\,.$$

18. Sejam $a\,,b\in(-1\,,1)$. Sabendo que

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\cdots=A$$
$$1+b+b^2+b^3+b^4+\cdots=B$$

mostre que

$$1+ab+a^2b^2+a^3b^3+\cdots=\frac{AB}{A+B-1}\,.$$

19. Simplifique as expressões

(a) $\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n}$;

(b) $\dfrac{1+x^3+x^6+x^9+\cdots+x^{3n}}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n}$;

(c) $\dfrac{1+x^3+x^6+x^9+\cdots}{1+x+x^2+x^3+\cdots}$;

(d) $\dfrac{1-x^3+x^6-x^9+\cdots}{1-x+x^2-x^3+\cdots}$;

(e) $\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+\cdots}{1-x+x^2-x^3+\cdots}$.

20. Calcule $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$

admitindo que existe e é não nulo.

21. Calcule $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}}$

admitindo $a>0$ e que a expressão representa um número real não nulo.

[6] Autor: Sunday A. Ajose, Extraído de *Proofs without words*, de Roger B. Nelsen, The Mathematical Association of America.

22. Sabendo que $a\,, b > 0$ calcule

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cdots}}}}}$$

admitindo que a expressão, de fato, representa um número real não nulo.

23. Determine o 5º termo da progressão aritmética cujo primeiro termo é -2/3 e cuja razão é 7.

24. Determine o 25º termo da progressão aritmética cujo 5º e 11º termos valem respectivamente 5 e 23.

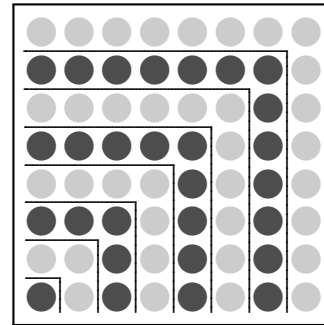
25. Calcule a soma dos n primeiros números ímpares positivos.

26. Determine o domínio de convergência da série $\sum_{n\geq 1}(1-x)^n$ e dê a expressão da sua soma nesse domínio.

27. Determine o domínio de definição da expressão

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^4}+\cdots}$$

28. O diagrama[7] a seguir é mais uma *Demonstração sem Palavras* do seguinte fato:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

29. Mostre que $(1+a)^n > 1+na$ quando $a > 0$ e $n \geq 2$ é um inteiro.

30. Seja $0 < r < 1$. Use o exercício anterior para mostrar que r^n tende para zero quando n cresce indefinidamente.

[7] Autor: Nicomachus de Gerasa (circa A.D 100). Capa do livro *Proofs without words* de Roger B. Nelsen.

Apêndice A: Traçando as paralelas

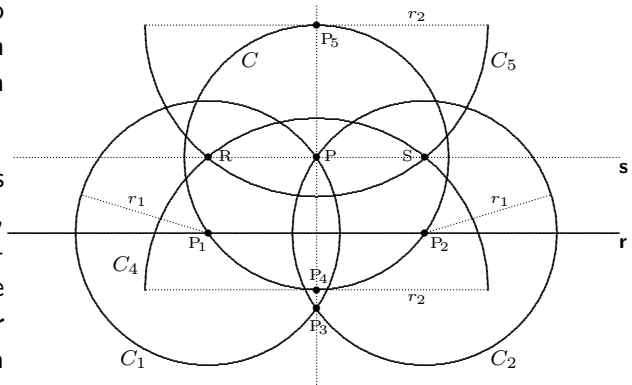
Na seção 3 da Lição 8 aprendemos como localizar os números racionais na reta depois de fixados a origem, a orientação e uma unidade de comprimento. Para finalizar tal seção prometemos apresentar aqui um processo geométrico que nos permita, usando régua e compasso, resolver o seguinte problema:

Dados no plano, uma reta **r** *e um ponto* **P** *fora dela, como traçar usando régua e compasso, a reta que passa por* **P** *e é paralela a* **r** *?*

Podemos fazê-lo da seguinte forma:

- Traçamos um círculo C com centro em P e que intersecta a reta **r** em dois pontos distintos P_1 e P_2. Seja r_1 o raio de C.

- Com centros em P_1 e P_2 traçamos círculos C_1 e C_2 respectivamente, ambos de raio r_1. Tais círculos se intersectam nos pontos P e P_4 que determinam a reta perpendicular a **r** passando por P. Essa reta, intersecta o círculo C nos pontos P_4 e P_5.

- Com centros em P_4 e P_5 traçamos círculos C_4 e C_5 respectivamente, ambos de raio $r_2 > r_1$. Tais círculos se intersectam nos pontos R e S que determinam a reta paralela a reta **r** passando por P.

Traçando perpendiculares

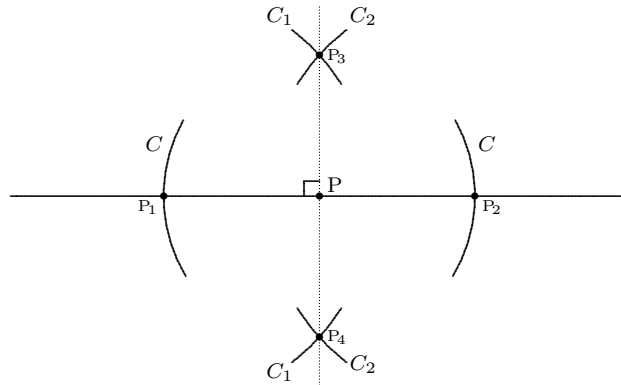
Vamos aproveitar a oportunidade para responder também, a seguinte questão:

Dados no plano, uma reta **r** *e um ponto* $\mathbf{P}$ *sobre ela, como traçar usando régua e compasso, a reta que passa por* $\mathbf{P}$ *e é perpendicular a* **r** *?*

Podemos fazer isso da seguinte forma.

Fixemos uma reta **r** e um ponto $\mathbf{P}$ sobre ela. O processo que vamos descrever é parte do processo geométrico descrito acima.

- Traçamos um círculo C com centro em $\mathbf{P}$ e que intersecta a reta **r** em dois pontos distintos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$. Seja r_1 o raio de C.

- Com centros em $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, traçamos círculos C_1 e C_2 respectivamente, ambos de raio $r_2 > r_1$. Tais círculos se intersectam nos pontos $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$. A reta passando por esses dois pontos é a reta procurada. Ela é a reta pontilhada exibida na figura a seguir.

Feito isso, não custa nada colocar a seguinte questão:

Dados no plano, uma reta **r** *e um ponto* $\mathbf{P}$ **fora** *dela, como traçar usando régua e compasso, a reta que passa por* $\mathbf{P}$ *e é perpendicular a* **r** *?*

Bem, depois do que já fizemos, fica fácil. Por $\mathbf{P}$ traçamos uma reta **r'** paralela a reta **r** . Depois, por $\mathbf{P}$ traçamos a reta **s** perpendicular a reta **r'** . Sabemos da geometria que **s** é a reta procurada.

Apêndice B: Realizando triângulos

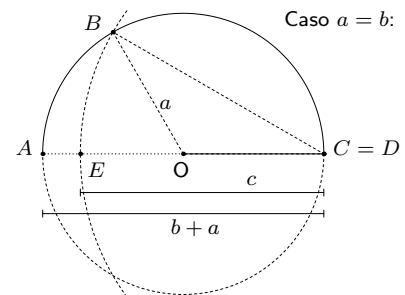
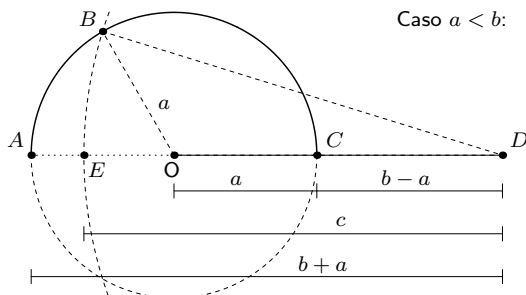
No exercício 18 da página 246 afirmamos que: ***Três números reais positivos são medidas dos lados de um triângulo quando, e somente quando, um deles é maior que a diferença[8] e menor que a soma dos outros dois.*** **Como visualizar esse fato ?**

Solução Vejamos, primeiramente, que se três números positivos são medidas dos lados de um triângulo então: cada um deles é maior que o módulo da diferença e menor que a soma dos outros dois. Para isso, consideremos dois lados do triângulo, denotados por a e b respectivamente, onde $a \leq b$. Denotemos o terceiro lado por c. As figuras a seguir abordam os casos $a < b$ e $a = b$ e mostram que $b - a < c < b + a$, em ambos os casos.

[8] Aqui, dados dois lados de um triângulo, a diferença entre eles se refere à diferença *lado maior - lado menor* que é maior ou igual a zero.

Veja que ao variar o ponto B sobre o semi-círculo superior (sem passar pelos pontos A e C) de raio a obtemos todos os possíveis triângulos com lados de comprimentos a e b respectivamente. Em todos eles, o lado DB é maior que o segmento DC cujo comprimento vale $b - a$ e é menor que o segmento DA que mede $b + a$. Para ver isso, note que o círculo de raio c, centrado em D, passa pelo ponto B e intersecta o segmento CA em um único ponto E. Logo, o comprimento de DE é maior que o de DC e menor que o de DA ou seja, $b - a < c < b + a$.

Reciprocamente, vamos mostrar agora que dados três números reais positivos tais que um deles é maior que o módulo da diferença e menor do que a soma dos outros dois então é possível construir um triângulo cujos lados têm como medida esses três números.

Para isso, sejam a e b dois desses números, onde $a \leq b$ e suponhamos que o terceiro número c satisfaz a condição $b - a < c < b + a$. A figura abaixo mostra a construção do triângulo com lados medindo respectivamente a, b, c.

Para entendê-la, considere o ponto E do segmento CA tal que DE mede c. Isso é possível já que $b - a < c < b + a$. O círculo centrado em D e de raio c passa por E e intersecta a parte superior do círculo de raio a num ponto B. O triângulo procurado é o triângulo OBD.

Agora, finalizada a vizualização do resultado proposto, cabe uma pergunta: Dados três números positivos, se um deles é maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois, será que os outros dois números também terão essa propriedade? A resposta é sim... e isso

é uma consequência do que acabamos de mostrar. Esse resultado afirma que para verificar quando três números reais positivos definem um triângulo tendo esse números como medidas dos seus lados basta tomar um dos números e verificar se ele é maior que o módulo da diferença e menor que a soma dos outros dois. Se a resposta é sim então os três números definem um triângulo tendo tais números como medidas dos seus lados. Caso contrário, não definem.

Respostas dos exercícios propostos

Lição 1

1. Os conjuntos são:

(a) $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$.

(b) $\{3, 7, 11, 15, \ldots, 35, 39\}$.

(c) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

(d) $\{7, 14, 21, \ldots, 42, 49\}$.

2. (a) São iguais pois ambos têm, exatamente, os mesmos elementos, a saber: $1, 2, 4, 5, 7, 9$ e 10.

(b) São conjuntos distintos pois nem todo triângulo retângulo é equilátero. Por exemplo, o triângulo de lados $3, 4, 5$ é retângulo (pois $3^2 + 4^2 = 5^2$) mas não é equilátero.

(c) Como não existe nenhum número ímpar maior do que 2 e menor do que 3 concluímos que os conjuntos em questão têm exatamente os mesmos elementos. Logo, são iguais.

(d) Note que
$210 = 2\times3\times5\times7$ e $420 = 2^2\times3\times5\times7$.

Portanto, os números primos que dividem 210 e 420 são os mesmos, a saber: $2, 3, 5$ e 7. Logo, os conjuntos são iguais.

3. $A = \{8, 9\}$.

4. (a) $\emptyset$.

(b) Conjunto unitário.

(c) Nem unitário, nem vazio.

(d) $\emptyset$.

5. Note que os inteiros n devem satisfazer uma relação do tipo $4n + 7 = 5k + 2$ onde k também é inteiro. Assim,

(a) $0 \in A$.

(b) $37 \notin A$.

(c) $12 \notin A$.

(d) $100^{10} \in A$.

(e) $-5 \in A$.

(f) $-7 \notin A$.

6. (a) É finito. Seus elementos são: $\pm10, \pm12, \pm14, \ldots, \pm96, \pm98$.

(b) É finito e possui exatamente dois elementos, a saber: 1 e 2.

(c) É infinito pois contém todos os números naturais.

(d) É finito pois trata-se do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9998, 9999\}$.

7. (a) Trata-se do conjunto $\{2, 3, 4, \ldots, 1567\}$ que possui 1566 elementos.

(b) Trata-se do conjunto
$$\{-53, -2, -1, 0, 1, \ldots, 8901\}$$
que possui $8901 + 4 = 8905$ elementos.

8. (a) $A_{-2} = \{-3\}$.
$A_0 = \{-3, -2, -1\}$.
$A_2 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
$A_5 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) É dado que
$A_n = \{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, n-1\}$.
Portanto, $\#(A_n) = 4 + (n-1) = n + 3$.

9. $A_0 = \{1, 2, 3\}$.
$B_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
$C_2 = \{10, 10+2, 10+4\}$.

$A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$B_4 = \{-4, -3, -2, \ldots, 5, 6\}$.
$C_5 = \{10, 10+2, 10+4, \ldots, 10+10\}$.

10. $\#(A_n) = n+3$.
$\#(B_n) = (2n+1)+2 = 2n+3$.
$\#(C_n) = n+1$.

11. (a) Os termos da lista são da forma n^{2n-1} onde $n \geq 1$. Logo, o centésimo elemento da lista é $100^{200-1} = 100^{199}$.

(b) A partir do terceiro termo, os termos desta lista têm a forma $(2n+3)^{2n}$, onde $n \geq 1$. Logo, o milésimo elemento será $(2 \times 998 + 3)^{2\times 998}$.

(c) A partir do segundo elemento, os termos têm a forma $(2n)^{2n+1}$, onde $n \geq 1$. Portanto, o centésimo quinto elemento será $(2 \times 104)^{2\times 104+1}$.

12. A partir do terceiro elemento, os termos da lista têm a forma $(2n+2)^{3n-1}$, onde $n \geq 1$. Logo, $k = (2\times 271+2)^{3\times 271-1}$.

O penúltimo termo da lista tem a expressão $(2 \times 270 + 2)^{3\times 270-1}$.

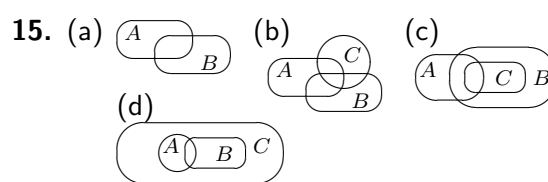
13. Só existem quatro triângulos nessas condições. Seus lados valem, respectivamente: $9, 9, 2$; $8, 8, 4$; $7, 7, 6$; e $6, 6, 8$.

14. (a) Esse conjunto é finito e o número de elementos é o maior inteiro n que satisfaz $3n < 2.317$. Logo, o número de elementos é 772.

(b) Esse conjunto tem apenas um elemento, a saber, o triângulo de lados $6, 8, 10$.

(c) Das condições impostas concluímos que $n \geq 51$ e $n < 1.153$. Logo, o conjunto é finito e tem 1.102 elementos.

(d) Esse conjunto é infinito. E para construir uma infinidade de triângulos nas condições impostas, faça o seguinte. Fixe duas retas paralelas cuja distância entre elas vale 1. Agora, fixe dois pontos na primeira reta, cuja distância entre eles vale 2. Qualquer triângulo que tem um dos vértices na segunda reta e os outros dois vértice nos dois pontos fixados na primeira reta, satisfaz a condição imposta no problema. E, claramente, temos uma infinidade de triângulos nessas condições.

15. (a) (b) (c) (d)

16. As soluções são:

$X = \{-2, -1, 0\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 1\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 3\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 5\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 1, 5\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 3, 5\}$;
$X = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$.

17. (a) Falsa.
Um contra-exemplo se constrói tomando $A = B \neq \emptyset$.

(b) Falsa.
Um contra-exemplo se constrói tomando $A = B = \emptyset$.

(c) Falsa.
Um contra-exemplo se constrói tomando $A = \{1\}$ e $B = \emptyset$.

(d) Falsa.
Para construir um contra-exemplo tome $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$.

18. (a) Verdadeira.

(b) Verdadeira.

(c) Falsa.
Contra-exemplo: $x = 2,5$.

(d) Verdadeira.

(e) Verdadeira.

Nota: Os itens (d) e (e) são matematicamente os mesmos, apenas foram escritos de forma diferente.

19. (1) Falsa.
Contra-exemplo: tome $a = 0 = b$.

(2) Verdadeira.

(3) Verdadeira.

(4) Falsa.
Contra-exemplo: tome $a = -0,1$.

20. (a) $m \times n \in \mathbb{Z}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

(b) $\exists n \in \mathbb{Z}$; $n < -101^{101}$.

(c) $m/n \in \mathbb{Q}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

(d) $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}^+$; $m - n \in \mathbb{Z}^-$.

21. $\#(A \times B) = n \times m$.

Lição 2

1. (a) Está na forma irredutível.

(b) Não está na forma irredutível.

(c) Está na forma irredutível.

(d) Não está na forma irredutível. Repare que o numerador e o denominador são números pares!!

2. As distâncias valem:

(a) 3;

(b) $2{,}1 - \sqrt{3}$ pois $2{,}1 > \sqrt{3}$;

(c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ pois $\sqrt{3} > \sqrt{2}$;

(d) $4{,}2$;

(e) $\sqrt{5}$;

(f) $\pi - 2$ pois $\pi > 2$.

3. (a) Verdadeira.

(b) Falsa.
Um contra-exemplo pode ser produzido tomando $x = 0{,}991$.

(c) Verdadeira.

(d) Verdadeira.

(e) Verdadeira.

4. (a) $0{,}01$;

(b) $\sqrt{2} - 1{,}1$ pois $\sqrt{2} > 1{,}1$;

(c) $2 - \sqrt{3}$ pois $2 > \sqrt{3}$;

(d) $\sqrt{5} - 1$ pois $\sqrt{5} > 1$;

(e) $0{,}9$;

(f) $1/15$.

5. As distâncias valem:

(a) $|\,3{,}4 - 2\,| = 1{,}4$;

(b) $|\,\pi - \sqrt{2}\,| = \pi - \sqrt{2}$ pois $\pi > \sqrt{2}$;

(c) $|\,3{,}4 - (-2)\,| = 5{,}4$;

(d) $|\,-\pi - (-\sqrt{2})\,| = \pi - \sqrt{2}$;

(e) $|\,-2 - (-3{,}4)\,| = 1{,}4$;

(f) $|\,\sqrt{2} - (-\sqrt{3})\,| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6. As soluções são:

(a) $x = 1/2$;

(b) $x = \pm 2$;

(c) $x = -7/3$;

(d) Não tem solução real.

(e) $y = \pi/2$;

(f) $z = -1/3$.

7. Equação: $x = x^2$.

Soluções: 0 e 1.

8. Equação: $|\,2x^2 - x\,| = 5$.

9. Soluções:

(a) 1 e $1/3$;

(b) $\pm\sqrt{10}$;

(c) -8 e $-6/5$;

(d) Não tem solução.

10. Apenas a última afirmação é falsa.

11. (a) Falsa.
Contra-exemplo: tome $x = 1$ e $y = -1$.

(b) Falsa.
Contra-exemplo: tome $x = -1$.

(c) Falsa.
Contra-exemplo: tome $x = 0$ e $y = -1$.

(d) Falsa.
Contra-exemplo: tome $x = -2$.

12. (a) $2\,, 3/7\,, \pi \in (-2, 4)$.
$-\sqrt{5} \notin (-2, 4)$ pois $-\sqrt{5} < -2$.

(b) $2\,, \pi \in [1, 5]$.
$3/7\,, -\sqrt{5} \notin [1, 5]$.

(c) $3/7\,, 2\,, -\sqrt{5} \in [-3\,, 3)$.
$\pi \notin [-3\,, 3)$.

(d) $2\,, 3/7\,, -\sqrt{5} \in (-\infty, 2]$.
$\pi \notin (-\infty, 2]$.

13. No primeiro diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $1/10$. Portanto:
$y = -1 + 2/10 = -4/5$;
$x = 6/10 = 3/5$;
$z = 1 + 5/10 = 3/2$.

No segundo diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $\frac{0,1}{4} = 0{,}025$. Assim:
$y = 4{,}2 + 0{,}025 = 4{,}225$;
$x = 4{,}3 + 2 \times 0{,}025 = 4{,}35$;
$z = 4{,}5 - 0{,}025 = 4{,}475$.

14. No primeiro diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $3/10$. Portanto:
$-9/5 < y < -3/2$;
$21/10 < x < 12/5$;
$9/2 < z < 24/5$.

No segundo diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $\frac{0,2}{4} = 0{,}005$. Assim:
$1{,}95 < y < 2$;
$2{,}2 < x < 2{,}25$;
$2{,}45 < z < 2{,}5$.

15. No primeiro diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $3/10$. Portanto:
$y = -7 + 6/10 = -32/5$;
$x = -4 + 18/10 = -11/5$;
$z = -1 + 15/10 = 1/2$.

No segundo diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $\frac{0,1}{4} = 0{,}025$. Assim:
$y = -2{,}6 + 0{,}025 = -2{,}575$;
$x = -2{,}5 + 0{,}05 = -2{,}45$;
$z = -2{,}3 - 0{,}05 = -2{,}35$.

16. No primeiro diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $3/10$. Portanto:
$-19/5 < y < -7/2$;
$1/10 < x < 2/5$;
$5/2 < z < 14/5$.

No segundo diagrama o comprimento dos intervalos menores vale $\frac{0,1}{4} = 1/40$. Assim:
$-47/40 < y < -23/20$;
$-21/20 < x < -41/40$;
$-37/40 < z < -9/10$.

17. (a) $(-2\,,3)\cap[\,\sqrt{2}\,,4\,]=[\,\sqrt{2}\,,3\,)$.

(b) $(1\,,4)\cup(2\,,5\,]=(\,1\,,5\,]$.

(c) $(2\,,\sqrt{5}\,]-\{\,2\,,3\,,\sqrt{5}\,\}$
$=(\,2\,,3\,)\cup(\,3\,,\sqrt{5}\,)$.

(d) $\big\{(-2\,,3)\cup(5\,,8\,]\big\}\cap[\,2\,,6\,]$
$=[\,2\,,3\,)\cup(\,5\,,6\,]$.

18.

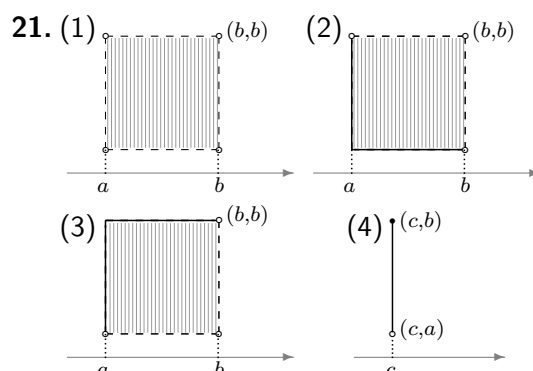
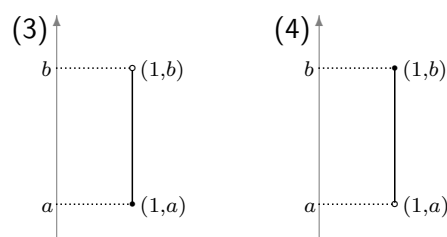
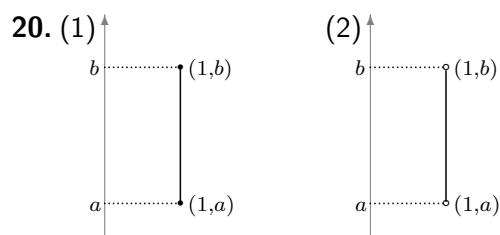
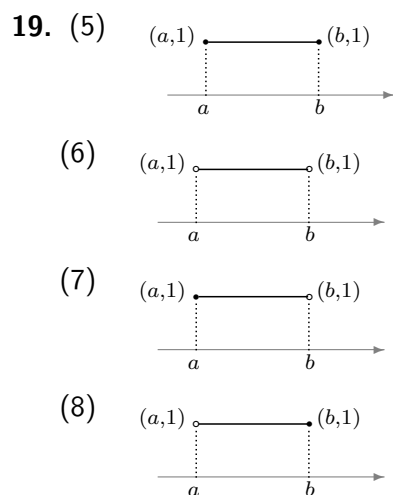
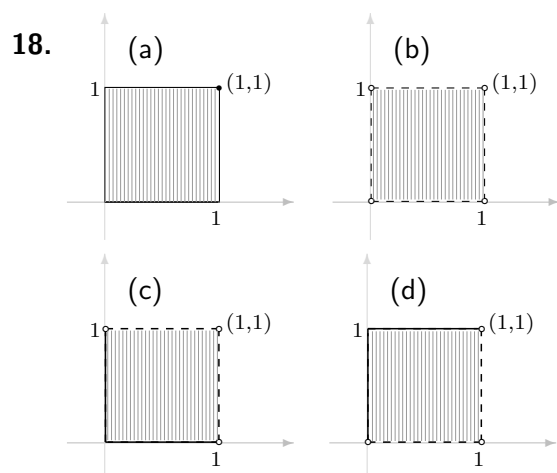
19. (5) $(a,1)$ $(b,1)$ a b

(6) $(a,1)$ $(b,1)$ a b

(7) $(a,1)$ $(b,1)$ a b

(8) $(a,1)$ $(b,1)$ a b

20.

21.

22. Equação: $|\,x^2-1\,|=5$.

Solução: $\pm\sqrt{6}$.

23. Equação: $|\,x\,|^3=8$.

Solução: ± 2.

24. $|\,x-2\,|<\sqrt{3}$.

25. $|\,x-\pi\,|<2\,|\,x-5\,|$.

26. $|\,x-\sqrt{2}\,|\geq 2\,|\,x-5\,|^2$.

27. Negação de "$>$" : $\leq$

Negação de "$\leq$" : $>$

Negação de "$\geq$" : $<$

28. Caso I: $b>0$.
Duas soluções distintas: $\pm b$.

Caso II: $b=0$.
Uma única solução: 0.

Caso III: $b<0$.
A equação não tem solução.

29. $|x| = b^2 \iff x = \pm b^2$.
A equação tem:
- duas soluções distintas quando $b \neq 0$, a saber: $\pm b^2$.
- uma única solução quando $b = 0$, a saber: 0.

30. $|x| = |b|+1 \iff x = \pm(|b|+1)$.

Portanto, a equação tem duas soluções distintas, independentemente do valor de $b \in \mathbb{R}$.

31. Caso I: $b = 0$.
Não tem solução.

Caso II: $b \neq 0$.
$x = \pm 1/|b|$.
Portanto, duas soluções distintas.

32. Caso I: $b = 0$.
Neste caso, todo número real é solução da equação. Em particular, a equação tem uma infinidade de soluções.

Caso II: $b > 0$.
A equação tem duas soluções distintas, a saber: ± 1.

Caso III: $b < 0$.
Não tem solução.

33. Sim.

34. Caso I: $a = 0$.
- Quando $|b| = |c|$, todo número real é solução.
- Quando $|b| \neq |c|$, não tem solução.

Caso II: $a \neq 0$.
Solução: $-\frac{b}{a} \pm \frac{|c|}{a}$.
Portanto, quando $a \neq 0$ temos os casos:
- $c = 0$: tem uma única solução.
- $c \neq 0$: tem duas soluções distintas.

35. Iguais.

36. $|x+2|^3 = 8$.

37. $I \cup J$ pode não ser um intervalo. Por exemplo, quando $I = [0,0]$ e $J = [1,1]$ resulta que $I \cup J = \{0,1\}$.

Por sua vez $I \cap J$ será um intervalo da reta.

No entanto, $I - J$ pode não ser um intervalo da reta. Exemplo: $I = [0,3]$ $J = (1,2)$ são tais que
$$I - J = [0,1] \cup [2,3].$$

38. $13/2$ e 11.

39. Equação: $|x-1| = |x-\pi|$.
A solução é o ponto médio entre 1 e π ou seja, $(1+\pi)/2$.

40. Seja I un intervalo não degenerado. Por definição, I contém pelo menos dois pontos. Dividiremos a prova em dois casos.

Caso I: *I é um intervalo limitado*.

Nesse caso, as extremidades de I são números reais distintos. Sejam a, b tais extremidades, com $a < b$. Assim, $(a,b) \subset I$ é um intervalo aberto não vazio e a prova desse caso está terminada.

Caso II: *I é um intervalo não limitado*.

Se $I = \mathbb{R}$ o intervalo $(0,1)$ é o intervalo procurado. Suponhamos então que I é um intervalo não limitado, distinto da reta. Nesse caso, I possui apenas uma extremidade, digamos a e, consequentemente, contém um intervalo da forma: $I \supset (-\infty, a)$ ou $I \supset (a, \infty)$. Nesse caso, I contém um intervalo da forma $(a-1, a)$ ou da forma $(a, a+1)$ e a prova do Caso II está terminada.

41. Quando $x \leq -2$ temos que:

- $|1+x| = -(1+x) = -1-x$;

- $|2+x| = -(2+x) = -2-x$.

Portanto,

$$\Big|1-|1+x|\Big| = |1+1+x| = |2+x| = -(2+x) = -2-x$$

quando $x \le -2$.

42. Para saber o valor da expressão basta conhecer os sinais de a , de b , e de c. Temos as seguintes possibilidades:

– Os três são positivos:
nesse caso o valor da expressão será $4\ (= 1+1+1+1)$;

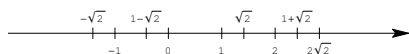
– Um é positivo e os outros dois são negativos:
nesse caso o valor da expressão será 0 ;

– Dois são positivos e um é negativo:
nesse caso o valor da expressão será 0 .

– Os três são negativos:
nesse caso o valor da expressão será -4 .

Portanto, os valores assumidos pela expressão são: ± 4 e 0 .

Lição 3

1. Usando um compasso obtemos a seguinte representação gráfica para os pontos dados no exercício.

2. (a) Equação: $x+4=-3$.
Resposta: -7.

(b) Equação: $2(x+1)=5$.
Resposta: $3/2$.

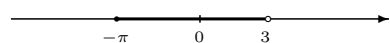
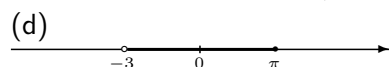
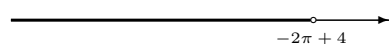
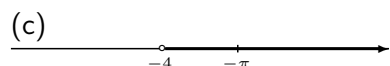
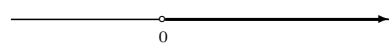
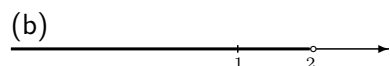
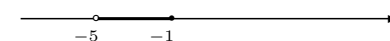
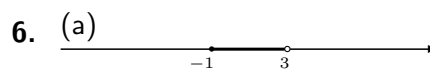
(c) Equação: $x+1{,}2=3$.
Resposta: $1{,}8$.

(d) Equação: $|\,2(x+7)+1\,|=3$.
Resposta: -6 e -9.

3. Simétricos em relação a -1:
- de 1 : -3 ;
- de 4 : -6 ;
- de $-\sqrt{3}$: $\sqrt{3}-2$;
- de -2 : 0 ;
- de π : $-\pi-2$.

4. Os pares: 1 e -7 ; 97 e -103 .
Note que o ponto médio deve ser 3 .

5. $b=2$.

6.

7. $-3 \pm \sqrt{5}$.

8. $-2{,}99$

9. $\sqrt{3}/3$.

10. Equação: $x-2=4(x+1)$.
Solução: -2 .

11. Equação: $|\,x - x^2\,| = |\,x - x^3\,|$.

Outra equação: $x = (x^3 + x^2)/2$.
Essa equação descreve o ponto médio entre x^2 e x^3.

12. Equação: $x + 1 = (x - 1)^2$.

13. (a) $-1/2$ e $3/2$.

(b) $-4/3$ e $2/3$.

(c) 4 e 8 .

(d) -10 e 2 .

14. Equação: $2(x - 2) > |\,x - 2\,|$.

15. $4 - x$.

16. $-3/2$.

17. Soluções:

(a) $(\,1\,,5\,)$;

(b) $(-4\,,2\,)$;

(c) $(-3\,,4\,)$;

(d) $(\,2\,,4\,)$.

18. Soluções:

(a) $(-\infty\,,2\,) \cup (\,4\,,\infty)$;

(b) $(-\infty\,,-7\,) \cup (\,3\,,\infty)$;

(c) $(-\infty\,,-5\,) \cup (-1\,,\infty)$;

(d) $(-\infty\,,1\,) \cup (\,1\,,\infty)$.

19. Soluções:

(a) $(-\infty\,,-2\,] \cup [\,4\,,\infty)$;

(b) $[-8\,,-2\,]$;

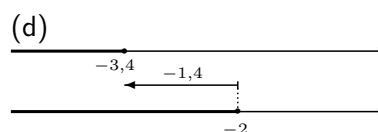
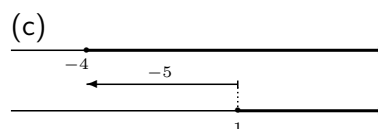
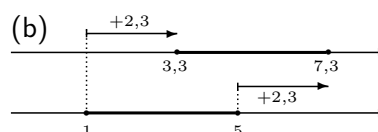
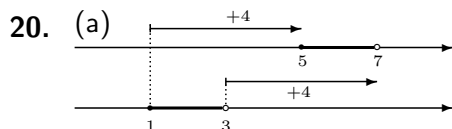
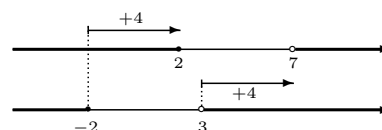
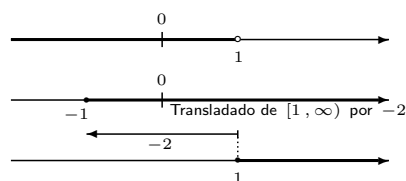
(c) $\{2\}$;

(d) $(-\infty\,,-1\,] \cup [\,2\,,\infty)$.

20. (a)

(b)

(c)

(d)

21. O número pertence ao conjunto $(-\infty\,,-2\,] \cup (\,3\,,\infty)$. Logo, seu transladado por 4 pertence ao conjunto acima transladado por 4 , como exibido na figura a seguir.

22. O número em questão pertence ao intervalo $[\,1\,,\infty)$. Seu transladado de -2 pertence ao intervalo $[-1\,,\infty)$. O número estará então no intervalo $(-\infty\,,1\,]$

23. $b \in (\,2\,,4\,]$.

(1) $b - 2 \in (\,0\,,2\,]$;

(2) $b + 3 \in (\,5\,,7\,]$;

(3) $-b \in [-4\,,-2\,)$;

(4) $2 - b \in [-2\,,0\,)$.

24. (a) $b \in (-\infty, -1]$:

(1) $b - 2 \in (-\infty, -3]$;

(2) $b + 3 \in (-\infty, 2]$;

(3) $-b \in [1, \infty)$;

(4) $2 - b \in [3, \infty)$.

(b) $b \in (0, \infty)$:

(1) $b - 2 \in (-2, \infty)$;

(2) $b + 3 \in (3, \infty)$;

(3) $-b \in (-\infty, 0)$;

(4) $2 - b \in (-\infty, 2)$.

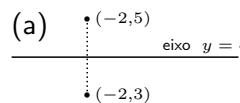
(c) $b \in [-2, 2) \cap (1, 3]$:

(1) $b - 2 \in [-4, 0) \cap (-1, 1]$;

(2) $b + 3 \in [1, 5) \cap (4, 6]$;

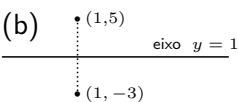
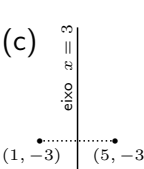
(3) $-b \in [-2, 2] \cap [-3, -1]$;

(4) $2 - b \in [0, 4] \cap [-1, 1]$.

(d) $b \in (-1, 2) - [0, 1) =$
$= (-1, 0) \cup [1, 2)$:

(1) $b - 2 \in (-3, -2) \cup [-1, 0)$;

(2) $b + 3 \in (2, 3) \cup [4, 5)$;

(3) $-b \in (0, 1) \cup (-2, -1]$;

(4) $2 - b \in (2, 3) \cup (0, 1]$.

25. (1) $a + b \in (0, 5)$;

(2) $a - b \in [-4, 1)$;

(3) $|a| + b \in (1, 5)$;

(4) $b - |a| \in (-1, 3]$;

(5) $|a| - 1 \in [-1, 1)$;

(6) $|a| - |b| = |a| - b \in [-3, 1)$.

26. (a) $x \in [-3, -2)$;

(b) $x \in (-2, 3]$;

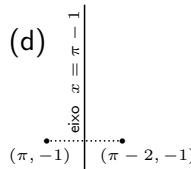
(c) $x \in (-\infty, -2]$;

(d) $x \in (-1, \infty)$.

27. (a) $(-2,5)$ eixo $y = 4$ $(-2,3)$

(b) $(1,5)$ eixo $y = 1$ $(1,-3)$

(c) eixo $x = 3$ $(1,-3)$ $(5,-3)$

(d) eixo $x = \pi - 1$ $(\pi,-1)$ $(\pi-2,-1)$

28. (a) $(6, 3)$;

(b) $(-3, -3)$;

(c) $(1, 2\pi + 3)$;

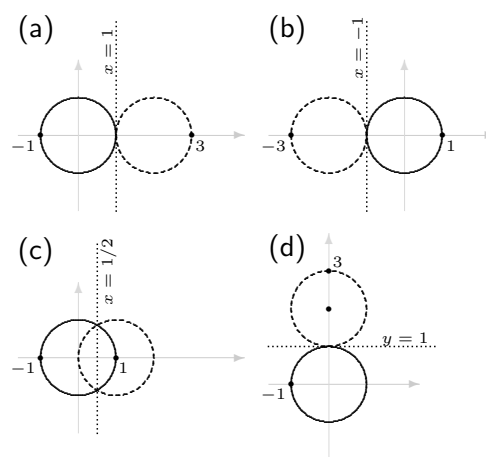
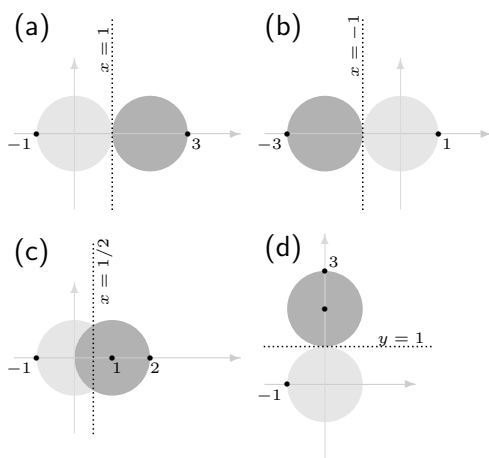
(d) $(\pi, 3)$.

29. $(2c - a, b)$.

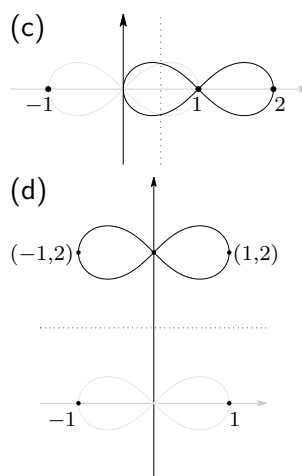
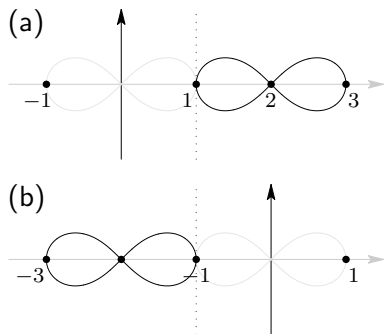
30. $(a, 2c - b)$.

31. Em cada item o círculo, simétrico do círculo dado, está esboçado com linha tracejada.

(a) (b)

(c) (d)

32. Os simétricos solicitados no problema estão em cor cinza mais escura.

Para provar que o disco definido pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$ não tem simetria em relação ao eixo $y = 1$, faremos o seguinte.

O ponto $(0,0)$ pertence ao disco em questão, pois $(0,0)$ satisfaz à inequação $x^2+y^2 \leq 1$, ou seja, $0^2+0^2 \leq 1$. Por outro lado, o simétrico de $(0,0)$ em relação ao eixo $y = 1$ é o ponto $(0,2)$ o qual não pertence ao disco, pois $(0,2)$ não satisfaz à inequação $x^2+y^2 \leq 1$, já que $0^2+2^2 = 4 \nleq 1$.

33. Repare que os pontos $(x, y) = (-1, 0)$ e $(x, y) = (1, 0)$ satisfazem a equação $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$, isto é, fazem parte da *figura oito*. Nos itens a seguir os refletidos são as figuras com traço mais escuro.

Para mostrar que a figura oito é simétrica em relação ao eixo $x = 0$, devemos mostrar que se (a, b) satisfaz a equação da curva, então o seu simétrico $(a, -b)$, em relação ao eixo $x = 0$, também a satisfaz.

Suponhamos então que (a, b) satisfaz à equação $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Assim,

$$(a^2 + b^2)^2 = a^2 - b^2 \quad (*)$$

Por outro lado, temos que:

$$(a^2 + (-b)^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 \quad \text{e}$$
$$a^2 - (-b)^2 = a^2 - b^2$$

Logo, segue de $(*)$ que

$$(a^2 + (-b)^2)^2 = a^2 - (-b)^2$$

mostrando assim que $(a, -b)$ também satisfaz a equação da curva em questão, como pretendíamos provar.

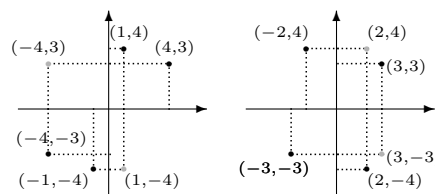
Para provar que a figura oito não tem simetria em relação ao eixo $x = 1$, faremos o seguinte.

O ponto $(0,0)$ pertence a curva em questão, pois $(0,0)$ satisfaz a equação $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, ou seja

$(0^2 + 0^2)^2 = 0^2 - 0^2$. No entanto, o simétrico de $(0,0)$ em relação ao eixo

$x = 1$ é o ponto $(2, 0)$, o qual não pertence a curva, pois $(2, 0)$ não satisfaz a equação da curva, já que $(2^2 + 0^2)^2 \neq 2^2 - 0^2$.

34. Os refletidos em relação a origem são, respectivamente: $(-1, -4)$, $(-4, -3)$, $(2, -4)$ e $(3, 3)$.

Os pontos marcados com cor mais clara são pontos intermediários que facilitam o processo de reflexão em relação à origem.

Lição 4

1. (a) $2x^2 - x$.

(b) $x - x|x| + 1$.

(c) $1 - x^3 + x^2$.

(d) $1 + x - 2x^2 - 2x^3$.

2. (a) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

(b) $z^2(2z - 3)$.

(c) $(x - 1)(x - 2)$.

(d) $|x|(x + 1)(x - 1)$.

3. (a) $(3x - 2)^2$.

(b) $(x^2 + 1)^2$.

(c) $\left(\sqrt[3]{2}\, z + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}\, z^2 - \sqrt[3]{6}\, z + \sqrt[3]{9}\right)$.

(d) $(1 - 2t)(1 + 2t + 4t^2)$.

(e) $(|x| - 1)(x^2 + |x| + 1)$.

4. Usando a distributividade obtemos as parcelas:
$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x$ e
$-ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4$,
cuja soma vale $x^4 - a^4$.

5. Usando a distributividade obtemos as parcelas:
$x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x$ e
$-ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5$,
cuja soma vale $x^5 - a^5$.

6. Seja $a \in \mathbb{R}$. Inspirado no exercício anterior, vamos provar que
$x^7 - a^7 =$
$= (x - a)(x^6 + ax^5 + \cdots + a^5x + a^6)$.
Note que a soma dos expoentes no segundo fator à direita da igualdade vale sempre 6.

A prova é similar às duas últimas que fizemos.

7. As igualdade obtidas nos três últimos exercícios, nos levam a seguinte conjectura:
$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $a, x \in \mathbb{R}$.

Note que a soma dos expoentes no segundo fator à direita da igualdade vale sempre $n - 1$.

Usando a distributividade, obtemos as parcelas:
$x^n + ax^{n-1} + \cdots + a^{n-1}x$ e
$-ax^{n-1} - \cdots - a^{n-1}x - a^n$
cuja soma vale $x^n - a^n$.

Note que nas parcelas acima a soma dos expoentes é sempre n.

8. Trocando a por $-a$ na referida igualdade, obtemos:

$x^4-(-a)^4 = \big(x-(-a)\big)\big(x^3+(-a)x^2+(-a)^2x+(-a)^3\big)$.

Simplificando, obtemos:
$x^4 - a^4 = (x+a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3)$
como pretendíamos provar.

9. Trocando a por $-a$ na referida igualdade, obtemos:
$x^5-(-a)^5 = \big(x-(-a)\big)\big(x^4+(-a)x^3+(-a)^2x^2+(-a)^3x+(-a)^4\big)$.

Simplificando, obtemos:
$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$
como pretendíamos provar.

10. Inspirado nos dois últimos exercícios, faremos o seguinte.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Trocando a por $-a$ na identidade obtida na solução do exercício 7, teremos:

Caso I: n par.
$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$.

Caso II: n ímpar.
$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \cdots + a^{n-3}x^2 - a^{n-2}x + a^{n-1})$.

Note que em ambos os casos temos uma alternância de sinais entre as parcelas do segundo fator à direita do sinal de igual.

11. $(a+b)^3-(a-b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3) = 6a^2b+2b^3 = = 2b(3a^2+b^2)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Trocando a por b na expressão do exercício anterior, obtemos:
$(b+a)^3-(b-a)^3 = 2a(3b^2+a^2)$. Donde concluímos que:
$(a+b)^3 + (a-b^3) = 2a(3b^2+a^2)$.

13. (a) $225/8$.
(b) $209/50$.
(c) $1510/11$.
(d) $1/(3000\pi)$.
(e) $509/264$.

14. (a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{2}-1)$.
(b) $-\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{10}}{3}$.
(c) $\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$.
(d) $2\,(5+2\sqrt{6})$.

15. $\frac{(2+\sqrt{3})^2(3-\sqrt{3})^2}{6}$.

16. $-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(3-\sqrt{2})(7-4\sqrt{3})$.

17. (a) $\frac{41(4-\sqrt{3})}{12\pi}$.
(b) $7(5+\sqrt{5})/8$.
(c) $\frac{\sqrt{3}-2}{(\pi+1)^2}$.
(d) $-\pi^2$.

18. (a) 10 .
(b) $\pi/15$.
(c) $-\sqrt{6}$.
(d) -9 .

19. $\dfrac{ab(a+b)}{a^3-b^3}$.

20. Não. A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: tome $a = 1 = b$ e $c = 2$. O membro esquerdo da igualdade vale 2 e o direito vale $1/2$.

21. (7) Verdadeira.
O que justificatica é a propriedade:
$\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b, c \neq 0$.
(8) Falsa.
Pois, $\frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{2+1}$.

(9) Falsa.
Pois, $\frac{2}{1} \neq \frac{2-2}{1-2}$.

(10) Falsa.
Pois, $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b, c \neq 0$.

22. $\frac{\text{raio da circunferência maior}}{\text{raio da circunferência menor}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

23. Soluções:

(a) $1/2$, 3 e -3 .

(b) 2 , -2 e 3 .

(c) 0 , ± 2 , -1 e 3 .

(d) ± 2 .

24. Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
& a^4 = 1 \\
\iff \quad & a^4 - 1 = 0 \\
\iff \quad & (a^2-1)(a^2+1) = 0 \\
\iff \quad & a^2 = 1 \quad \text{ou} \quad a^2 = -1 \\
\iff \quad & a^2 = 1 \\
\iff \quad & a = 1 \quad \text{ou} \quad a = -1 .
\end{aligned}
$$

25. Equação: $x^4 = b$ onde $b \in \mathbb{R}$.

Solução:

Caso I: $b > 0$.
$x^4 = b \iff \left(\frac{x}{\sqrt[4]{b}}\right)^4 = 1$
$\iff \frac{x}{\sqrt[4]{b}} = \pm 1$
$\iff x = \pm \sqrt[4]{b}$.
Nesse caso a equação tem duas soluções distintas.

Caso II: $b = 0$.
$x^4 = 0 \iff x = 0$.
Nesse caso a equação tem uma única solução.

Caso III: $b < 0$.
Nesse caso a equação $x^4 = b$ não tem solução pois nenhum número real, elevado a quarta potência, produz um número negativo (regra dos sinais).

26. Não, ela se anula em $x = -1$.

27. Multiplicando $x^2 + x + 1$ por x^3 e 1 obtemos, respectivamente:
$x^5 + x^4 + x^3$ e $x^2 + x + 1$
que somados nos fornece a expressão
$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
provando a primeira parte do exercício.

Agora, fatorando $x^3 + 1$ obtemos a identidade:
$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$
$= (x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Agora, resta ver que as expressões
$$x^2 + x + 1 \quad \text{e} \quad x^2 - x + 1$$
são sempre positivas.

Para fazer isso, você pode usar o que você aprendeu sobre o sinal do trinômio do segundo grau: o discriminante desses dois trinômios é negativo e o termo independente é positivo. Logo, os dois trinômios são sempre positivos.

Se você não se lembra disso, podemos resolver o problema da seguinte forma.

Análise do sinal de $x^2 + x + 1$:

Caso I: $x \leq -1$.
Nesse caso $x^2 + x \geq 0$.
Logo, $x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$.

Caso II: $-1 < x < 0$.
Nesse caso, $x + 1 > 0$ e $x^2 > 0$.
Logo, $x^2 + x + 1 > 0$.

Caso III: $x \geq 0$.
Nesse caso, $x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$ pois $x^2 \geq 0$.

Portanto, $x^2 + x + 1$ é sempre positivo.

Análise do sinal de $x^2 - x + 1$:

Caso I: $x \leq 0$.
Nesse caso $x^2 \geq 0$ e $-x \geq 0$.
Logo, $x^2 - x + 1 \geq 1 > 0$.

Caso II: $0 < x < 1$.
Nesse caso, $-x + 1 > 0$ e $x^2 > 0$.
Logo, $x^2 - x + 1 > 0$.

Caso III: $x \geq 1$.
Nesse caso, $x^2 - x \geq 0$. Consquentemente, $x^2 - x + 1 \geq 1 > 0$.

Portanto, $x^2 - x + 1$ é sempre positivo.

Agora, podemos responder que o sinal da expressão $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ é o sinal de $x + 1$, ou seja:

- é negativa quando $x < -1$;
- se anula em $x = -1$;
- é positiva quand $x > -1$.

28. Fatorando as expressões obtemos:

(a) $2x^3 - 1 = \left(\sqrt[3]{2}\,x\right)^3 - 1 = \left(\sqrt[3]{2}\,x - 1\right)\left(\sqrt[3]{4}\,x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + 1\right)$.

(b) $8 - |z|^3 = 2^3 - |z|^3 = (2 - |z|)(z^2 + 2|z| + 4)$.

(c) $1 - x^7 = (1 - x)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

(d) $z^8 - 1 = (z - 1)(z^7 + z^6 + \cdots + z^2 + z + 1)$.

(e) $x^7 - x = x(x^6 - 1) = x(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$.

29. (a) $(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}\sqrt{x} = 1 - x$ para todo $x \geq 0$.

(b) $1 - |x| = 1 - \left(\sqrt{|x|}\,\right)^2 = \left(1 - \sqrt{|x|}\,\right)\left(1 + \sqrt{|x|}\,\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $x - 1 = \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1\right) = \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

30. Sejam $a, b > 0$. Temos que:

$$(a - b)^2 > 0 \iff a \neq b.$$

Portanto, desenvolvendo a desigualdade acima, concluímos que:

- $a^2 + b^2 > 2ab \iff a \neq b$;
- $a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b$.

Agora, trocando a por $\sqrt{a}$ e b por $\sqrt{b}$ obtemos:

- $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \iff a \neq b$;
- $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \iff a = b$.

Respondendo às duas perguntas colocadas:

(i) a média aritmética entre dois reais positivos é maior que a média geométrica desse números sempre que os números são distintos;

(ii) a média aritmética entre dois reais positivos é igual a média geométrica desse números sempre que os números são iguais.

31. Sejam $a, b \geq 0$. Temos que: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \iff a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \iff 2ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.

32. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \iff$
$\iff a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2}$
$\iff 2\,|a|\,|b| = 0$
$\iff a = 0$ ou $b = 0$.

33. Sejam $a, b > 0$. Temos que:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab > a^2 + b^2$ pois $2ab > 0$.

Logo, $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$ ou seja, $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$.

34. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$\left(|a| + |b|\right)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b| \geq a^2 + b^2$ pois $2|a||b| \geq 0$.

Logo, $|a| + |b| \geq \sqrt{a^2+b^2}$ como pretendíamos provar.

35. Sejam $a, b \geq 0$. Assim,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq a^3 + b^3$$

pois $3a^2b\,,\ 3ab^2 \geq 0$.

Portanto, $a + b \geq \sqrt[3]{a^3+b^3}$ isto é,

$$\sqrt[3]{a^3+b^3} \leq a + b\,.$$

36. Sejam $a, b \geq 0$. Trocando a por $\sqrt[3]{a}$ e b por $\sqrt[3]{b}$ na desigualdade acima, obtemos:

$$\sqrt[3]{a+b} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\,.$$

37. Sejam $a, b \geq 0$.

(i) Vamos provar que $\sqrt[4]{a^4+b^4} \leq a+b$.

Temos que:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \geq a^4 + b^4$$

pois, $4a^3b\,,\ 6a^2b^2\,,\ 4ab^3 \geq 0$.

Portanto, $a^4 + b^4 \leq (a+b)^4$ e, consequentemente, obtemos:

$$\sqrt[4]{a^4+b^4} \leq a + b \quad \text{quando} \quad a, b \geq 0\,.$$

(ii) Vamos provar que

$$\sqrt[4]{a+b} \leq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\,.$$

Trocando por a por $\sqrt[4]{a}$ e b por $\sqrt[4]{b}$ no item (i), concluiremos que:

$$\sqrt[4]{a+b} \leq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\,.$$

Lição 5

1. (a) Não é decimal.

(b) $\frac{101}{15} = \frac{101}{3\times5}$ não é decimal pois 101 não é divisível por 3.

(c) $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ é decimal.

(d) $-\frac{4}{25} = -\frac{4}{5^2}$ é decimal.

(e) $\frac{122}{125} = \frac{122}{5^3}$ é decimal.

(f) $\frac{321}{152} = \frac{321}{2^3\times19}$ não é decimal pois 321 não é divisível por 19.

2. (a) $\frac{2.211}{1.000}$.

(b) $\frac{223}{1.000}$.

(c) $-\frac{3}{2\times5^3}$.

(d) $-\frac{16.061}{5\times10^3}$.

(e) $\frac{11.121}{1.000}$.

(f) $\frac{22.213}{10^4}$.

3. (a) $0{,}023$.

(b) 223.

(c) $-0{,}0321$.

(d) 11121.

4. (a) $\frac{2298}{9\times11}$.

(b) $\frac{733}{3\times10\times111}$.

(c) $-\frac{5348}{3\times5\times111}$.

(d) $\frac{1.101.031}{9\times11\times10^3}$.

(e) $\frac{1123}{10^6}$.

(f) $-\frac{220.992.793}{9\times111\times10^5}$.

5. (a) $4/25$.

(b) $1/81$.

(c) $7505/3$.

6. $k = 3$.

7. (a) $101/33$.

(b) $8/9$.

(c) $30/11$.

(d) $2\sqrt{10}/3$.

(e) $(19/9)^2$.

8. (a) $0{,}00002312$.

(b) $237{,}6 \times 10^{-7}$.

(c) $212358903400000 \times 10^{-10}$.

(d) $0{,}0001000213879457001 \times 10^{15}$.

(e) $101015{,}5$.

9. $1{,}6482758620689655172413793 10\,\overline{344...}$

onde $\overline{344...}$ representa a parte periódica e vale

$\overline{344...} = \overline{3448275862068965517241379310}$.

10. (a) Notação científica: $3{,}2626 \times 10^{-1}$.
Ordem de grandeza: 10^{-1}.

(b) Notação científica: $1{,}123 \times 10^{-2}$.
Ordem de grandeza: 10^{-2}.

(c) Notação científica:
$2{,}10010022 \times 10^{-3}$.
Ordem de grandeza: 10^{-3}.

(d) Notação científica: $2{,}111 \times 10^{2}$.
Ordem de grandeza: 10^{2}.

(e) Notação científica: $1{,}4 \times 10^{2}$.
Ordem de grandeza: 10^{2}.

(f) Notação científica: $2{,}3737$.
Ordem de grandeza: 10^{0}.

11. (a) $3{,}3 \times 10^{3}$.

(b) $1{,}224 \times 10^{-3}$.

(c) $1{,}05005011 \times 10^{11}$.

(d) $1{,}2666 \times 10$.

(e) $9{,}8 \times 10^{-12}$.

(f) $1{,}18685 \times 10^{-7}$.

12. $1{,}6 \times 10^{13}$.

13. (a) $0{,}\overline{285714}$.

(b) $-0{,}\overline{714285}$.

(c) $0{,}6\overline{12}$.

(d) $2{,}\overline{09}$.

(e) $-1{,}\overline{01}$.

(f) $1{,}91\overline{6}$.

Lição 6

1. Todas as afirmações são verdadeiras.

2. (a) Falsa.
Contra-exemplo: tome $x = 0 = y$.

(b) , (c) e (d) são verdadeiras.

3. Todas as afirmações são verdadeiras.

4. Todas as afirmações são falsas.

5. (a) Estimativa para o perímetro p, em cm:

$$35{,}96 < p < 37{,}76 .$$

(b) Estimativa para a área A, em cm^2:

$$104{,}284 < A < 111{,}392 .$$

6. Todas as afirmações são verdadeiras.

7. (a) $4{,}0 < \sqrt[4]{8} + \sqrt{6} < 4{,}3$;

(b) $0{,}7 < 2\sqrt[4]{8} - \sqrt{6} < 1{,}2$;

(c) $-3{,}4 < \sqrt[4]{8} - 2\sqrt{6} < -3$;

(d) $3{,}84 < \sqrt[4]{8} \times \sqrt{6} < 4{,}5$;

(e) $\frac{5}{9} < \frac{1}{\sqrt[4]{8}} < \frac{5}{8}$ e

$\frac{2}{5} < \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{5}{12}$;

(f) $\frac{43}{45} < \frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{25}{24}$;

(g) $-\frac{5}{18} < \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \frac{2}{\sqrt{6}} < -\frac{7}{40}$;

(h) $\frac{4}{3} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{8}} < \frac{25}{16}$.

8. $\frac{651}{130} < v < \frac{3472}{625}$.

9. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Temos que:

$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$.

Logo,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

10. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Temos que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$$

e isso mostra que a desigualdade inicial é verdadeira.

Por outro lado, temos que:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n+1}{n}} > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n+1 > n$$

e isso finaliza a prova da desigualdade.

11. A desigualdade é verdadeira somente para $n = 1, 2, 3$ e 4.

12. $-13 \leq 2 - 3b \leq 8$.

13. $-6 < b^2 - 2b < 21$.

14. $2 \leq x^2 + 1 \leq 10$.

15. $1 < \frac{1}{b} < 3$.

16. (a) $\frac{9}{4} < \lambda^2 < \frac{49}{4}$;

(b) $\frac{4}{49} < \frac{1}{\lambda^2} < \frac{4}{9}$;

(c) $\frac{1}{2} < |1 - \lambda| < \frac{5}{2}$;

(d) $-2 < \frac{1}{1-\lambda} < -\frac{2}{5}$.

17. (a) $1{,}481544 < V < 1{,}520875$ em cm^3;

(b) $7{,}7976 < A < 7{,}9350$ em cm^2;

18. (a) $1{,}331\frac{4\pi}{3} < V < 1{,}728\frac{4\pi}{3}$ em cm^3;

(b) $4{,}84\,\pi < A < 5{,}76\,\pi$ em cm^2;

19. (a) $16{,}54191\,\pi < V < 17{,}22368\,\pi$ em cm^3;

(b) $24{,}9942\,\pi < A < 25{,}6128\,\pi$ em cm^2;

20. $16{,}54191\frac{\pi}{3} < V < 17{,}22368\frac{4\pi}{3}$ em cm^3.

21. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a + 2b > 5\,^*$ e $b - a < 2$. Assim, $a - b > -2\,^{**}$. Somando (*) com (**) obtemos $2a+b > 3$. Por outro lado, somando (*) com 2 vezes (**) obtemos $3a > 1$ e consequentemente, $a < 1/3$.

22. (a) $c > 0$;

(b) $c - 2a > 0$;

(c) $c^2 - a^2 - b^2 > 0$;

(d) $3a - b - c < 0$.

23. (a) $n = -1, 0, 1$;

(b) $n \neq 0, 1, 2$;

(c) $n = 0, 1, 2, 3$;

(d) $n \neq 0, 1, 2, 3$.

24. (a) $4 < \sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 5$;

(b) $4 < \sqrt{8} + \sqrt{3} < 5$;

(c) $1 < \sqrt{11} - \sqrt{2} < 2$;

(d) $1 < \sqrt{15} - \sqrt{5} < 2$.

Lição 7

1. (a) $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

(d) $\mathbb{R}$

(e) $(\infty\,,1/2) \cup (1/2\,,\infty)$

(f) $(-\infty\,,-\sqrt{2}\,) \cup (-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,) \cup$
$\cup (\sqrt{2}\,,\infty)$.

2. $(\infty\,,-2\,) \cup (-2\,,0\,) \cup (\,0\,,\infty)$.

3. (1) $x^2 - x = x^2\big(1 - \frac{1}{x}\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(2) $x^2 - x = (x-1)x$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $2x^5 - x^3 + x + 2 = x^5\big(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5}\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(4) $x - 2x^3 + x^5 - x^7 =$
$= -x^4\big(-\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} - x + x^3\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(5) $2x^6 - x^3 + x^2 + 2 =$
$= -x^6\big(-2 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^6}\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x+1)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(7) $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 =$
$= \frac{1}{x^3}\big(\frac{1}{x} - x + 3x^2 - 2x^3\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

4. Caso I: $x \geq 0$.
Neste caso temos que:
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$.

Caso II: $x \in (-\infty\,,-1\,]$.
Neste caso temos que:
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$
$= \underbrace{x^3(x+1)}_{\geq 0} + \underbrace{x(x+1)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0.$

Caso III: $x \in (-1\,,0\,)$. Neste caso temos que:
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$
$= x^4 + x^2\underbrace{(x+1)}_{>0} + \underbrace{(x+1)}_{>0} > 0$

demonstrando o que pretendíamos.

5. Fatorando a expressão dada, obtemos:
$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

No exercício anterior mostramos que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $x^5 - 1$ se anula se, e somente se, $x = 1$.

6. É dado que $b \in \mathbb{R}$. Vamos considerar dois casos.

Caso I: $b \neq 0$.
Neste caso temos:
$x^5 = b \iff \big(x/\sqrt[5]{b}\big)^5 = 1 \iff$
$\iff \frac{x}{\sqrt[5]{b}} = 1 \iff x = \sqrt[5]{b}$.

Caso II: $b = 0$.
Neste caso a equação toma a forma:
$x^5 = 0 \iff x = 0$.

Mostramos assim que a equação dada tem uma única solução, a saber, a solução $x = \sqrt[5]{b}$.

7. (a) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Além disso:
$\frac{2}{x^2} - 9 = \big(\frac{\sqrt{2}}{x}\big)^2 - 3^2 = \big(\frac{\sqrt{2}}{x} - 3\big)\big(\frac{\sqrt{2}}{x} + 3\big)$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(b) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Além disso:
$\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} - 1 = \big(\frac{1}{x} - 1\big)^3$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(c) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Além disso:
$1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^6} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^3$
para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(d) Domínio: $(0, \infty)$.

Além disso:
$\frac{4}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 =$
$= \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$
para todo $x > 0$.

8. (a) Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Além disso,
$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A-B)x+A+B}{1-x^2}$
para todo $x \neq \pm 1$.

(b) Domínio: $\mathbb{R} - \{-2/3, 5/2\}$.

Além disso,
$\frac{A}{2x-5} - \frac{B}{2+3x} = \frac{(3A-2B)x+2A+5B}{(2x-5)(2+3x)}$
para todo $x \neq 5/2, -2/3$.

(c) Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Além disso,
$\frac{x}{4-x^2} - \frac{B}{x-2} = \frac{(1+B)x+2B}{(2-x)(2+x)}$
para todo $x \neq \pm 2$.

(d) Domínio: $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Além disso,
$\frac{Ax}{2x-x^2} + \frac{B}{3x} = \frac{(3A-B)x+2B}{3x(2-x)}$
para todo $x \neq 0, 2$.

(e) Domínio: $\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$.

Além disso,
$\frac{Ax+1}{x^3-x} + \frac{x-B}{3x} = \frac{x^3-Bx^2+(3A-1)x+B+3}{3x(x^2-1)}$
para todo $x \neq 0, \pm 1$.

(f) Domínio: $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Além disso,
$\frac{x^2-4}{2x-x^2} + \frac{B}{x} = \frac{B-x-2}{x}$
para todo $x \neq 0, 2$.

9. Domínio: $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

Além disso,
$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} = 2x+1$
para todo $x \neq 0, -1$.

10. Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}, 0\}$.

Além disso,
$\frac{1}{x+\frac{3}{x-\frac{2}{x}}} = \frac{x(x^2+1)}{x^2-2}$
para todo $x \neq \pm\sqrt{2}, 0$.

11. Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm 1, 0\}$.

Além disso,
$\frac{1}{x-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} - \frac{1}{x+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{x^3}$
para todo $x \neq \pm 1, 0$.

12. (a) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
Pontos onde se anula: $-2/3$.

Além disso,
$\frac{2}{x} + 3 = \frac{2+3x}{x}$
para todo $x \neq 0$.

(b) Domínio: $\mathbb{R}$.
Pontos onde se anula: 0 e 2.

Além disso,
$\frac{2x-x^2}{1+x^4} = \frac{x(2-x)}{1+x^4}$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Domínio: $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.
A expressão não se anula.

Além disso,
$\frac{x-1}{x-x^2} = -\frac{1}{x}$
para todo $x \neq 1, 0$.

(d) Domínio: $\mathbb{R} - \{0, 4\}$.
A expressão não se anula.

Além disso,
$\frac{2}{x^2-4x} = -\frac{2}{x(x-4)}$
para todo $x \neq 4, 0$.

(e) Domínio: $[0, 1/2) \cup (1/2, \infty)$.
Pontos onde se anula: 0.

Além disso,
$\frac{x}{1-\sqrt{2x}} = \frac{x(1+\sqrt{2x})}{1-2x}$
para todo $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, \infty)$.

(f) Domínio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
A expressão não se anula: 0.

Além disso,
$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}-x} = -x(x+\sqrt{x^2-1}\,)$

para todo $x \in (-\infty\,,-1\,] \cup [\,1\,,\infty)$.

Lição 8

1. Todos são racionais. Escrevendo-os na forma de uma fração irredutível, temos:

(a) $\sqrt{0{,}81} = 9/10$.

(b) $0{,}402 = \frac{201}{2^2\times 5^3}$ que está na forma irredutível pois 2 e 5 não dividem 201.

(c) $5/7$.

(d) $\frac{5}{4{,}2} = \frac{5^2}{21}$ que está na forma irredutível pois 5 não divide 21.

(e) $\frac{0{,}34}{1{,}27} = \frac{2\times 17}{127}$ que está na forma irredutível pois 2 e 17 não dividem 127.

(f) $\frac{0{,}003}{1{,}002} = 1/334$.

(g) $0{,}21 = \frac{3\times 7}{100}$ que está na forma irredutível pois 3 e 7 não dividem 100.

(h) $\frac{0{,}1}{2{,}1} = \frac{1}{21}$.

(i) $\sqrt{0{,}49} = 7/10$.

2. Seja $a \in \mathbb{Q}^+$. Temos que:

$$\left(\sqrt{a}+\tfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(1+\tfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{a}}\right) =$$
$$= a+2+\tfrac{1}{a}+1-\tfrac{1}{a} = a+3 \in \mathbb{Q}^+$$

e a prova está terminada.

3. Temos 3 racionais nestas condições.

4. Temos 18 racionais nestas condições.

5. Não. O número racional 3 não pode ser colocado na forma $7/n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Se o fosse, teríamos:

$$\tfrac{7}{n} = 3 \iff n = \tfrac{7}{3}$$

o que nos dá uma contradição já que $n \in \mathbb{Z}$.

6. Sim. Para provar isso, seja $a \in \mathbb{Q}^*$. Note que:

$$a = \frac{9}{9\times\frac{1}{a}}\,.$$

Logo, $a = \frac{9}{b}$ onde $b = 9\times\frac{1}{a}$ é um racional.

7. Temos um único inteiro n nesta condição, a saber, $n = 5$.

8. Lembre-se que b tem que ser positivo e, além disso, temos:

$\frac{2}{b} < 0{,}5 < \frac{3}{b} \iff \frac{2}{b} < \frac{1}{2} < \frac{3}{b}$
$\iff 4 < b < 6\,.$

Portanto, existe uma infinidade de racionais positivos nas condições impostas. Por exemplo, os racionais da forma $4+\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}^+$ satisfazem a condição

$4 < 4+\frac{1}{n} < 6$ e consequentemente, satisfazem a condição $\frac{2}{4+\frac{1}{n}} < 0{,}5 < \frac{3}{4+\frac{1}{n}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. Note que:

$0{,}5 < \frac{3}{|n|} \iff \frac{1}{2} < \frac{3}{|n|}$
$\iff |n| < 6\,.$

Portanto, existem 13 inteiros nas condições propostas.

10. 14 no numerador e 9 no denominador.

11. (a) $3\sqrt{2}$ é irracional pois é o produto de um racional não nulo (o número 3) por um irracional (o número $\sqrt{2}$).

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ é irracional, em virtude da regra usada no item anterior.

(c) $\sqrt{2} - 5$ é irracional pois é a diferença entre um irracional (o número $\sqrt{2}$) e um racional (o número 5).

12. (a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ é irracional pois é o produto de um racional não nulo (o número $2/3$) por um irracional (o número $\sqrt{3}$).

(b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 1/2$ que é racional.

(c) Suponhamos que $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ é racional. Então, existem inteiros positivos $p\,,q$ tais que $\sqrt{6} + \sqrt{5} = p/q$, isto é, $\sqrt{6} = \frac{p}{q} - \sqrt{5}$. Elevando ao quadrado, obtemos: $6 = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{5} + 5$. Portanto, $\sqrt{5} = \frac{q}{2p}\big(\frac{p^2}{q^2} - 1\big)$, ou seja, concluímos que $\sqrt{5}$ é racional, o que é um absurdo. Logo, $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ não é racional.

(d) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$ que não é racional.

(e) Suponhamos que $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ é racional. Então, existem inteiros positivos $p\,,q$ tais que $\sqrt{5} - \sqrt{3} = p/q$, isto é, $\frac{p}{q} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$. Elevando ao quadrado, obtemos: $\frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{q}\sqrt{3} + 3 = 5$. Portanto, $\sqrt{3} = \frac{q}{2p}\big(\frac{p^2}{q^2} - 2\big)$, ou seja, concluímos que $\sqrt{3}$ é racional, o que é um absurdo. Logo, $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ não é racional.

(f) $\frac{\pi^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\pi^2} = -1$ que é racional.

13. (1) Verdadeira, pois o produto de um racional não nulo por um irracional é sempre irracional.

(2) Falsa. Tomando $a = 1/\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$ temos que $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}$.

(3) Verdadeira, pois é a soma de um racional (no caso, o número $a \in \mathbb{Z}^*$) com um irracional (no caso, o número $b\sqrt{2}$ onde $b \in \mathbb{Z}^*$).

(4) Falsa. Tomando $a = 1 \in \mathbb{R}^*$ e $b = 1/\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$ resulta que:

$$a - b\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}.$$

(5) Falsa. Para $a = -\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $b = \pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ resulta que

$$a + b = -\pi + \pi = 0 \in \mathbb{Q}.$$

14. (a) Falsa. Agora, vamos provar que a afirmação é falsa.

Para isso, suponha que $k > 0$ é um irracional cuja raiz quadrada é racional. Assim, existem $p\,,q \in \mathbb{Z}^*$ tais que:

$$\sqrt{k} = p/q \;\Rightarrow\; k = p^2/q^2 \;\Rightarrow\; k \in \mathbb{Q}$$

que é falso, por hipótese. Logo, a raiz quadrada de um irracional positivo é irracional.

(b) Falso. Pois se $k = p/q$ com $p\,,q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ então, $k^3 = p^3/q^3$. Logo, k^3 também é quociente de dois inteiros.

(c) Vimos uma regra nesta lição que garante que a raiz cúbica de um irracional positivo é irracional. Logo, a afirmação é verdadeira.

(d) Falsa, pois $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

15. São distintos. No entanto, a diferença D entre o primeiro e o segundo satisfaz:

$$2{,}953 \times 10^{-9} < D < 2{,}954 \times 10^{-9}$$

ou seja, é da ordem de 10^{-9}.

16. (a) O conjunto $\big\{2 + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{Z}^*\big\}$ possui uma infinidade de elementos, todos eles são racionais e $2 < 2 + \frac{1}{n} < 3$.

(b) Temos que:
$2{,}0000001 = 2 + 0{,}0000001 = 2 + 10^{-7}$.

O conjunto $\left\{2+\frac{10^{-7}}{n}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*-\{1\}\right\}$ possui uma infinidade de elementos, todos eles são racionais e

$$2<2+\tfrac{10^{-7}}{n}<2+10^{-7}.$$

17. (a) Note que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional e $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$.

O conjunto $\left\{2+\frac{\sqrt{2}}{2n}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*\right\}$ possui uma infinidade de elementos, todos eles são irracionais e

$$2<2+\tfrac{\sqrt{2}}{2n}<2+\tfrac{1}{n}<3$$

quando $n>1$.

(b) Vimos que $2{,}0000001=2+10^{-7}$. Além disso, temos que:

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}\times 10^{-7}<10^{-7}.$$

Assim, o conjunto

$$\left\{2+\tfrac{\sqrt{2}}{2n}\times 10^{-7}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*\right\}$$

possui uma infinidade de elementos, todos eles são irracionais e

$$2<2+\tfrac{\sqrt{2}}{2n}\times 10^{-7}<2+10^{-7}$$

uando $n\geq 1$.

18. Seja b um real positivo. Sabemos que existe $p\in\mathbb{Z}^+$ tal que $p>\frac{1}{b}$. Essa é a propriedade *arquimediana* dos números reais.

Assim, $\frac{1}{p}<b$. Logo, $\frac{1}{n\pi p}<b$ e, portanto, o conjunto

$$\left\{\tfrac{1}{n\pi p}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*\right\}\subset(0\,,b)$$

e tem uma infinidade de elementos, todos eles irracionais. Note que $\frac{1}{n\pi p}$ é o produto do racional $\frac{1}{np}$ pelo irracional $1/\pi$.

19. Sejam $0<a<b$. Assim, $b-a>0$. Agora, tome $p\in\mathbb{Z}^*$ tal que $p>\frac{1}{b-a}$, ou seja, $\frac{1}{p}<b-a$. Nesse caso,

$$a+\tfrac{1}{p}<a+b-a=b$$

ou seja, $a+\frac{1}{p}\in(a\,,b)$. Portanto,

$$a+\tfrac{1}{pn}\in(a\,,b)\ \text{ para todo }\ n\in\mathbb{Z}^*.$$

Vamos dividir a prova em dois casos.

Caso I: a *é irracional*.
Sendo a irracional, concluímos que $a+\frac{1}{pn}$ é irracional. Logo, o conjunto

$$\left\{a+\tfrac{1}{pn}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*\right\}\subset(a\,,b)$$

possui uma infinidade de elementos, todos eles irracionais.

Caso II: a *é racional*.
Nesse caso, temos que:

$$a+\tfrac{1}{\pi pn}\in(a,b)$$

é um número irracional para todo $n\in\mathbb{Z}^*$. Portanto, o conjunto

$$\left\{a+\tfrac{1}{\pi pn}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^*\right\}\subset(a\,,b)$$

possui uma infinidade de elementos, todos eles irracionais.

20. Não. O número 9 é ímpar e sua raiz quadrada vale 3 que não é irracional.

21. Sejam $n\,,m\in\mathbb{Z}^*$. Temos que:

$$\sqrt{n}=m\quad\Longleftrightarrow\quad n=m^2.$$

Isso demonstra o que pretendíamos.

22. Seja $n\in\mathbb{Z}^*$. Vamos mostrar que se $\sqrt{n}$ é racional então n terá que ser um quadrado perfeito.

Suponhamos então que $\sqrt{n}$ é racional. Nesse caso, existem $p\,,q\in\mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$. Digamos ainda que escolhemos $p\,,q$ sem fatores primos comuns. Note que isso é sempre possível, pois basta tomar a forma irredutível da fração. Assim,

$$\sqrt{n}=\tfrac{p}{q}\quad\Longrightarrow\quad n=\tfrac{p^2}{q^2}.$$

Como $p\,,q$ não tem fatores primos comuns e n é inteiro, segue da igualdade acima que $q=1$. Consequentemente, $n=p^2$, ou seja, n é um quadrado perfeito. Isso demonstra o que pretendíamos.

23. Seja $n\in\mathbb{Z}^*$. Pelo exercício anterior basta mostrar que $1+n^2$ não pode ser um quadrado perfeito.

Suponhamos então que $1+n^2=m^2$ para algum $m\in\mathbb{Z}^*$. Assim,

$$1+n^2=m^2 \;\Rightarrow\; 1=m^2-n^2 \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; 1=(m-n)(m+n).$$

Consequentemente, $m+n=1=m-n$ donde concluímos que $m=1$ e $n=0$ o que contradiz o fato que $n>0$.

24. Seja $n\in\mathbb{Z}$. Temos que

$$n=\underbrace{\left(\frac{n-2}{\sqrt{2}}\right)}_{b\in\mathbb{R}}\sqrt{2}+2$$

demonstrando o que foi pedido.

25. Seja a um número real. Temos que

$$a=\pi\underbrace{\left(\frac{a-1}{\pi}\right)}_{b\in\mathbb{R}}-1$$

demonstrando o que foi pedido.

26. Vamos enunciar dois exercícios semelhantes aos dois últimos e resolvê-los.

(i) *Mostre que todo número inteiro pode ser colocado na forma* $\frac{\sqrt{5}}{b}+2$ *onde* $b\in\mathbb{R}^*$.

Solução Seja $n\in\mathbb{Z}$. Temos que:

$$n=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\frac{1}{n-\sqrt{2}}}+\sqrt{2}$$

onde $b=\sqrt{5}\,\frac{1}{n-\sqrt{2}}$. E assim termina a solução.

Repare que $n-\sqrt{2}\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

(ii) *Mostre que todo número real diferente de* $\sqrt{5}$ *pode ser colocado na forma* $\frac{\sqrt{2}}{\pi b}+\sqrt{5}$.

Solução Seja $a\in\mathbb{R}-\{\sqrt{5}\}$. Temos que:

$$a=\frac{\sqrt{2}}{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{1}{a-\sqrt{5}}\right)}+\sqrt{5}$$

onde $b=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{1}{a-\sqrt{5}}$. E aqui, encerramos a solução.

27. Vamos então imitar a prova feita na seção 5.1.

Suponhamos que $\sqrt[3]{5}$ é racional. Nesse caso, existem inteiros $p\,,q\in\mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt[3]{5}=\frac{p}{q}$. Assim,

$$\sqrt[3]{5}=p/q \;\Leftrightarrow\; 5=p^3/q^3 \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; 5q^3=p^3.$$

Agora, faremos a análise feita na seção 5.1 afim de obter a contradição desejada.

Na igualdade $5q^3=p^3$ temos:

- *no membro da esquerda o número* 5 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 3)+1*
- *no membro da direita o número* 5 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 3)*

o que nos fornece a contradição procurada.

Note que se $3n+1=3m$ com $m\,,n\geq 0$ inteiros, então $3(m-n)=1$ o que é falso. Isso mostrou que: o número 1 somado com um múltiplo não negativo de 3 não pode produzir um múltiplo não negativo de 3.

28. Generalização proposta:

Mostre que $\sqrt[n]{5}$ *é irracional para todo* $n \geq 2$ *inteiro.*

Solução

Vamos, novamente, imitar a prova feita na seção 5.1.

Seja $n \geq 2$ inteiro e suponhamos que $\sqrt[n]{5}$ é racional. Nesse caso, existem inteiros $p\,, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt[n]{5} = \frac{p}{q}$. Assim,

$$\sqrt[n]{5} = p/q \quad \Leftrightarrow \quad 5 = p^n/q^n \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 5q^n = p^n.$$

Agora, faremos a análise feita na seção 5.1 afim de obter a contradição desejada.

Na igualdade $5q^n = p^n$ onde $n \geq 2$ temos:

- *no membro da esquerda o número* 5 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de n)+1*
- *no membro da direita o número* 5 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de n)*

Por outro lado, temos que: se $kn + 1 = \ell n$ com $n \geq 2$ e $k, \ell \geq 0$ inteiros, então $(\ell - k)n = 1$. Logo, $\ell - k = 1$ e $n = 1$ o que contradiz o fato que $n \geq 2$.

E isso nos dá a contradição procurada.

29. (i) *Provando que* $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Vamos imitar a prova feita na seção 5.1.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional. Nesse caso, existem inteiros $p\,, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Assim,

$$\sqrt{2} = p/q \quad \Leftrightarrow \quad 2 = p^2/q^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Na igualdade $2q^2 = p^2$ temos:

- *no membro da esquerda o número* 2 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)+1*
- *no membro da direita o número* 5 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)*

o que nos fornece a contradição procurada.

Note que se $2n+1 = 2m$ com $m\,, n \geq 0$ inteiros, então $2(m - n) = 1$ o que é falso. Isso mostrou que: o número 1 somado com um múltiplo não negativo de 2 não pode produzir um múltiplo não negativo de 2.

(ii) *Provando que* $\sqrt{3}$ *é irracional.*

Suponhamos que $\sqrt{3}$ é racional. Nesse caso, existem inteiros $p, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. Assim,

$$\sqrt{3} = p/q \quad \Leftrightarrow \quad 3 = p^2/q^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 3q^2 = p^2.$$

Na igualdade $3q^2 = p^2$ temos:

- *no membro da esquerda o número* 3 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)+1*
- *no membro da direita o número* 3 *aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)*

o que nos fornece a contradição procurada, como no caso (i).

30. Vamos tentar uma prova desse fato usando os argumentos da seção 5.1.

Seja $p \geq 2$ um número primo e suponhamos que $\sqrt{p}$ é racional. Assim, existem inteiros positivos m, n tais que $\sqrt{p} = m/n$.

Como nos exercícios anteriores, obtemos:

$$pn^2 = m^2.$$

Na igualdade acima temos que:

• *no membro da esquerda o número primo p aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)+1*

• *no membro da direita o número primo p aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de 2)*

o que nos fornece a contradição procurada, como nos exercícios anteriores.

Outra prova seria: sendo $p \geq 2$ um número primo, concluímos que p não pode ser um quadrado perfeito. Consequentemente, segue do exercício 22 que $\sqrt{p}$ é irracional.

31. A prova desse fato é repetição dos argumentos que usamos nesses últimos exercícios.

Sejam $n \geq 2$ inteiro e k um número primo. Suponhamos que $\sqrt[n]{k}$ é racional. Nesse caso, existem inteiros $p, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $\sqrt[n]{k} = \frac{p}{q}$. Assim,

$$\sqrt[n]{k} = p/q \quad \Leftrightarrow \quad k = p^n/q^n \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad kq^n = p^n.$$

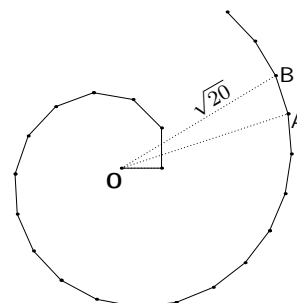
Agora, faremos a análise feita na seção 5.1 afim de obter a contradição desejada.

Na igualdade $kq^n = p^n$ onde $n \geq 2$ temos:

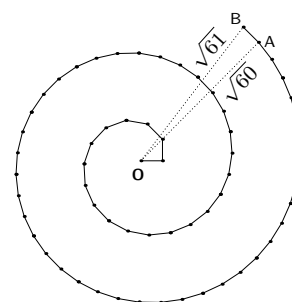
• *no membro da esquerda o número primo k aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de n)+1*

• *no membro da direita o número k aparece com um expoente que vale: (múltiplo não negativo de n).*

E isso nos dá a contradição procurada, exatamente como no exercício em que provamos que a raiz n-ésima de 5 é irracional, quando $n \geq 2$.

32. Usando um software adequado, obtemos a figura mostrada a seguir.

O triângulo OAB é retângulo em A.

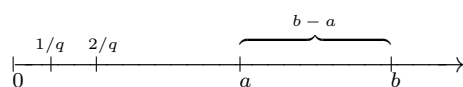
O aspecto da figura formada pelos catetos unitários é o de uma espiral.

33. De posse de um software adequado obteremos a seguinte figura.

Aqui também, o triângulo OAB é retângulo em A. O cateto OA vale $\sqrt{60}$ e a hipotenusa OB vale $\sqrt{61}$.

34. Sejam dados $0 < a < b$. A propriedade arquimediana dos números reais nos garante que existe $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$q > \frac{1}{b-a}.$$

Assim, $\frac{1}{q} < b-a$. Por outro lado, como $1/q$ é menor do que o comprimento do intervalo (a, b), concluímos que existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$p \times \frac{1}{q} \in (a, b).$$

Se isso não ocorresse, existiria $n \in \mathbb{Z}^+$ satisfazendo a condição

$$\frac{n}{q} \leq a < b \leq \frac{n+1}{q}.$$

E isso nos garante que:

$$b \leq \frac{n+1}{q} \quad \text{e} \quad -a \leq -\frac{n}{q}$$

produzindo a contradição $b - a \leq 1/q$.

Mostramos assim que existem $p\,, q \in \mathbb{Z}^+$ tais que $\frac{p}{q} \in (\,a\,, b\,)$.

Agora, aplicando sucessivamente esse resultado concluímos que:

$\exists\, p_1, q_1 \in \mathbb{Z}^+ \;;\; a < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q}$

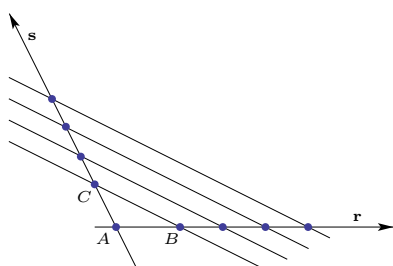
$\exists\, p_2, q_2 \in \mathbb{Z}^+ \;;\; \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p}{q}$

$\exists\, p_3, q_3 \in \mathbb{Z}^+ \;;\; \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p}{q}$

$\exists\, p_4, q_4 \in \mathbb{Z}^+ \;;\; \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p}{q}$

$$\vdots$$

e assim sucessivamente. Desta forma mostramos a existência de uma infinidade de racionais no intervalo $(\,a\,, b\,)$.

35. Considere o triângulo ABC mostrado na figura a seguir.

Sabemos que retas paralelas a reta passando por B, C determinam com as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ triângulos semelhantes ao triângulo ABC.

Como podemos construir uma infinidade de tais retas, concluímos que existem uma infinidade de triângulos semelhantes ao triângulo ABC.

A figura acima exibe com clareza esse fato.

36. Faremos uma prova por redução ao absurdo. Para isso, suponhamos que o número r, com a propriedade citada no exercício, é um número irracional.

Sabemos que o simétrico de um número real λ em relação a r vale $2r - \lambda$. Nesse caso, tomando $\lambda = 2r$ (que é irracional), concluímos que o seu simétrico em relação a r, o qual vale $2r - \lambda = 2r - 2r = 0$ também é irracional, o que produz o absurdo que procurávamos !!

Concluímos então que se existe um número real com a propriedade citada no exercício, então esse número tem que ser, necessariamente, um número racional, e a prova está finalizada.

Nota: Repare que no exercício resolvido de número 11 na página 141, mostramos que todo racional tem, de fato, a propriedade citada no presente exercício.

Lição 9

1. As soluções das equações são:

(a) 5

(b) -1

(c) $-5/4$

(d) $\frac{1}{\pi-1}$.

2. De fato, temos que:

$$\frac{2}{3} = \Big\{ \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{6}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \Big\} \sqrt{2} + 1.$$

Sejam $p\,,q \in \mathbb{Z}$ onde $q \neq 0$. Temos que:

$$\frac{p}{q} = \Big\{ \underbrace{\frac{p-q}{q\sqrt{2}}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \Big\} \sqrt{2} + 1\,.$$

Isso mostra que todo racional pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2}+1$ para algum real α.

Respondendo à última pergunta, podemos mostrar que: *todo número real b pode ser colocado na forma $\alpha\sqrt{2}+1$ para algum real α.*

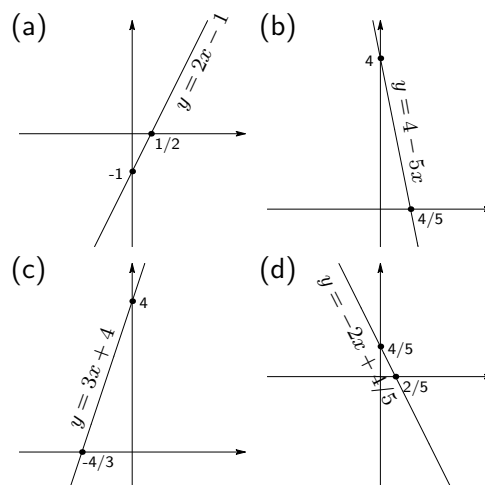
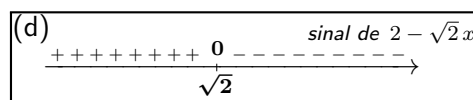
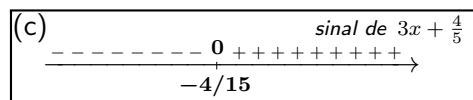
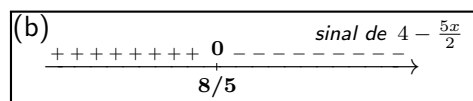
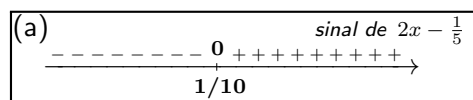
Isso segue da igualdade:

$$b = \Big\{ \underbrace{\frac{b-1}{\sqrt{2}}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \Big\} \sqrt{2} + 1\,.$$

3. Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$a = \pi \Big\{ \underbrace{\frac{a + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\pi}}_{\lambda\in\mathbb{R}} \Big\} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

E isso mostra que todo número real pode ser colocado na forma $\pi\lambda - 1/\sqrt{2}$ para algum real λ.

4. Trata-se de expressões do primeiro grau. Seus gráficos são retas, mostradas a seguir.

5. Os quadros de sinais das expressões são exibidos a seguir.

6. (a) A equação não tem solução quando $\lambda = 0$. A equação tem uma única solução quando $\lambda \neq 0$, a saber, $\frac{1}{3\lambda}$.

(b) A equação não tem solução quando $\lambda = 0$. A equação tem uma única solução quando $\lambda \neq 0$, a saber, $8/\lambda$.

(c) A equação não está bem definida quando $\lambda = 0$. A equação está bem definida para todo $\lambda \neq 0$ e, nesse caso, tem uma única solução, a saber, $-\frac{4}{3\lambda}$.

(d) A equação não está bem definida quando $\lambda = 0$. A equação está bem defi-

nida para todo $\lambda \neq 0$ e, nesse caso, tem uma única solução, a saber, $\lambda(\sqrt{2} - \lambda)$.

7. Para $a \neq b$ a equação tem uma única solução, a saber, $x = a$.

8. (a) $\lambda = \frac{x+1}{x^2}$ para $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

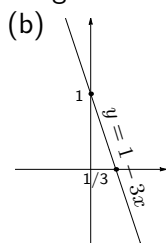
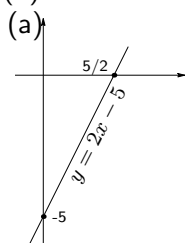
(b) $\lambda = \frac{8}{x+2}$ para $-2 \neq x \in \mathbb{R}$.

(c) $\lambda = \frac{4}{2-3x}$ para $\frac{2}{3} \neq x \in \mathbb{R}$.

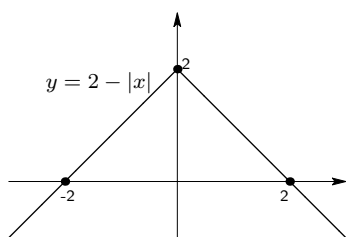
(d) $\lambda = \sqrt{2}/(1 + x)$ para $-1 \neq x \in \mathbb{R}$.

9. Note que as expressões dos itens (c) e (d) não são do primeiro grau.

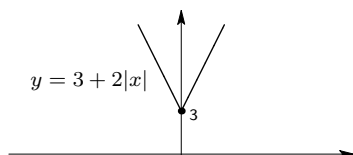
(a)

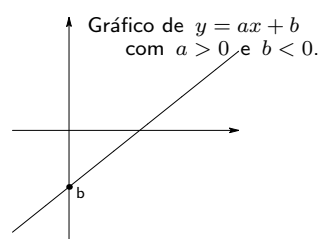
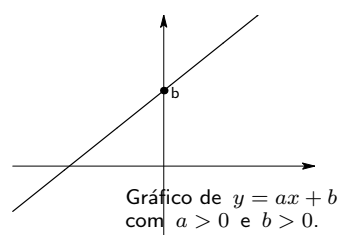
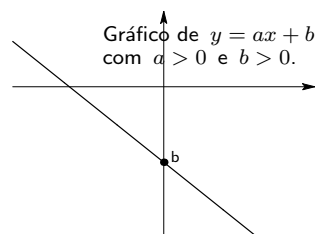
(b)

(c) Note que:

- $2 - |x| = 2 - x$ quando $x \geq 0$;
- $2 - |x| = 2 + x$ quando $x \leq 0$.

Logo, o gráfico da expressão $2-|x|$ tem a forma mostrada a seguir.

(d) Note que:

- $3 + 2|x| = 3 + 2x$ quando $x \geq 0$;
- $3 + 2|x| = 3 - 2x$ quando $x \leq 0$.

Logo, o gráfico da expressão $3+2|x|$ tem a forma mostrada a seguir.

10. As expressões consideradas são do primeiro grau.

(a) Nesse caso, temos um coeficiente angular positivo (expressão crescente) e a expressão corta o eixo das ordenadas abaixo da origem pois $b < 0$. Tais expressões têm o seguinte tipo de gráfico:

(b) Nesse caso, temos uma expressão crescente ($a > 0$) que corta o eixo das ordenadas acima da origem pois $b > 0$ (note que $b/a > 0$ e $a > 0$). Tais expressões têm o seguinte tipo de gráfico:

(c) Nesse caso, temos uma expressão decrescente ($a < 0$) que corta o eixo das ordenadas abaixo da origem (note que $b/a > 0$ e $a < 0$, logo $b < 0$). Tais expressões têm o seguinte tipo de gráfico:

11. Soluções:

(a) -2 e 1.

(b) A equação não tem soluções.

(c) -3 e 1.

(d) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

12. Soluções:

(a) $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.

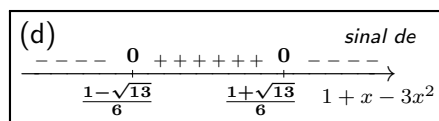
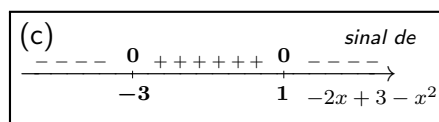
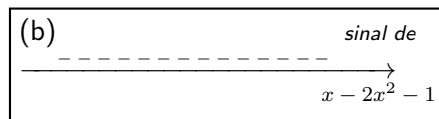
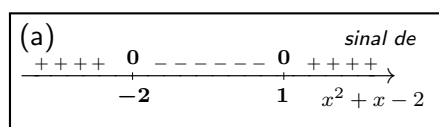
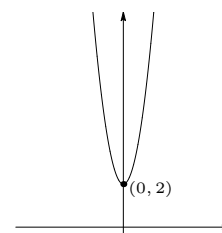
(b) $\frac{3\pm\sqrt{13}}{4}$.

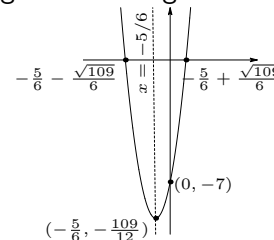
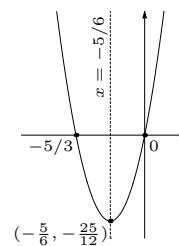
(c) A equação não tem soluções.

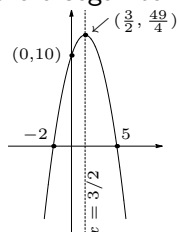
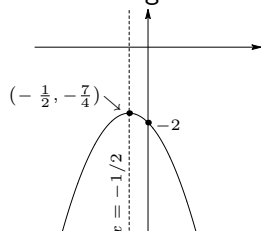
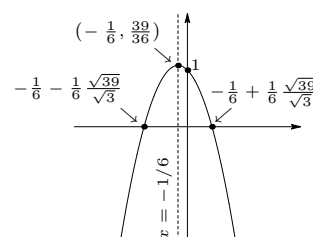
(d) A equação tem uma única solução, a saber, $13/8$.

13. Exibimos a seguir o quadro de sinais das expressões.

(c) *sinal de*
− − − − **0** + + + + + + **0** − − − −
−3 **1** $-2x+3-x^2$

(d) *sinal de*
− − − − **0** + + + + + + **0** − − − −
$\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ $1+x-3x^2$

14. (1.a) $(0,2)$.
(1.b) $4\,x^2+2$.
(1.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x=0$.
(1.d) Valor extremo: 2 (ponto de mínimo). Ocorre quando $x=0$.
(1.e) Não corta o eixo das abcissas.
(1.f) O gráfico é o seguinte:

Nesse caso, o eixo de simetria coincide com o eixo das ordenadas.

(2.a) $(0,-7)$.
(2.b) $3\big(x+\frac{5}{6}\big)^2-\frac{109}{12}$.
(2.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x=-5/6$.
(2.d) Valor extremo: $-109/12$ (ponto de mínimo). Ocorre quando $x=-5/6$.
(2.e) $-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{109}}{6}$.
(2.f) O gráfico é o seguinte:

(3.a) $(0,0)$.
(3.b) $3\big(x+\frac{5}{6}\big)^2-\frac{25}{12}$.
(3.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x=-5/6$.
(3.d) Valor extremo: $-25/12$ (ponto de mínimo). Ocorre quando $x=-5/6$.
(3.e) 0 e $-5/3$.
(3.f) O gráfico é o seguinte:

(4.a) $(0,10)$.
(4.b) $-\big(x-\frac{3}{2}\big)^2+\frac{49}{4}$.

(4.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x = 3/2$.
(4.d) Valor extremo: $49/4$ (ponto de máximo). Ocorre quando $x = 3/2$.
(4.e) -2 e 5.
(4.f) O gráfico é o seguinte:

(5.a) $(0, -2)$.
(5.b) $-\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$.
(5.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x = -1/2$.
(5.d) Valor extremo: $-7/4$ (ponto de máximo). Ocorre quando $x = -1/2$.
(5.e) Não corta o eixo das abcissas.
(5.f) O gráfico é o seguinte:

(6.a) $(0, 1)$.
(6.b) $-3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{39}{36}$.
(6.c) Equação cartesiana do eixo de simetria: $x = -1/6$.
(6.d) Valor extremo: $39/36$ (ponto de máximo). Ocorre quando $x = -1/6$.
(6.e) $-\frac{1}{6}\left(1 \pm \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}}\right)$.
(6.f) O gráfico é o seguinte:

15. Soluções: $-\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$

16. A equação não tem solução.

17. Apenas os números do conjunto $(-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty)$ podem ser colocados na forma $2\lambda + \frac{1}{\lambda}$ para algum λ real.

18. Seja a um número real. Para que a tenha a forma $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ devemos ter

$$a = \lambda - \frac{1}{\lambda}.$$

Logo, $\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$. Consequentemente,

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2} \quad \text{onde} \quad a^2 + 4 > 0.$$

Concluímos então que todo número real a pode ser colocado na forma $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ com $\lambda > 0$. Basta tomar

$$\lambda = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

19. Uma tal expressão pode ser:

$$\big(x - (2 + \sqrt{3})\big)\big(x - (2 - \sqrt{3})\big).$$

As expressões que satisfazem as condições da questão têm a forma

$$a\big(x - (2 + \sqrt{3})\big)\big(x - (2 - \sqrt{3})\big)$$

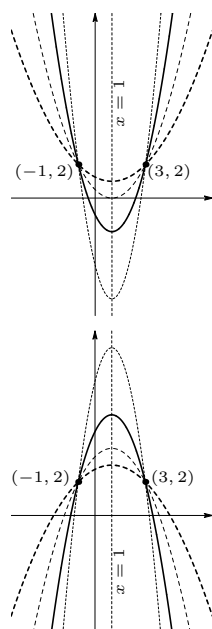
onde a é um número real qualquer não nulo.

20. Existe uma única expressão do segundo grau com essas propriedades, a saber, a expressão $\frac{1}{2}(x - 1)^2$.

21. As expressões são da forma

$$ax^2 - 2ax + 2 - 3a \text{ onde } 0 \neq a \in \mathbb{R}.$$

Nas figuras a seguir mostramos o gráfico de algumas dessas expressões. Na primeira figura mostramos gráficos usando os seguintes valores para o parâmetro a: $1/4\,,1/2\,,1\,,2$. Na segunda figura, usamos os valores $-1/4\,,-1/2\,,-1\,,-2$ para o parâmetro a.

Os gráficos com traços mais espessos na primeira figura correspondem aos valores $a = 1$ para o traço contínuo e $a = 1/4$ para o tracejado.

Para todas as parábolas, o eixo de simetria é o mesmo e tem $x = 1$ como equação cartesiana.

22. Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}$. A expressão

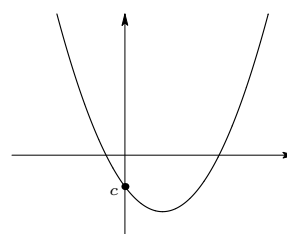
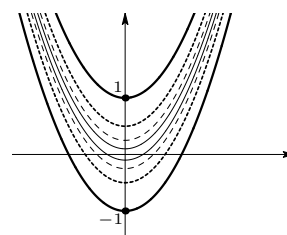
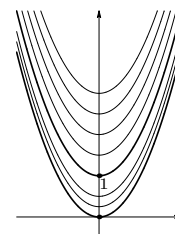
$$(x-a)(x-b)$$

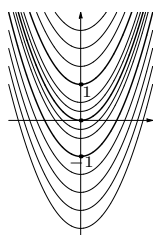
se anula somente nos pontos a, b.

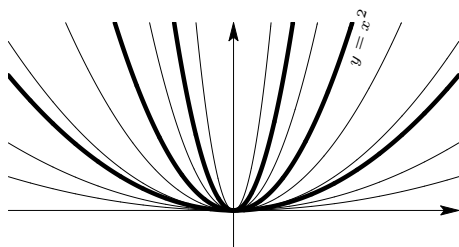
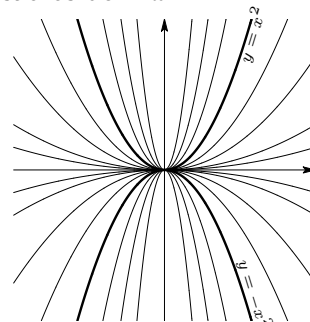
As expressões com essa propriedade são da forma

$$\lambda(x-a)(x-b) \text{ onde } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

23. $-\frac{4\pi}{9}(x+1)(x-2)$.

24. Note que uma tal parábola tem concavidade voltada para cima pois $a > 0$. Além disso, ela corta o eixo das ordenadas, abaixo da origem pois $c < 0$.

25. (a) A figura a seguir mostra parábolas de expressão $x^2 + \lambda$ onde atribuímos ao parâmetro λ alguns valores no intervalo $[-1\,,1]$. Os gráficos com traços mais espessos são os de $x^2 + 1$ e $x^2 - 1$, respectivamente.

(b) Na figura a seguir exibimos gráficos de $x^2 + \lambda$ para alguns valores do parâmetro λ no intervalo $[0\,,\infty)$. Esses gráficos são obtidos transladando-se verticalmente o gráfico de x^2 de um real positivo. Os gráficos com traços mais espessos são os de x^2 e $x^2 + 1$, respectivamente.

(c) Nessa figura mostramos gráficos de $x^2 + \lambda$ para alguns valores do parâmetro

λ no intervalo $(-\infty\,,\infty)$. Novamente, esses gráficos são obtidos transladando-se verticalmente o gráfico de x^2 de um real qualquer.

26. (a) A figura a seguir mostra parábolas de expressão λx^2 onde atribuímos ao parâmetro λ alguns valores no intervalo $[-1\,,1]$. Os gráficos com traços mais espessos são os de $\pm x^2$.

(b) Na figura a seguir exibimos gráficos de λx^2 para alguns valores do parâmetro λ no intervalo $(0\,,\infty)$. Note que a medida que λ aumenta a parábola se fecha cada vez mais. Os gráficos com traços mais espessos são os de $4x^2$, x^2 e $x^2/5$.

(c) Nessa figura mostramos gráficos de λx^2 para alguns valores do parâmetro λ no intervalo $(-\infty\,,\infty)$. Para $\lambda < 0$ temos parábolas com concavidade voltada para baixo. A medida que λ se aproxima de zero as parábolas ficam cada vez mais abertas. Os gráficos com traços mais espessos são os de $\pm x^2$.

27. O discriminante desse trinômio vale

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Quando a e c têm sinais contrários temos que $-4ac > 0$. Nesse caso, $\Delta > 0$ o que garante que o trinômio em questão tem duas raízes distintas.

28. Não. Por exemplo, quando $b = -1$, $a = 1$ e $c = 0$ temos a e b com sinais contrários e $\Delta = 0$. Isso garante que a expressão se anula em apenas um ponto.

29. Temos que $\Delta = b(b-8)$. Logo, a expressão:

- terá duas raízes distintas quando $b \in (-\infty\,,0) \cup (8\,,\infty)$;
- terá uma única raíz quando $b = 0$ ou $b = 8$;
- não terá raízes quando $b \in (0\,,8)$.

30. $\lambda \in (-8\,,8)$.

31. $4\lambda + a^2 = 0$.

32. $k = 1$ ou $k = 4$.

33. $\alpha + \beta = b$
$\alpha\beta = c$
$\alpha^2 + \beta^2 = b^2 - 2c$
$\alpha^3 + \beta^3 = b^3 - 3bc.$

34. (a) $[1{,}2] = 1$

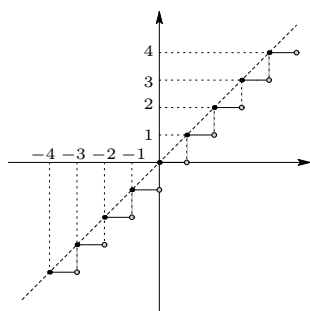
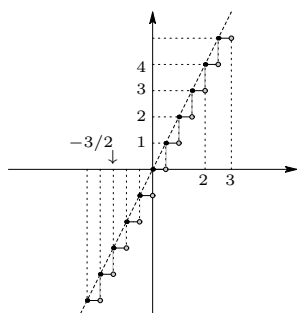
(b) $\left[-\frac{3{,}45}{2}\right] = -2$

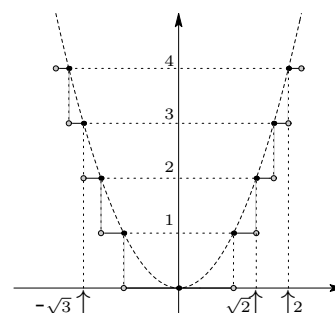
(c) $\left[\sqrt{10}\,\right] = 3$

(d) $\left[\sqrt[3]{-7}\,\right] = -2$

(e) $[-\pi] = -4$

(f) $\left[\sqrt[4]{101}\,\right] = 3.$

35. Na figura a seguir exibimos o gráfico da expressão $[x]$ cujo domínio é toda a reta. Temos ai um exemplo de uma expressão que não varia continuamente em seu domínio de definição.

36. O gráfico da reta $y = 2x$ está tracejado.

As duas expressões coincidem apenas sobre os números da forma $n/2$ onde n é um inteiro.

37. O gráfico da parábola $y = x^2$ está tracejado.

As duas expressões coincidem apenas sobre os números da forma $\pm\sqrt{n}$ onde $n \geq 0$ é um inteiro.

38. De $\frac{x}{\lambda^2 - x} = \frac{1}{x}$ segue que $x^2 + x - \lambda^2 = 0$ desde que $x \neq 0\,, \lambda^2$. Nesse caso, o discriminante $\Delta = 1 + 4\lambda^2 > 0$ e as raízes são:

$$-\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda^2}}{2}\,.$$

Note que, como $\lambda \neq 0$, segue que nenhuma das soluções é igual a zero ou λ^2. Podemos então afirma que para $\lambda \neq 0$ a equação em estudo tem exatamente duas soluções distintas.

No entanto, quando $\lambda = 0$ a equação se reduz a $-\frac{x}{x} = \frac{1}{x}$ cuja solução é $x = -1$.

39. (a) $x^2 - |x| - 2 = (|x| - 2)(|x| + 1)$

(b) $-x^2 + |x| + 6 = -(|x| - 3)(|x| + 2)$

(c) $x^4 - 3x^2 - 10 = (x^2 - 5)(x^2 + 2)$

(d) $x - \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)$ para $x \geq 0$.

40. Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que:

$x^2 - a^2 = (|x|^2 - a^2) = (|x| - a)(|x| + a)$

como queríamos provar.

41. $2x - 3\sqrt{x} = 2$ quando $x = 4$.

A expressão não assume o valor -2.

$2x - 3\sqrt{x} = 6$ quando $x = \left(\frac{3 + \sqrt{57}}{4}\right)^2$.

A expressão não assume o valor -5.

42. (a) Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$.
Se anula em $x = 2$.

(b) Domínio: $\mathbb{R} - \{1, -2\}$.
Se anula em $x = 0$.

(c) Domínio: $[1/2, 3/2)$.
Se anula em $x = 1/2$.

(d) Domínio: $[1/2, 1) \cup (2, \infty)$.
Se anula em $x = 1/2$.

43. (a) Note que $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ só está bem definida para $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$.

As soluções são: $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

(b) Note que $\sqrt{x - 5\sqrt{x} + 4}$ só está bem definida para $x \in [0, 1] \cup [16, \infty)$.

Tem uma única solução: $x = 0$.

(c) Soluções: $\pm(2 \pm \sqrt[4]{3})$.

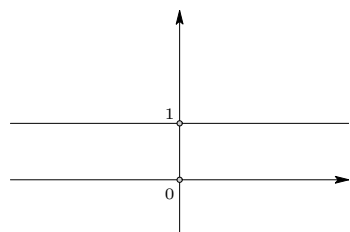
(d) Soluções: -8 e 27.

44. (a) Domínio: $(0, 1/4) \cup (1/4, \infty)$.
Se anula em $x = 1/2$.

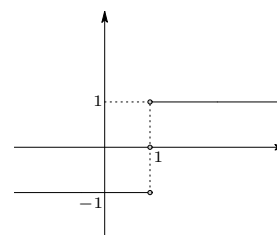
(b) Domínio: $(0, 1) \cup (4, \infty)$.
Não se anula.

45. (a) Domínio: $\mathbb{R}^*$. Temos que:

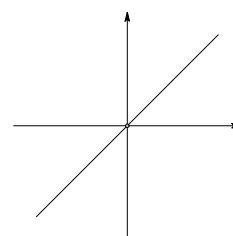
$$\frac{x}{x} = 1 \text{ para todo } 0 \neq x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico é mostrado na figura a seguir.

(b) Domínio: $\mathbb{R} - \{1\}$. Temos que:

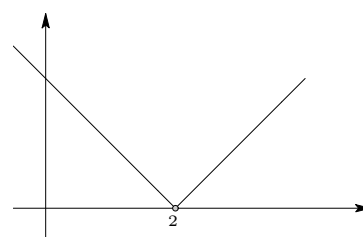
$$\frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & \text{quando} \quad x > 1 \\ -1 & \text{quando} \quad x < 1. \end{cases}$$

O gráfico é mostrado na figura a seguir.

(c) Domínio: $\mathbb{R}^*$. Temos que:

$$\frac{x^2}{x} = x \text{ para todo } 0 \neq x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico é mostrado na figura a seguir.

(d) Domínio: $\mathbb{R} - \{2\}$. Temos que:

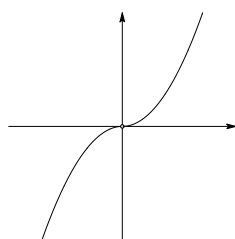
$$\frac{(x-2)^2}{|x-2|} = |x - 2| \text{ para todo } 2 \neq x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico é mostrado na figura a seguir.

(e) Domínio: $\mathbb{R}^*$. Temos que:

$$\frac{|x^3|}{x} = x\,|x| \text{ para todo } 0 \neq x \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{quando} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{quando} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

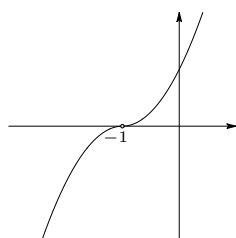
O gráfico é mostrado na figura a seguir.

(f) Domínio: $\mathbb{R} - \{-1\}$. Temos que:

$$\frac{(x+1)^3}{|x+1|} = (x+1)|x+1|$$

para todo $-1 \neq x \in \mathbb{R}$.

Como no caso anterior temos que

$$(x+1)|x+1| = $$
$$= \begin{cases} (x+1)^2 & \text{quando} \quad x \geq -1 \\ -(x+1)^2 & \text{quando} \quad x \leq -1\,. \end{cases}$$

O gráfico é mostrado na figura a seguir.

46. Solução: $x = 3$.

47. Solução: $x = 26$.

48. Sejam $m\,,n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Para saber se m/n pode ser colocado na forma $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ para algum racional positivo λ devemos estudar a equação

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = \tfrac{m}{n}\,.$$

Seu discriminante vale:

$$\Delta = 4 - 4(1 - \tfrac{m}{n}) = 4\tfrac{m}{n}\,.$$

Assim, para que a equação acima tenha solução devemos ter $\Delta \geq 0$ ou seja, $m/n \geq 0$. Por outro lado, para que tenhamos uma solução racional positiva, precisamos que

$$\lambda = \tfrac{2 \pm 2\sqrt{m/n}}{2} = 1 \pm \sqrt{m/n}$$

seja racional. E isso, ocorre se, e somente se, $\sqrt{m/n} = p/q$ onde $p, q \geq 0$ e $q > 0$. Por outro lado, $\sqrt{m/n} = p/q$ se, e somente se, $m/n = p^2/q^2$. E o exercício fica provado.

49. O menor subconjunto da reta será o intervalo $[-1\,,\infty)$.

50. A equação da reta em questão é $y = \sqrt{2}\,x$. Note que se tal reta passa pelo ponto (a ,b) então, ou ambas as coordenadas são nulas ou ambas são não nulas.

Suponhamos que a reta passa por um ponto $(\,a\,,b\,)$ distinto da origem e com ambas as coordenadas inteiras. Assim, $a\,,b \in \mathbb{Z}^*$ e temos:

$$b = \sqrt{2}\,a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = b/a\,.$$

Mas isso é um absurdo pois $\sqrt{2}$ não é racional. Logo, a reta em questão não passa por pontos com ambas as coordenadas inteiras, a não ser a origem.

A segunda parte da questão pode ser respondida com os mesmos argumentos.

Suponhamos que a reta passa por um ponto $(\,a\,,b\,)$ distinto da origem e com ambas as coordenadas racionais. Assim, $a\,,b \in \mathbb{Q}^*$ e temos:

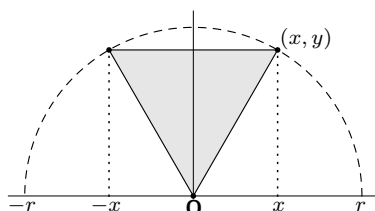
$$b = \sqrt{2}\,a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = b/a\,.$$

Mas isso é um absurdo pois $\sqrt{2}$ é irracional e b/a é racional. Logo, a reta em questão não passa por pontos com ambas as coordenadas racionais, a não ser a origem.

51. A parábola $ax^2 + bx + c$ (onde $a \neq 0$) tem como eixo de simetria uma reta vertical. Por outro lado, $ax^2 + bx + c$ é

obtida da parábola $ax^2 + bx$ por uma translação vertical de c; e quando fazemos uma translação vertical, o eixo de simetria da parábola desloca-se sobre si mesmo. Consequentemente, elas têm o mesmo eixo de simetria.

Mas o eixo de simetria de $ax^2 + bx$ só pode depender de a e b. Logo, o eixo de simetria de $ax^2 + bx + c$ só depende de a, b e o argumento geométrico solicitado está colocado.

52. Girando o triângulo em torno do vértice **O** podemos colocá-lo de tal forma que o lado oposto ao vértice **O** fica perpendicular ao eixo vertical. Essa operação não modifica a área do triângulo. Assim, para resolver o problema vamos considerar que os triângulos são como os mostrados na figura a seguir, semétricos em relação ao eixo vertical.

Sejam x, y como indicados acima, onde $0 < x, y < r$. Como o ponto (x, y) está sobre o semi-círculo de raio r, devemos ter $x^2 + y^2 = r^2$. Assim, a área $\mathcal{A}$ do triângulo é dada por:

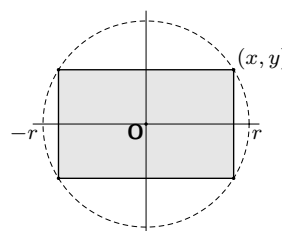
$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= x^2y^2 = x^2(r^2 - x^2) \\ &= -(x^4 - r^2x^2) \\ &= -\left[\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \frac{r^4}{4}\right] \\ &= \frac{r^4}{4} - \left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{r^4}{4} - \left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2} .$$

onde $0 < x < r$. Agora, podemos concluir que a expressão da área assume $r^2/2$ como valor máximo e isso ocorre quando $x = r/\sqrt{2}$.

☛ **Nota:** Esse problema admite uma solução geométrica, extremamente simples !!!

53. Girando o retângulo em torno da origem **O** podemos colocá-lo de tal forma que dois dos seus lados ficam paralelos ao eixo horizontal. Essa operação não modifica a área do triângulo. Assim, para resolver o problema vamos considerar que os retângulos inscritos no círculo de raio r são como os mostrados na figura a seguir.

Sejam x, y como indicados acima, onde $0 < x, y < r$. Como o vértice (x, y) do retângulo está sobre o círculo de raio r, devemos ter $x^2 + y^2 = r^2$. Assim, a área $\mathcal{A}$ do retângulo é dada por:

Considere o retângulo inscrito no círculo de raio $r > 0$, como mostrado na figura. Temos que $x^2 + y^2 = r^2$. Assim, a área $\mathcal{A}$ do retângulo é tal que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= 16\,x^2y^2 = 16\,x^2(r^2-x^2)\\ &= -16\,(x^4-r^2x^2)\\ &= -16\left[\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right)^2-\frac{r^4}{4}\right]\\ &= 4r^4-16\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right)^2\end{aligned}$$

donde concluímos que a expressão da área é dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{4r^4-16\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right)^2}\,.$$

Agora, concluímos que a área dos retângulos inscritos assume $2r^2$ como valor máximo e isso responde positivamente o item (a).

Para responder (b) podemos pensar da seguinte forma. Note que a base $2x$ do retângulo é positiva e inferior a $2r$, ou seja, $0 < x < r$. Quando tomamos x muito próximo de r, o valor de $y = \sqrt{r^2-x^2}$ deve ficar muito pequeno. Nesse caso, a área $\mathcal{A} = 4xy$ também deve ficar muito pequena, pois é dada pelo produto de um número próximo de $4r$ por um número próximo de zero. Isso parece nos dizer que não existe um retângulo com área mínima, isto é, podemos construir retângulos inscritos num círculo de raio $r > 0$ possuindo áreas tão próximas de zero quanto quizermos.

Mais precisamente, seja dado um número real $0 < \epsilon < 2r^2$. Vamos exibir um retângulo inscrito no círculo de raio r com área, exatamente, igual a ϵ. Para isso, voltando à figura, devemos ter:

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{e} \quad \epsilon = 4xy = 4x\sqrt{r^2-x^2}\,.$$

Portanto, $\epsilon^2 = 16\,x^2(r^2-x^2)$ e, consequentemente,

$$16\,x^4-16\,r^2x^2+\epsilon^2=0$$

donde,

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{r^4-\epsilon^2/4}\,.$$

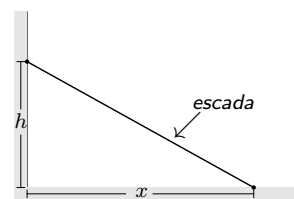
Assim, o retângulo para o qual

$$x = \sqrt{\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{r^4-\epsilon^2/4}}$$

está inscrito no círculo de raio r e possui área valendo, exatamente, ϵ. Note que o valor

$$x = \sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r^4-\epsilon^2/4}}$$

também serve como resposta: ele corresponde à outra dimensão do retângulo.

54. Considere a escada mostrada na figura a seguir. Como piso e parede se encontram perpendicularmente, resulta que o triângulo mostrado na figura é retângulo e a área $\mathcal{A}$ da região triangular citada, é dada por:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,x\,h = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{L^2-x^2}$$

onde $0 < x < L$.

Completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\sqrt{L^2x^2 - x^4}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-(x^4 - L^2x^2)}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-\left[\left(x^2 - \frac{L^2}{2}\right)^2 - \frac{L^4}{4}\right]}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L^4}{4} - \left(x^2 - \frac{L^2}{2}\right)^2}\ .\end{aligned}$$

Agora, podemos concluir da expressão da área $\mathcal{A}$ que o valor máximo será atingido quando $x = L/\sqrt{2}$, ou seja, o pé da escada deve estar a $L/\sqrt{2}$ metros do muro.

55. A expressão em questão está definida para $x \neq 0$ e nesse caso temos:

$$\begin{aligned}4x + \frac{1}{x} + 2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)^2 + 4 + 2\\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)^2}_{\geq 0} + 6\end{aligned}$$

Lembramos também que a expressão $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$ se anula quando $x = 1/2$. Assim, podemos concluir que a expressão em estudo assume o valor 6 como seu menor valor e isso ocorre quando $x = 1/2$.

Lição 10

1. (a) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

(b) A equação não tem solução.

(c) $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(d) A equação não tem solução.

(e) 0 , 1 e 3.

2. A equação tem duas soluções, a saber: $\frac{-1\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

3. A equação tem uma única solução, a saber, $x = 4$.

4. (a) A equação não tem solução.

(b) O conjunto solução é o intervalo $[-2\,,0]$.

(c) A equação não tem solução.

(d) A equação não tem solução.

(e) 0 e 1.

5. (a) 0 e ± 1.

(b) 0 e -1.

6. Tem uma única solução: $x = 1$.

7. (a) Tem uma única solução: $x = 3$.

(b) $\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

(c) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(d) $-1/2$ e 1.

(e) -9.

8. As soluções são:

$\frac{a}{16}\left\{\left(\frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\right) \pm \left|\frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\right|\right\}^2$

onde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

9. (a) 2.

(b) 1.

(c) A equação não tem solução.

10. (a) A equação não tem solução.

(b) A equação não tem solução.

(c) 1.

(d) 0 e 4.

(e) $\sqrt{3/2}$.

11. (a) -1 e $-1+\sqrt{2}$.

(b) 0 e $4/7$.

(c) $-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(d) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

12. $\frac{9\pm\sqrt{13}}{2}$.

13. Domínio: $\mathbb{R}-\{1\,,1/2\}$.

Zeros: $-1\pm\sqrt{2}$.

14. Domínio: $\mathbb{R}-\{-1\pm\sqrt{5}\}$.

A expressão não se anula em seu domínio de definição.

15. $\pm\sqrt{5}$.

16. -1 e -2.

17. $1/16$.

18. Nesse caso, ao elevar ambos os membros da equação ao quadrado, não perdemos soluções, mas podemos introduzir soluções estranhas. É exatamente o que ocorre nesta solução. Por isso, devemos, testar as soluções encontradas. E testando a solução veremos que ela não é solução da equação inicial. Como não perdemos soluções, concluímos que a equação inicial não tem soluções.

19. Nesse caso, a igualdade $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=\sqrt{x^2}$ só é verdadeira para $x\geq 0$. Ao introduzir essa identidade na equação inicial, fizemos uma operação que pode introduzir soluções estranhas a equação pois $\sqrt{x^2}$ está bem definido para todo $x\in\mathbb{R}$ enquanto que $\sqrt{x}\times\sqrt{x}$ só está bem definido para $x\geq 0$. É exatamente o que ocorreu na solução. Encontramos as solução maiores ou iguais a zero (no caso $x=1$) e introduzimos soluções estranhas ($x=-1$).

Lição 11

Nota: No estudo do sinal de expressões estaremos, sempre que possível, usando a regra que aprendemos nesta lição, na página 218 e que só pode ser aplicada quando a expressão varia continuamente em seu domínio de definição. Todas as expressões aqui consideradas tem essa propriedade, salvo a que aparece no exercício 8.

1. (a) Domínio: $\mathbb{R}^*$.

A expressão:

- é positiva em: $\big(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)\cup\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\big)$;
- se anula em: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;
- é negativa em: $\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\big)\cup\big(0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$.

(b) Domínio: $\mathbb{R}-\{1\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(0\,,1)\cup(2\,,\infty)$;
- se anula em: 0 e 2;
- é negativa em: $(-\infty\,,0)\cup(1\,,2)$.

(c) Domínio: $\mathbb{R}-\{3\,,-2\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(3\,,\infty)$;
- não se anula;
- é negativa em: $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,3)$.

(d) Domínio: $\mathbb{R}-\{3\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-24\,,3)$;
- se anula em: -24;
- é negativa em: $(-\infty\,,-24)\cup(3\,,\infty)$.

(e) Domínio: $\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-1)\cup(1\,,2)$;
- se anula em: 2;
- é negativa em: $(-1\,,1)\cup(2\,,\infty)$.

2. (a) Domínio: $\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,1)\cup\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\big)$;
- se anula em: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
- é negativa em: $\big(1\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$.

(b) Domínio: $\mathbb{R}-\{\pm2\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\sqrt{6}\,,-2)\cup(2\,,\sqrt{6}\,)$;
- se anula em: $\pm\sqrt{6}$;
- é negativa em: $(-\infty\,,-\sqrt{6}\,)\cup(-2\,,2)\cup(\sqrt{6}\,,\infty)$.

(c) Domínio: $\mathbb{R}-\{-1\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,0)$;
- se anula em: 0;
- é negativa em: $(0\,,\infty)$.

(d) Domínio: $\mathbb{R}-\{1\,,-3\}$.

A expressão:

- é positiva em: $\big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,1\big)\cup\big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\big)$;
- se anula em: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;
- é negativa em: $(-\infty\,,-3)\cup\big(-3\,,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\big)\cup\big(1\,,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\big)$.

3. Domínio: $\mathbb{R}-\{2\}$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-2)\cup(2\,,3)$;
- se anula em: -2 e 3;
- é negativa em: $(-2\,,2)\cup(3\,,\infty)$.

4. (a) Domínio: $\big(-\infty\,,-\frac{3}{\sqrt{2}}\big]\cup\big[\frac{3}{\sqrt{2}}\,,\infty\big)$.

A expressão:

- é positiva em: $\big(-\infty\,,-\frac{3}{\sqrt{2}}\big]\cup(3\,,\infty)$.
- se anula em: 3;
- é negativa em: $\big[\frac{3}{\sqrt{2}}\,,3\big)$.

(b) Domínio: $\big(-\infty\,,-\frac{3}{\sqrt{2}}\big]\cup\big[\frac{3}{\sqrt{2}}\,,\infty\big)$.

A expressão:

- é positiva em: nenhum ponto;
- não se anula;
- é negativa em todo seu domínio.

(c) Domínio: $(-\infty\,,0]\cup[3\,,\infty)$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,0]$;
- não se anula;
- é negativa em: $[3\,,\infty)$.

(d) Domínio: $[-1\,,3/2]$.

A expressão:

- não é positiva em nehum ponto;
- se anula em: $-7/9$;
- é negativa em: $\big[-1\,,-\frac{7}{9}\big)\cup\big(-\frac{7}{9}\,,\frac{3}{2}\big]$.

(e) Domínio: $[-10\,,\infty)$.

A expressão:

- é positiva em: $(-9\,,\infty)$;
- se anula em: -9;
- é negativa em: $(-10\,,-9)$.

5. Sejam $a\,,b \in \mathbb{R}^*$. Vamos separar a resposta em dois casos.

Caso I: $a\,,b > 0$.

Domínio: $(0\,,\infty)$.

A expressão:

- é positiva em: $(9ab/4\,,\infty)$;
- se anula em $9ab/4$;
- é negativa em: $(0\,,9ab/4)$.

Caso II: $a\,,b < 0$.

Domínio: $(-\infty\,,0)$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-9ab/4)$;
- se anula em $-9ab/4$;
- é negativa em: $(-9ab/4\,,0)$.

Note que a expressão não fica bem definida quando a e b têm sinais contrários.

6. Domínio: $(-\infty\,,-2\,]\cup[\,1\,,\infty)$.

A expressão:

- é positiva em: $(-\infty\,,-2]\cup(2\,,\infty)$;
- se anula em: 2;
- é negativa em: $[\,1\,,2\,)$.

7. Domínio:
$\left(-\infty\,,-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\,,\infty\right)$.

A expressão:

- é positiva em:
$\left(-\infty\,,-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]\cup(\,1\,,\infty)$;
- se anula em $x=1$;
- é negativa em: $\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\,,1\right)$.

8. O erro ocorre quando usamos a regra para estudo de sinais, enunciada na página 218.

Essa regra só pode ser usada quando a expressão varia continuamente em seu domínio de definição. E a expressão $[x]-\frac{1}{2}$ não tem essa propriedade. Você estudará a continuidade dessa expressão em Cálculo I.

9. (a) Domínio: $\left[1-\sqrt{3}\,,1\right)\cup\left[1+\sqrt{3}\,,\infty\right)$.

(b) Se anula em: $1\pm\sqrt{3}$.

10. (a) A expressão:

- é positiva em:
$(-\infty\,,-2)\cup\left(-\frac{1}{2}\,,0\right)\cup(0\,,1)\cup\left(\frac{3}{2}\,,2\right)$;
- é negativa em:
$\left(-2\,,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(1\,,\frac{3}{2}\right)\cup(\,2\,,\infty)$.

(b) se anula em $-1/2$ e $3/2$.

11. (a) $(-\infty\,,-2)\cup(0\,,2)$.

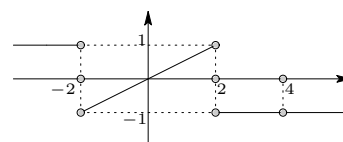
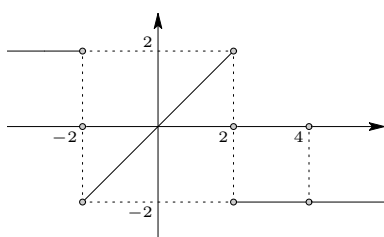
(b) $(-2\,,0\,]\cup(2\,,4)\cup(4\,,\infty)$.

(c) $(-2\,,0)\cup(0\,,2)$.

(d) $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,0\,]$.

(e) $(-\infty\,,-2)\cup(0\,,2)$

(f) $(-1\,,1)\cup(3\,,5)\cup(5\,,\infty)$.

12. O quadro de sinais de uma expressão $F(x)$ (mesmo variando continuamente) não nos fornece informações suficientes para resolver a equação $F(x)=2$. Os dois gráficos a seguir mostram expressões cujo quadro de sinais coincide com o da expressão $F(x)$. No primeiro deles a equação $F(x)=2$ não tem soluções ($F(x)$ nunca assume o valor 2), mas no segundo, a equação $F(x)=2$ tem uma infinidade de soluções, a saber, o todos os pontos do intervalo $(-\infty\,,-2)$.

Esses dois gráficos também servem para mostrar que não podemos concluir quantas soluções tem a equação $F(x) = 2$ tendo apenas o quadro de sinais como informação. De fato, esses dois gráficos nos mostram que nem mesmo podemos concluir se a equação $F(x) = 2$ tem ou não soluções.

Os dois gráficos apresentados são gráficos de expressões que variam continuamente em seus domínios de definição.

13. Podemos concluir que:

- $-1 < F(x) < 0$ em $(-2\,,0)$;
- $-1 < F(x) < 0$ em $(-4\,,\infty)$.

14. (ai) $\mathbb{R} - \{-2\,,-1\,,2\,,4\}$;
(aii) $\mathbb{R} - \{-2\,,-1\,,2\,,4\}$;
(aiii) $\mathbb{R} - \{-2\,,-1\,,2\,,4\,,0\,,3\}$.

(bi) A expressão:

- é positiva em:
$(-\infty\,,-2) \cup (-1\,,0) \cup (3\,,4) \cup (4\,,\infty)$;
- se anula em: 0 e 3;
- é negativa em:
$(-2\,,-1) \cup (0\,,2) \cup (2\,,3)$.

(bii) A expressão:

- é positiva em:
$(-2\,,-1) \cup (3\,,4)$;
- não se anula;
- é negativa em:
$(-\infty\,,-2) \cup (-1\,,0) \cup (0\,,2) \cup (2\,,3)$.

(c) Soluções:

(ci) $(-2\,,-1) \cup [\,0\,,2) \cup (2\,,3\,]$;

(cii) $(-2\,,-1) \cup (3\,,4) \cup (4\,,\infty)$.

(d) Novamente, tendo como informação apenas o quadro de sinais da expressão $F(x)$ não podemos montar o quadro de sinais de $F(x)-2$. Os dois gráficos a seguir são de expressões que têm o mesmo quadro de sinais que $F(x)$. No entanto, o quadro de sinais dos seus transladados por -2 são bastante distintos.

Gráfico de $F(x)$

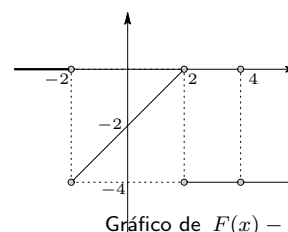
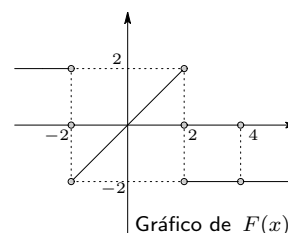
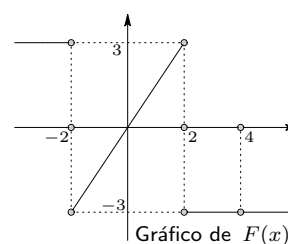
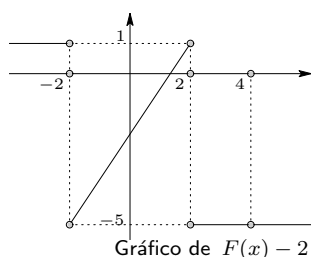



Gráfico de $F(x) - 2$

Note que a expressão $F(x) - 2$ exibida no gráfico acima, é nula em $(-\infty\,,-2)$ e negativa em $(-2\,,2)$.

A seguir apresentamos uma outra expressão com o mesmo quadro de sinais que $F(x)$ e tal que o quadro de sinais de $F(x)-2$ é diferente daquele que exibimos no primeiro exemplo.

Gráfico de $F(x)$

Gráfico de $F(x) - 2$

Note que a expressão $F(x) - 2$ cujo gráfico acabamos de exibir, é positiva no intervalo $(-\infty\,, -2)$ e em parte do intervalo $(-2\,, 2)$. Comportamento bem diferente do apresentado no exemplo anterior.

(e) No item anterior construímos duas expressões que possuem o mesmo quadro de sinais que o da expressão $F(x)$.

15. (a) $A(y)$ não está bem definida apenas nos pontos: $-3\,, 1$ e $3\,.$

(b) $A(y) = 0 \iff y = -1\,.$

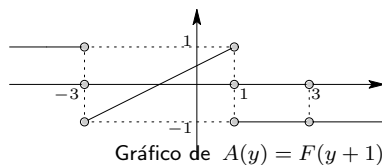
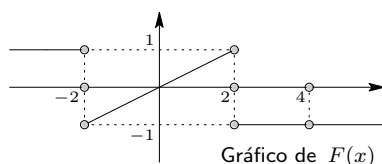
(c) $A(y) > 0$ se, e somente se,
$$y \in (-\infty\,, -3) \cup (-1\,, 1).$$

(d) Para finalizar a descrição do quadro de sinais de $A(y)$ resta dar a informação a seguir.

A expressão é negativa em:
$$(-3\,, -1) \cup (1\,, 3) \cup (3\,, \infty).$$

(e) A seguir, mostramos o gráfico de uma expressão com um quadro de sinais como o dado e o correspondente gráfico da expressão $A(y)$.

Gráfico de $F(x)$

Gráfico de $A(y) = F(y+1)$

O gráfico da expressão $A(y)$ é obtido transladando horizontalmente o gráfico da expressão $F(x)$ de -1.

16. (a) $A(y)$ só não está bem definida nos pontos: $0\,, -1/2\,, 1/4$ e $1/2\,.$

(b) $A(y)$ não se anula.

(c) $A(y) > 0$ se, e somente se,
$$y \in (-1/2\,, 0) \cup (1/2\,, \infty).$$

(d) Para completar o quadro de sinais resta a informação a seguir.

A expressão é negativa em:
$$\big(-\infty\,, -\tfrac{1}{2}\big) \cup \big(0\,, \tfrac{1}{4}\big) \cup \big(\tfrac{1}{4}\,, \tfrac{1}{2}\big).$$

17. (a) $A(y)$ só não está bem definida nos pontos: $0\,, \pm 1/\sqrt{2}$ e $\pm 1/2\,.$

(b) $A(y)$ não se anula.

(c) $A(y) > 0$ se, e somente se,
$$\big(-\infty\,, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) \cup \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,, \infty\big).$$

(d) Completando o quadro de sinais, temos:

A expressão é negativa em:
$$(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,, -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}\,, 0) \cup (0\,, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}\,, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

18. (a) Soluções:
(i) 1 e $-1\,;$
(ii) $1\,, -1$ e $-2\,.$

(bi) Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\,, \pm\sqrt{3}\}.$

A expressão:

- é positiva em: $(-\sqrt{3}\,, -1) \cup (1\,, \sqrt{3})\,;$
- se anula em: $\pm 1\,;$
- é negativa em:
$(-\infty\,, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}\,, -\sqrt{3}) \cup$
$\cup\, (-1\,, 1) \cup (\sqrt{3}\,, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}\,, \infty).$

(bii) Domínio:
$$\mathbb{R} - \{-4\,, \pm\sqrt{5}\,, 2\,, \pm\sqrt{3}\,, 0\}.$$

A expressão:

- é positiva em:
$(-4\,,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5}\,,-2)\cup(-\sqrt{3}\,,-1)\cup$
$\cup\,(0\,,1)\cup(\sqrt{3}\,,2)\cup(2\,,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5}\,,\infty)\,;$
- se anula em: -2 e ± 1;
- é negativa em:
$(-\infty\,,-4)\cup(-2\,,-\sqrt{3})\cup(-1\,,0)\cup$
$\cup\,(1\,,\sqrt{3})$.

19. (a) $A(y)$ só não está bem definida nos pontos: $1\pm\sqrt{2}\,,1\pm\sqrt{6}$ e $1\pm 2\sqrt{2}$.

(b) $A(y)=0 \iff y=-1$ ou $y=3$.

(c) $A(y)>0$ se, e somente se,
$y\in(1-\sqrt{6}\,,-1)\cup(1-\sqrt{2}\,,1+\sqrt{2})\cup$
$\cup\,(3\,,1+\sqrt{6})$.

(d) Para finalizar o quadro de sinais:

A expressão é negativa em:
$(-\infty\,,1-2\sqrt{2})\cup(1-2\sqrt{2}\,,1-\sqrt{6})\cup$
$\cup\,(-1\,,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2}\,,3)\cup$
$\cup\,(1+\sqrt{6}\,,1+2\sqrt{2})\cup(1+2\sqrt{2}\,,\infty)$.

Lição 12

1. Conjuntos soluções:

(a) $(-\infty\,,9/2\,]$.

(b) $(-\infty\,,-\sqrt{5}\,]\cup[\,\sqrt{5}\,,\infty)$.

(c) $\emptyset$.

(d) $(\,7\,,11\,)$

2. Conjuntos soluções:

(a) $[-\sqrt{11}\,,-\sqrt{7}\,]\cup[\,\sqrt{7}\,,\sqrt{11}\,]$.

(b) $\left[\,0\,,\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2\right)$.

3. Conjuntos soluções:

(a) $[-1\,,3/2\,]$.

(b) $\left(-\infty\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\right)$.

(c) $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

(d) $(-\infty\,,0\,)$.

4. Sinais das expressões e soluções das inequações:

(a) A expressão:
- é positiva em: $(-\infty\,,1\,)\cup(\,5\,,\infty)\,;$
- se anula em: 1 e $5\,;$
- é negativa em: $(\,1\,,5)$.

Conjunto solução: $(\,1\,,5\,)$.

(b) A expressão:
- é positiva em: $(-\infty\,,2\,)\,;$
- se anula em: $2\,;$
- é negativa em: $(\,2\,,\infty)$.

Conjunto solução: $(-\infty\,,2\,)$.

(c) A expressão:
- é sempre positiva;

Conjunto solução: $\emptyset$.

(d) A expressão:
- é positiva em: $(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)\,;$
- se anula em: $-1\,,0$ e $1\,;$
- é negativa em: $(-1\,,0\,)\cup(\,0\,,1\,)$.

Conjunto solução: $(-\infty\,,-1\,)\cup(\,1\,,\infty)$.

5. Conjuntos soluções:

(a) $(\,0\,,1\,)$.

(b) $(-\infty\,,0\,]$.

(c) $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2}\,,0\right]\cup\left[1\,,\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

(d) $(-\infty\,,-\sqrt[3]{2}\,)\cup(\,0\,,1\,)$.

6. (a) Nenhuma solução.

(b) Uma infinidade de soluções pois todo inteiro não positivo é solução.

(c) Temos quatro soluções inteiras, a saber: $-1\,,0\,,1$ e 2.

(d) Uma infinidade de soluções pois todo inteiro menor ou igual a -2 é solução.

7. (a) A expressão $x - \frac{x}{x-1}$:

- é positiva em: $(\,0\,,1\,) \cup (\,2\,,\infty)$;
- se anula em: 0 e 2 ;
- é negativa em: $(-\infty\,,0\,) \cup (\,1\,,2)$.

Conjunto solução: $[\,0\,,1\,) \cup [\,2\,,\infty)$.

(b) A expressão $\frac{x+2}{x^2-x-6}$:

- é positiva em: $(\,3\,,\infty)$;
- não se anula;
- é negativa em: $(-\infty\,,-2\,) \cup (-2\,,3\,)$.

Conjunto solução: $(-\infty\,,-2\,) \cup (-2\,,3\,)$.

(c) A expressão $\frac{x^3+x-3}{x^3-27} - 1$:

- é positiva em: $(-\infty\,,-24\,) \cup (\,3\,,\infty)$;
- se anula em: -24 ;
- é negativa em: $(-24\,,3\,)$.

Conjunto solução: $(-\infty\,,-24] \cup (\,3\,,\infty)$

(d) A expressão $\frac{x+1}{x^2-1} - x + \frac{1}{x-1}$:

- é positiva em: $(-\infty\,,-1\,) \cup (\,1\,,2\,)$;
- se anula em: -1 e 2 ;
- é negativa em: $(-1\,,1\,) \cup (\,2\,,\infty)$.

Conjunto solução: $[-1\,,1\,) \cup [\,2\,,\infty)$.

8. Conjuntos soluções:

(a) $[\,3/\sqrt{2}\,,3\,]$.

(b) $\emptyset$.

(c) $(-\infty\,,0\,]$.

(d) $[-1\,,-1/2\,) \cup (\,1\,,\frac{3}{2}\,]$.

9. Conjunto solução: $[\,3\,,\infty)$.

10. Conjunto solução: $[-1\,,7/8\,]$.

11. Conjunto solução: $[\,1\,,2\,]$.

12. Conjunto solução: $\left[\,\frac{\sqrt{17}-1}{4}\,,1\,\right]$.

13. Conjunto solução: $(-\infty\,,-3\,) \cup (\,1\,,4\,)$.

14. Conjunto solução: $(-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\,)$.

15. Conjunto solução: $[-2\,,-1\,]$.

16. Conjunto solução: $[\,0\,,\infty)$.

17. Conjuntos soluções:

(a) $[\,1\,,2\,)$.

(b) $\left[\,1+\sqrt{2}\,,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,\right]$.

(c) $(\,2-\sqrt{2}\,,0\,]$.

18. A variável $x \in (\,0\,,\infty)$ só não pode assumir valores no intervalo $(\,0\,,1\,]$.

19. (a) Completando quadrados, temos:

$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) =$

$= x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right]$

$= x\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq \frac{3x}{4}$ quando $x \geq 0$.

(b) Além disso:

$x^3 + x^2 + x = x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \leq \frac{3x}{4}$ quando $x \leq 0$.

20. Completando quadrados obtemos:

$(x^2 - x + 4)(x^2 + 4x + 5) =$

$= \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right]\left[(x+2)^2 + 1\right] \geq \frac{15}{4}$.

21. Para provar o exercício basta mostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$.

Em $(0\,,\infty)$ temos que:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Assim, a expressão $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ para todo $x > 0$. Consequentemente,

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$, como pretendíamos demonstrar.

Note que a expressão assume o valor 2 quando $x = 1 \in (0, \infty)$.

22. Soluções:

(a) 0;

(b) $-1 - \sqrt{5}$ e 2;

(c) $2 \pm \sqrt{5}$;

(d) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{5+\sqrt{29}}{2}$.

23. Conjuntos soluções:

(a) $(0, \infty)$;

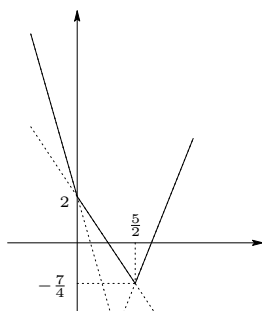
(b) $(-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (2, \infty)$;

(c) $[2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}]$;

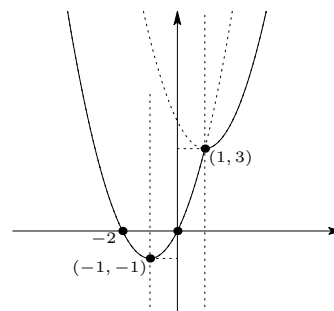
(d) $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{29}}{2}, \infty\right)$.

24. (a) A expressão coincide com:

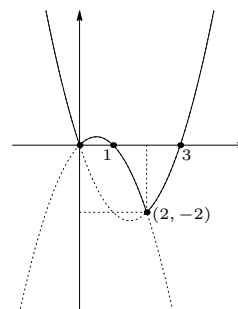
- $-\frac{7x}{2} + 2$ em $(-\infty, 0]$;
- $-\frac{3x}{2} + 2$ em $[0, 5/2]$;
- $\frac{5x}{2} - 8$ em $[5/2, \infty)$.

Gráfico da expressão:

(b) A expressão coincide com:

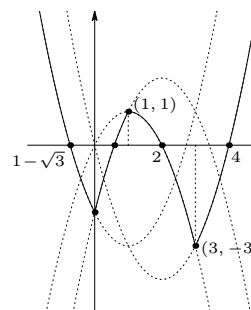
- $x^2 + 2x$ em $(-\infty, 1]$;
- $x^2 - 2x + 4$ em $[1, \infty)$.

Gráfico da expressão:

(c) A expressão coincide com:

- $x^2 - 3x$ em $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$;
- $-x^2 + x$ em $[0, 2]$.

Gráfico da expressão:

(d) A expressão coincide com:

- $x^2 - 2x - 2$ em $(-\infty, 0]$;
- $-x^2 + 4x - 2$ em $[0, 1]$;
- $-x^2 + 2x$ em $[1, 3]$;
- $x^2 - 4x$ em $[3, \infty)$.

Gráfico da expressão:

25. Soluções:

(a) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$;

(b) $-\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e 1 ;

(c) $2 \pm \sqrt{5}$.

26. Conjuntos soluções:

(a) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(b) $\left(-1-\sqrt{3}, -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup (-1+\sqrt{3}, 1)$;

(c) $(-1/2, 2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}, \infty)$.

27. Domínio: $[-2, 0) \cup [2, 4)$.

Zeros: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}$.

28. A expresão:

- é positiva em: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{6}, 4)$;
- se anula em: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}$.
- é negativa em: $[-2, -\sqrt{2}) \cup [2, \sqrt{6})$.

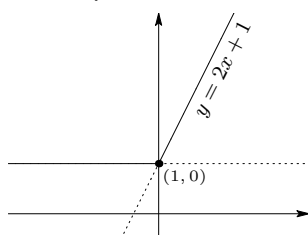
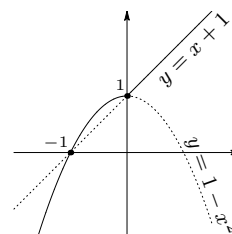
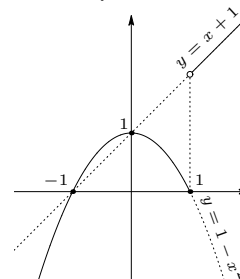
29. Gráfico da expressão:

30. Gráfico da expressão:

31. (a) $E(-1) = 0$, $E(0) = 1$,
, $E(1) = 0$, $E(2) = 3$.

Gráfico da expressão:

Lição 13

1. $A^2 = 4$ e $A = 2$.

2. (a) 10^{-10}.

(b) 10^{-2}.

(c) $\frac{3^3 \times 5}{2}$.

(d) $\frac{5^5}{2^9}$.

3. (a) $3 - \sqrt{2}$.

(b) $\sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$.

(c) $-\sqrt{15}$.

4. (a) 2^5.

(b) $\frac{x}{\sqrt[3]{2}}$.

(c) 3 .

5. 2^{-3}.

6. (a) $x + x^{-1} = 7$.

(b) $x^2 + x^{-2} = 47$.

(c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2}{x^2 + x^{-2} + 3} = \dfrac{2}{5}$.

7. (a) Domínio: $(0, \infty)$;

Para $x \in (0, \infty)$ a expressão tem a forma $x^{7/12}$.

(b) Domínio: $[0, \infty)$;

Para $x \in [0, \infty)$ a expressão tem a forma $x^{21/6}$.

8. (a) Domínio: $(0, \infty)$;

Para $x \in (0, \infty)$ a expressão é constante e igual a 1.

9. Simplificando as expressões obtemos:

(a) $a^{-2/3}\, b^{1/6}$.

(b) $a^{1/6}$.

10. Simplificando, obtemos:

(a) 2^5.

(b) $\frac{1}{x\sqrt[3]{2}}$.

11. (a) $2^2 \times 3^3$.

(b) $2^2 \times 3^2 \times 5^2$.

(c) $-39\sqrt{3}$.

(d) 4.

12. (a) $2^6/3^3$.

(b) $1/2^5$.

(c) $\dfrac{3^2}{2 \times 7^3}$.

13. (a) $2^{11} \times 3^7 \times 11^3$.

(b) $2^{14} \times 3^6 \times 5$.

(c) $2^{11} \times 3^{14} \times 7^2$.

(d) $\dfrac{11^7}{2^3 \times 3^2 \times 19}$.

14. (a) -4.

(b) 5×10^{-5}.

(c) $23/2$.

15. (a) 7.

(b) -2.

16. (a) x^{2m}.

(b) $4/x^4$.

(c) $x/9$.

(d) $4x^{2m+2}$.

17. $-a^2 \times b^5 \times c^{11}$.

18. (a) $\frac{6\ell}{\sqrt{2}}\, cm$.

(b) $\frac{3\sqrt{3}\,\ell^2}{4}\, cm^2$.

19. (a) Existem 6 caminhos com comprimento mínimo.

(b) $\ell\,(1 + \sqrt{2})\, cm$.

20. (a) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

(b) $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$.

21. Soluções:

(1) ± 3 e ± 4.

(2) $3|a|/4$.

(3) $4/3$.

(4) $\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3$.

22. $\left[-\frac{1}{|b|}, \frac{1}{|b|}\right] - \left\{\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}\right\}$.

23. (a) $y = \left(\frac{3+\sqrt{21}}{3}\right)^3$; $x = 2 - \left(\frac{3+\sqrt{21}}{3}\right)^3$

e

$y = \left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right)^3$; $x = 2 - \left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right)^3$.

(b) $y = 36$; $x = 4$ e $y = 4$; $x = 36$.

24. São verdadeiras em:

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}$.

(c) $\{0\}$.

(d) $\mathbb{R}$.

(e) $[1, \infty)$.

(f) $[1, \infty)$.

(g) $\mathbb{R}$.

25. Vimos uma regra que diz:

$$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$$

quando todas as potências envolvidas estão definidas. No nosso caso, a igualdade

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = x^1 = (x^{\frac{1}{2}})^2$$

não é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$ pois $x^{1/2}$ não está bem definido para $x < 0$. Ela é verdadeira apenas para $x \geq 0$. Por isso perdemos a solução $x = -2$.

26. (a) Falso.
Contra-exemplo: tome $x = -1$.

(b) Verdadeira.

(c) Verdadeira.

(d) Verdadeira.

27. (a) $-1^x = -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, o domínio dessa expressão é toda a reta.

(b) A base é sempre negativa e o expoente assume valores racionais e irracionais. Logo, segundo nossa convenção o domínio dessa expressão é o conjunto vazio.

(c) $(-\infty, 0)$.

(d) $\mathbb{R}$.

(e) $\mathbb{R}$.

(f) $(-1/2, \infty)$.

28. A expressão:

- é positiva em: $(-\infty, -1) \cup (-1/16, 0) \cup (0, 1/16)$;
- é negativa em: $(-1, -1/16) \cup (1/16, \infty)$;
- se anula em: 0 e $\pm 1/16$;
- só não está definida para $x = -1$.

Lição 14

1. (a) 7.

(b) 5.

(c) -4.

(d) $5/2$.

(e) 2.

(f) $4/3$.

2. (a) ± 6.

(b) 0 e $3/2$.

(c) ± 1.

(d) -5.

3. (a) $1/2$.

(b) 5.

(c) $\pm\sqrt{2}/2$.

(d) -5.

4. 1.

5. 6.

6. -2.

7. (a) Verdadeira.

(b) Falsa.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa.

(e) Verdadeira.

(f) Falsa.

(g) Verdadeira.

(h) Verdadeira.

8. Conjuntos soluções:

(a) $(0,\infty)$.

(b) $[0,\infty)$.

(c) $(-\infty,0)$.

(d) $(-\infty,0]$.

9. (a) -1.

(b) $0,1,3$ e $1\pm\sqrt{3}$.

10. (a) $1<\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{5}{3}<\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}$.

(b) $0{,}5^{\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}<0{,}5^{\frac{5}{3}}<0{,}5^{\frac{2}{\sqrt{3}}}<0{,}5$.

(c) $5<5^{\frac{2}{\sqrt{3}}}<5^{\frac{5}{3}}<5^{\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}$.

(d) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}<$
$<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{3}}<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}$.

11. (a) $-\pi^2<-9{,}2<-\sqrt{82}<-\frac{\pi}{\sqrt{0{,}5}}$.

(b) $5^{-\pi^2}<5^{-9{,}2}<5^{-\sqrt{82}}<5^{-\frac{\pi}{\sqrt{0{,}5}}}$.

(c) $0{,}2^{-\frac{\pi}{\sqrt{0{,}5}}}<0{,}2^{-\sqrt{82}}<$
$<0{,}2^{-9{,}2}<0{,}2^{-\pi^2}$.

(d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\frac{\pi}{\sqrt{0{,}5}}}<$
$<\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{82}}<$
$<\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-9{,}2}<\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^{-\pi^2}$.

12. Conjuntos soluções:

(a) $[-5,-1)\cup(-1,3]$.

(b) $[-1,1]$.

(c) $(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{2}}\,]\cup[\sqrt{1+\sqrt{2}}\,,\infty)$.

(d) $\mathbb{R}$.

13. (a) A expressão satisfaz:

- está bem definida em toda a reta;
- é positiva em: $(-3,0)\cup(5,\infty)$;
- se anula em: $-3,0$ e 5;
- é negativa em: $(-\infty,-3)\cup(0,5)$.

(b) A expressão satisfaz:

- está bem definida em toda a reta;
- é positiva em: $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}}\right)\cup$
$\cup\left(-\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}},\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}}\right)$;
- se anula em: $\pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}}$;
- é negativa em: $\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}},\infty\right)$.

(c) A expressão satisfaz:

- está bem definida em: $\mathbb{R}$.
- é positiva em: $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$;
- se anula em: 1 e 2;
- é negativa em: $(1,2)$.

14. $\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$.

15. Conjunto solução: $\left[\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right]$.

16. Conjunto solução:
$\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\infty\right)$.

17. A equação:

- não tem solução quando $a<-49/4$;
- tem uma única solução quando $a=-49/4$, a saber: $(7/2)^{2/3}$;
- tem duas soluções distintas quando $-49/4<a<0$: $\left(\frac{7\pm\sqrt{49+4a}}{2}\right)^{2/3}$;
- tem uma única solução quando $a>0$: $\left(\frac{7+\sqrt{49+4a}}{2}\right)^{2/3}$;

Lição 15

1. (a) Domínio: $\mathbb{R}^*$.
A expressão é ímpar.

(b) Domínio: $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
A expressão é ímpar.

(c) Domínio: $\mathbb{R}$.
A expressão é par.

(d) Domínio: $\mathbb{R}^*$.
A expressão é ímpar.

(e) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\,,\pm 1\}$.
A expressão é par.

(f) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\,,\pm 1\}$.
A expressão é par.

2. (a) Não é par nem ímpar pois:

- $x^3 - 1\big]_{x=1} = 0$
- $x^3 - 1\big]_{x=-1} = -2\,.$

(b) Não é par nem ímpar pois o domínio $\big(\mathbb{R} - \{1\}\big)$ não é simétrico em relação a origem.

(c) Não é par nem ímpar pois:

- $\sqrt[3]{x - |x|}\,\Big]_{x=1} = 0$
- $\sqrt[3]{x - |x|}\,\Big]_{x=-1} = -\sqrt[3]{2}\,.$

(d) Não é par nem ímpar pois:

- $\frac{x+2}{|x|}\Big]_{x=1} = 3$
- $\frac{x+2}{|x|}\Big]_{x=-1} = 1\,.$

(e) Não é par nem ímpar pois o domínio $\big(\mathbb{R} - \{0\,,1\}\big)$ não é simétrico em relação a origem.

(f) Note que $(x-2)(1-x^2)\big]_{x=1} = 0$ e $(x-2)(1-x^2)\big]_{x=-1} = 0\,.$ No entanto, a expressão não é par nem ímpar pois:

- $(x-2)(1-x^2)\big]_{x=2} = 0$
- $(x-2)(1-x^2)\big]_{x=-2} = 12\,.$

3. Seja $G(x) = E(x) + F(x)$. Por construção os domínios dessas três expressões são iguais. Assim, se os domínios de $E(x)$ e $F(x)$ são simétricos em relação a origem então o de $G(x)$ também o será.

(a) Suponha que $E(x)$ e $F(x)$ são expressões pares. Nesse caso os domínios de $E(x)\,, F(x)$ e $G(x)$ são simétricos em relação a origem e temos:

$$G(-x) = E(-x) + F(-x) = \\ = E(x) + F(x) = G(x).$$

Isso mostra que $G(x)$ é par.

(b) Suponha que $E(x)$ e $F(x)$ são expressões ímpares. Novamente, nesse caso os domínios de $E(x)\,, F(x)$ e $G(x)$ são simétricos em relação a origem e temos:

$$G(-x) = E(-x) + F(-x) = \\ = -E(x) - F(x) = -G(x).$$

Isso mostra que $G(x)$ é ímpar.

4. Seja $G(x) = E(x) \times F(x)$. Como no exercício anterior, por construção os domínios dessas três expressões são iguais. Assim, se os domínios de $E(x)$ e $F(x)$ são simétricos em relação a origem então o de $G(x)$ também o será.

No que segue estaremos supondo que $E(x)$ e $F(x)$ são pares ou ímpares o que nos permite concluir que os domínios de $E(x)\,, F(x)$ e $G(x)$ são simétricos em relação a origem.

(a) Suponha que $E(x)$ e $F(x)$ são expressões pares. Nesse caso, temos:

$$G(-x) = E(-x) \times F(-x) = \\ = E(x) \times F(x) = G(x).$$

Isso mostra que $G(x)$ é par.

(b) Suponha que $E(x)$ e $F(x)$ são expressões ímpares. Nesse caso, temos:

$$G(-x) = E(-x) \times F(-x) = \\ = \big(-E(x)\big) \times \big(-F(x)\big) = G(x).$$

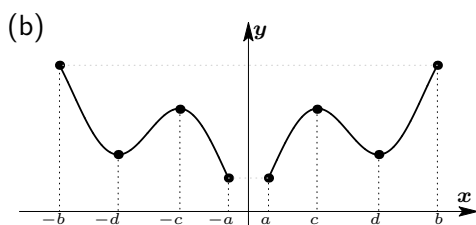
Isso mostra que $G(x)$ é par.

(c) Suponha que $E(x)$ é par e que $F(x)$ é ímpar. Nesse caso, temos:

$$G(-x) = E(-x) \times F(-x) = \\ = E(x) \times \big(-F(x)\big) = -G(x).$$

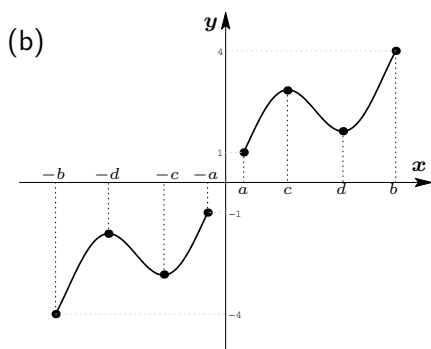
Isso mostra que $G(x)$ é ímpar.

5. (a) $[-b\,,-a\,] \cup [\,a\,,b\,]$ onde $0 < a < b$.

(b)

(c) A expressão é crescente nos intervalos $[-d\,,-c\,]\,,[\,a\,,c\,]$ e $[\,d\,,b\,]$.

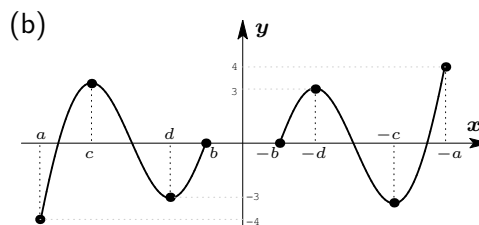
(d) A expressão é decrescente nos intervalos $[-b\,,-d\,]\,,[-c\,,-a\,]$ e $[\,c\,,d\,]$.

6. (a) $[-b\,,-a\,] \cup [\,a\,,b\,]$ onde $0 < a < b$.

(b)

(c) A expressão é crescente nos intervalos $[-b\,,-d\,]\,,[\,-c\,,-a\,]\,,[\,a\,,c\,]$ e $[\,d\,,b\,]$.

(d) A expressão é decrescente nos intervalos $[-d\,,-c\,]$ e $[\,c\,,d\,]$.

7. (a) $[\,a\,,b\,] \cup [-b\,,-a\,]$ onde $a < b < 0$.

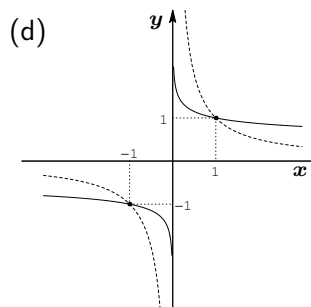
(b)

(c) A expressão é crescente nos intervalos $[\,a\,,c\,]\,,[\,d\,,b\,]\,,[-b\,,-d\,]$ e $[-c\,,-a\,]$.

(d) A expressão é decrescente nos intervalos $[\,c\,,d\,]$ e $[-d\,,-c\,]$.

8. (a) $(-\infty\,,-1\,) \cup (\,0\,,1\,)$.

(b) $(-1\,,0\,) \cup (\,1\,,\infty)$.

(c) ± 1.

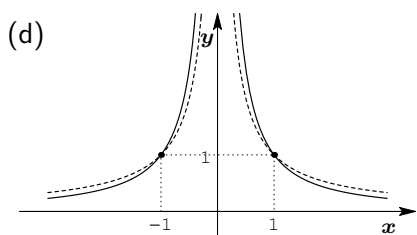
(d)

O gráfico da expressão $1/x$ está pontilhado.

Muito importante: Note que, dentre essas duas expressões, o gráfico da expressão $1/\sqrt[5]{x}$ se aproxima muito mais rapidamente do eixo vertical quando a variável x se aproxima de zero. No entanto, o gráfico da expressão $1/\sqrt[5]{x}$ nunca toca o eixo vertical.

9. (a) $(-\infty\,,-1\,) \cup (\,1\,,\infty)$.

(b) $(-1\,,0\,) \cup (\,0\,,1\,)$.

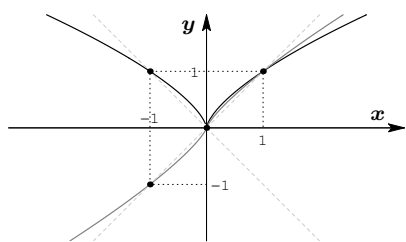
(c) ± 1.

(d)

O gráfico da expressão $1/|x|$ está pontilhado.

10. (a) $x^{2/3}$ domina $x^{5/7}$ em $(-\infty\,,1\,]$;

$x^{5/7}$ domina $x^{2/3}$ em $[\,1\,,\infty)$.

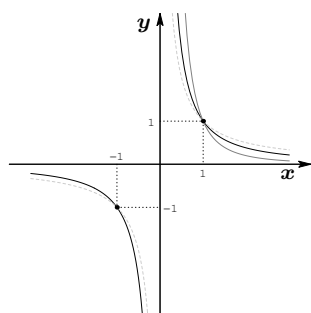
Coincidem em 0 e 1.

O gráfico dessas expressões são mostrados na figura a seguir.

O gráfico da expressão $x^{2/3}$ tem traço contínuo mais escuro e o da expressão $x^{5/7}$ é o de traço mais claro. Os gráficos pontilhados são das expressões $\pm x$.

(b) $x^{-29/18}$ domina $x^{-7/5}$ em $(\,0\,,1\,]$;

$x^{-7/5}$ domina $x^{-29/18}$ em $[\,1\,,\infty)$.

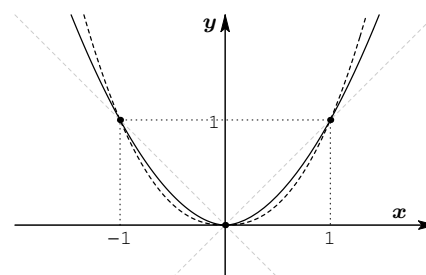
Coincidem no ponto 1.

O gráfico dessas expressões são mostrados na figura a seguir.

O gráfico da expressão $x^{7/5}$ tem traço contínuo mais escuro e o da expressão $x^{29/18}$ é o de traço mais claro. O gráfico pontilhado é o da expressão $1/x$. Note que a expressão $x^{29/18}$ não está definida à esquerda da origem.

(c) $|x|^{\pi/\sqrt{2}}$ domina $|x|^{\sqrt{11/2}}$ em $[-1\,,1\,]$;

$|x|^{\sqrt{11/2}}$ domina $|x|^{\pi/\sqrt{2}}$ em $(-\infty\,,-1\,]\cup[\,1\,,\infty)$.

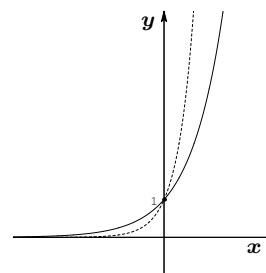
Coincidem em $0\,,-1$ e 1.

O gráfico dessas expressões são mostrados na figura a seguir.

O gráfico da expressão $|x|^{\pi/\sqrt{2}}$ tem traço contínuo e o da expressão $x^{\sqrt{11/2}}$ está tracejado. Os gráficos pontilhados são das expressões $\pm x$.

(d) π^{2x} domina π^{x} em $[\,0\,,\infty)$;

π^{x} domina π^{2x} em $(-\infty\,,0\,]$.

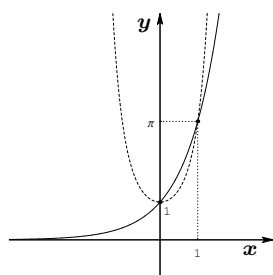
Coincidem em 0.

O gráfico dessas expressões são mostrados na figura a seguir.

O gráfico da expressão π^x tem traço contínuo e o gráfico da expressão π^{2x} está pontilhado. Note que essas expressões se aproximam da reta horizontal quando x tende para $-\infty$. No entanto, o gráfico dessas expressões nunca toca o eixo horizontal; estão sempre acima desse eixo.

(e) π^{x^2} domina π^x em $(-\infty\,,0]\cup[1\,,\infty)$;

π^x domina π^{x^2} em $[0\,,1]$.

Coincidem em 0 e 1.

O gráfico dessas expressões são mostrados na figura a seguir.

O gráfico da expressão π^x tem traço contínuo e o gráfico da expressão π^{x^2} está pontilhado. Como no exercício anterior, o gráfico da expressão π^x nunca toca o eixo horizontal; está sempre acima desse eixo.

11. Os gráficos dessas expressões já foram exibidos no exercício anterior.

12. (a) $[-5\,,-1)\cup(-1\,,3]$.

(b) $(-\infty\,,-1]\cup[1\,,\infty)$.

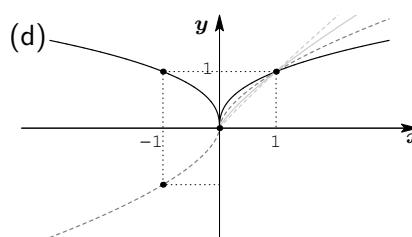
(c) A expressão $(1-x^2)^{3/2}$ não domina $\sqrt{3}$ em nenhum ponto.

(d) $(-\infty\,,0]\cup[4\,,\infty)$.

13. (a) Os domínios são: $\mathbb{R}$ para as duas primeiras e $[0\,,\infty)$ para as outras duas.

(b) $x^{\sqrt{2}/\sqrt{3}} < x^{\pi/4} < x^{2/3} < x^{3/5}$ em $(0\,,1)$;

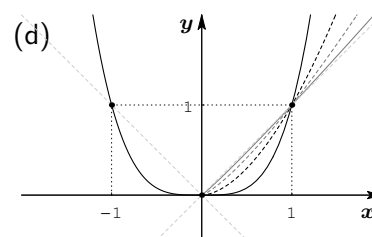
(c) $x^{3/5} < x^{2/3} < x^{\pi/4} < x^{\sqrt{2}/\sqrt{3}}$ em $(1\,,\infty)$.

(d)

O gráfico de $x^{3/5}$ é o de traço contínuo escuro, o de $x^{2/3}$ é o de tracejado escuro, o de $x^{\pi/4}$ é o contínuo claro (definido apenas para $x \geq 0$) e o de $x^{\sqrt{2}/\sqrt{3}}$ é o tracejado claro (também definido apenas para $x \geq 0$).

14. (a) Os domínios são: $\mathbb{R}$ para a segunda e $[0\,,\infty)$ para as outras.

(b) $x^{5/3} < x^{3/2} < x^{4/\pi} < x^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$ em $(0\,,1)$;

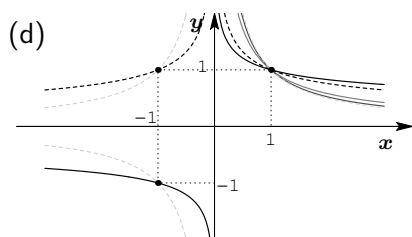
(c) $x^{\sqrt{3}/\sqrt{2}} < x^{4/\pi} < x^{3/2} < x^{5/3}$ em $(1\,,\infty)$.

(d)

O gráfico de $x^{5/3}$ é o de traço contínuo escuro, o de $x^{3/2}$ é o de tracejado escuro (definido apenas para $x \geq 0$), o de $x^{4/\pi}$ é o tracejado claro (definido apenas para $x \geq 0$) e o de $x^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$ é o contínuo claro (também definido apenas para $x \geq 0$). Também esboçamos os gráfico de $\pm x$ na figura.

15. (a) Os domínios são: $\mathbb{R}^*$ para as duas primeiras e $(0,\infty)$ para as outras duas.

(b) $x^{-3/5} < x^{-2/3} < x^{-\pi/4} < x^{-\sqrt{2}/\sqrt{3}}$ em $(0,1)$.

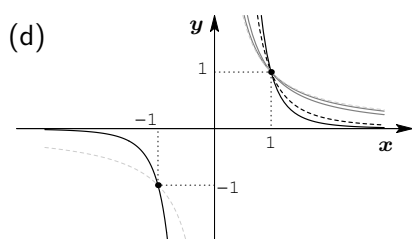
(c) $x^{-\sqrt{2}/\sqrt{3}} < x^{-\pi/4} < x^{-2/3} < x^{-3/5}$ em $(1,\infty)$.

(d)

O gráfico de $x^{-3/5}$ é o de traço contínuo escuro, o de $x^{-2/3}$ é o tracejado escuro (definido apenas para $x \geq 0$).

16. (a) Os domínios são: $\mathbb{R}^*$ para a segunda e $(0,\infty)$ para as outras.

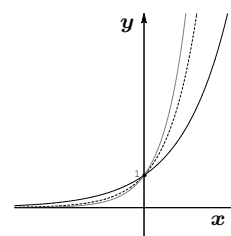
(b) $x^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}} < x^{-4/\pi} < x^{-3/2} < x^{-5/3}$ em $(0,1)$;

(c) $x^{-5/3} < x^{-3/2} < x^{-4/\pi} < x^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$ em $(1,\infty)$.

(d)

O gráfico de $x^{-5/3}$ é o de traço contínuo escuro, o de $x^{-3/2}$ (definido para $x > 0$) é o de tracejado escuro; os outros dois gráficos em traço contínuo claro são os de $x^{-4/\pi}$ e $x^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$. Note que o gráfico da expressão $x^{-5/3}$ se aproxima mais rapidamente do eixo horizontal do que as outras expressões quando a variável x tende para infinito. No entanto, o gráfico dessa expressão nunca toca o eixo horizontal já que tais expressões são sempre positivas.

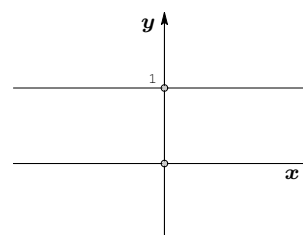
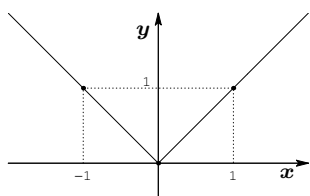
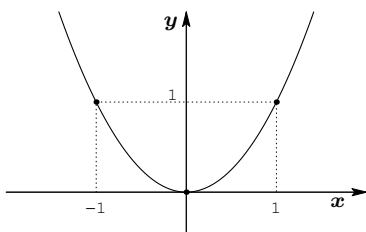
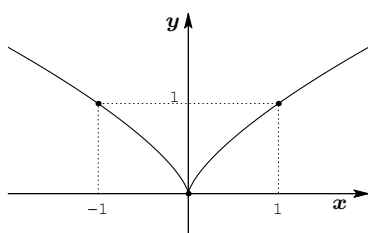
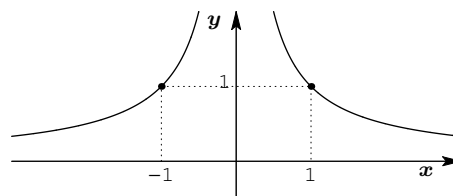
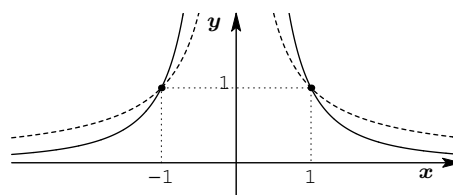
17. Os gráficos estão nos respectivos exercícios.

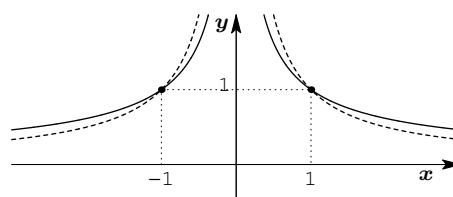
18. O domínios das expressões é $\mathbb{R}$. Além disso,

- $2^x < 3^x < 4^x$ em $(0,\infty)$;
- $2^x > 3^x > 4^x$ em $(-\infty,0)$.

O gráfico da expressão 2^x é o de traço contínuo mais escuro; o de 3^x é o pontilhado e o contínuo mais claro é o da expressão 2^{2x}. Essas expressões coincidem quando $x = 0$. Note que essas expressões se aproximam do eixo horizontal quando x tende para $-\infty$. No entanto, seus gráficos nunca tocam o eixo horizontal.

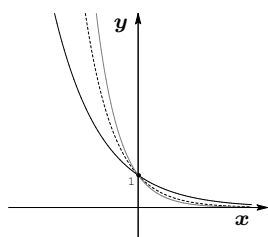
19. Domínio:

- $\mathbb{R}$ quando $a \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$;
- $\mathbb{R}^*$ quando $a \in [-2,2]$.

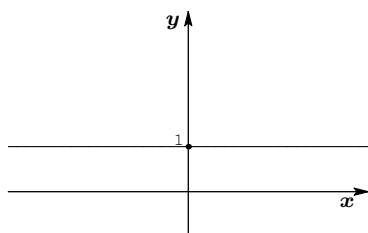
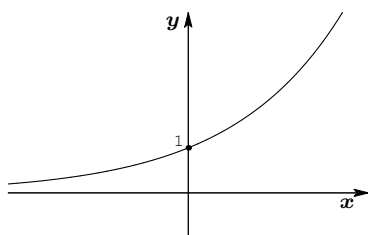
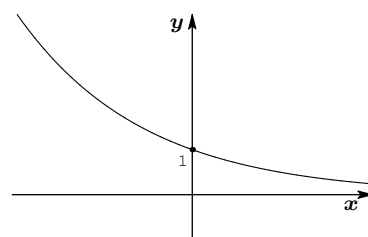
• Para $a = \pm 2$: a expressão tem a forma $E(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a = \pm\sqrt{5}$: a expressão tem a forma $E(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é exibido na figura a seguir.

• Para $a \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$: a expressão tem a forma $E(x) = |x|^{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $\alpha > 1$. O esboço do seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a \in (-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$: a expressão tem a forma $E(x) = |x|^{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $0 < \alpha < 1$. O esboço do seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a = \pm\sqrt{3}$: a expressão tem a forma $E(x) = 1/|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. O esboço do seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$: a expressão tem a forma $E(x) = 1/|x|^{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ onde $\alpha > 1$. O esboço do seu gráfico (em traço contínuo) é mostrado a seguir. A título de comparação, esboçamos também o gráfico de $1/|x|$.

• Para $a \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$: a expressão tem a forma $E(x) = 1/|x|^{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ onde $0 < \alpha < 1$.

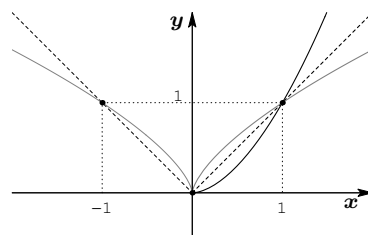
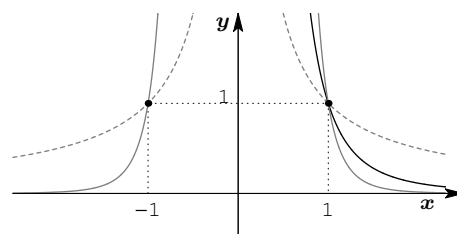
O esboço do seu gráfico (em traço contínuo) é mostrado a seguir. A título de comparação, esboçamos também o gráfico de $1/|x|$.

20. O domínios das expressões é $\mathbb{R}$. Além disso,

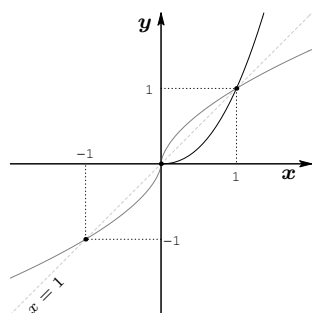
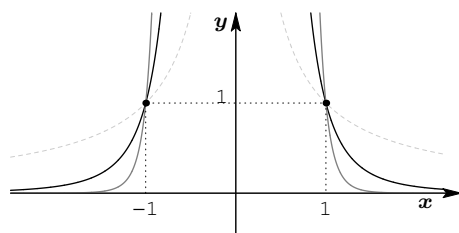
- $2^{-x} > 3^{-x} > 4^{-x}$ em $(0, \infty)$;
- $2^{-x} < 3^{-x} < 4^{-x}$ em $(-\infty, 0)$.

Na figura a seguir o gráfico em linha contínua escura é o gráfico de 2^{-x}; o de 3^{-x} está pontilhado e o traço contínuo mais claro é o gráfico de 2^{-2x}.

21. O domínio é $\mathbb{R}$ qualquer que seja o valor do parâmetro a.

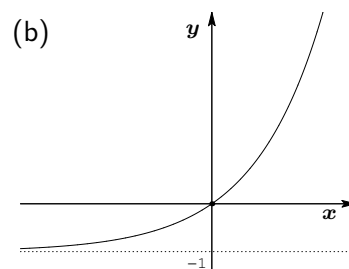
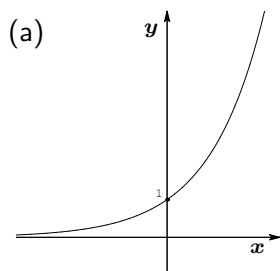
Gráficos:

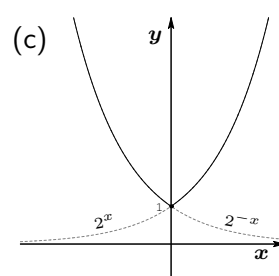
• Para $a = \pm 1$: a expressão tem a forma $E(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$: a expressão tem a forma $E(x) = \left(2^{a^2-1}\right)^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $2^{a^2-1} > 1$, já que $a^2 - 1 > 0$. Seu gráfico é mostrado a seguir.

• Para $a \in (-1, 1)$: a expressão tem a forma $E(x) = \left(2^{a^2-1}\right)^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $0 < 2^{a^2-1} < 1$. Seu gráfico é mostrado a seguir.

22. (a) $x^{\sqrt{3}} < x^{2/3} < x^{-\pi} < x^{-4}$ em $(0, 1)$

(b) Os domínios são, respectivamente: $\mathbb{R}, [0, \infty)$ e $\mathbb{R}$. E os gráficos são mostrados a seguir. O traço contínuo mais escuro é o do gráfico de $x^{\sqrt{3}}$; o tracejado é gráfico de $|x|$ e o contínuo mais claro é de $x^{2/3}$.

(c) Os domínios são, respectivamente: $\mathbb{R}^*, (0, \infty)$ e $\mathbb{R}^*$. E os gráficos são mostrados a seguir. O traço contínuo mais escuro é o do gráfico de $x^{-\pi}$; o tracejado é gráfico de $1/|x|$ e o contínuo mais claro é de $1/x^4$. Note que o gráfico de $1/x^4$ se aproxima rapidamente do eixo horizontal. No entanto, ele nunca toca tal eixo pois $1/x^4$ é sempre positivo.

23. (a) $x^{-12} < x^{-2\pi} < x^{-1} < 1 < x^{3/5} < < x < x^{\sqrt{5}}$ em $(1, \infty)$.

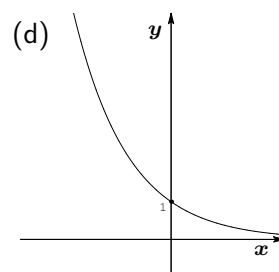
(b) Os domínios são, respectivamente: $\mathbb{R}\,,[\,0\,,\infty)$ e $\mathbb{R}$. E os gráficos são mostrados a seguir. O traço contínuo mais escuro é o do gráfico de $x^{\sqrt{5}}$ e o contínuo mais claro é de $x^{3/5}$.

(c) Todas as expressões têm $\mathbb{R}^*$ como domínio. Seus gráficos são mostrados a seguir. O traço contínuo mais escuro é o do gráfico de $(x^2)^{-\pi}$; o tracejado é gráfico de $1/|x|$ e o contínuo mais claro é de $1/x^{12}$. Note que o gráfico de $1/x^{12}$ se aproxima rapidamente do eixo horizontal. No entanto, ele nunca toca tal eixo.

24. Todas as expressões têm $\mathbb{R}$ como domínio.

(a)

(b)

Esse gráfico foi obtido transladando verticalmente de -1 o gráfico do item (a). Note que esse gráfico se aproxima da reta horizontal de equação $x = -1$ quando $x \to -\infty$ pois o gráfico do item (a) se aproxima do eixo horizontal quando $x \to -\infty$.

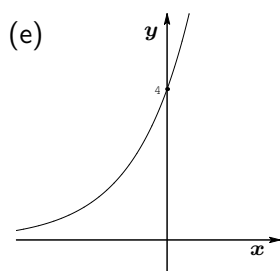
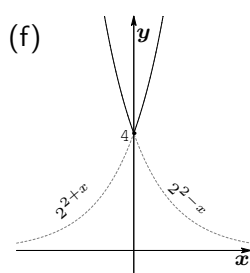
(c)

Esse gráfico é obtido refletindo, em relação ao eixo vertical, a parte do gráfico de 2^x que está à direita do eixo vertical. Note que:

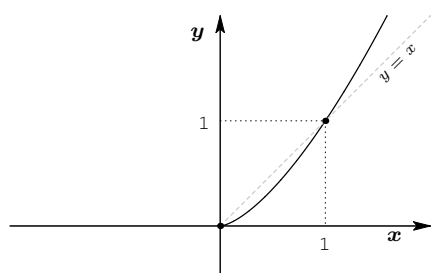
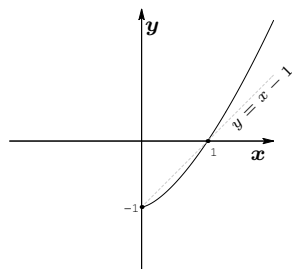
$$2^{|x|} = \begin{cases} 2^x & \text{quando} \quad x \geq 0 \\ 2^{-x} & \text{quando} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

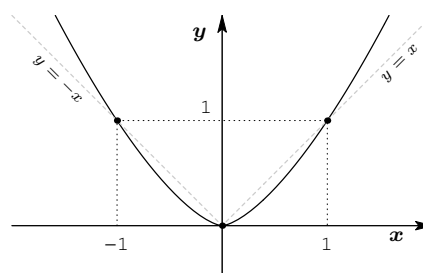
(d)

Esse gráfico é obtido refletindo, em relação ao eixo vertical, o gráfico de 2^x.

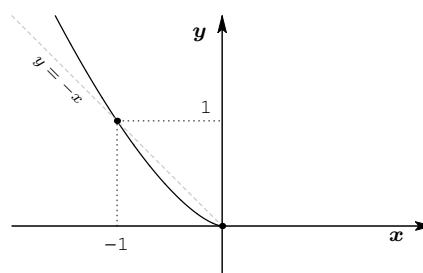
(e)

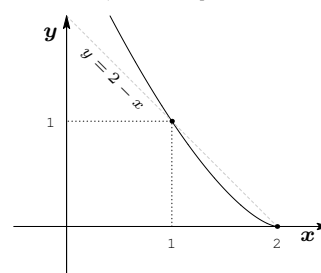
Esse gráfico é obtido transladando horizontalmente de -2 o gráfico de 2^x.

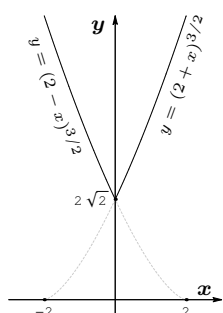
(f)

Esse gráfico coincide com o gráfico de 2^{2+x} quando $x \geq 0$ (feito no item anterior) e com o gráfico de 2^{2-x} quando $x \leq 0$. Por sua vez, o gráfico de 2^{2-x} é obtido transladando horizontalmente de 2 o gráfico de 2^{-x}.

25. (a) Domínio: $[0, \infty)$.

(b) Domínio: $[0, \infty)$.

Esse gráfico é obtido transladando verticalmente de -1 o gráfico do item anterior.

(c) Domínio: $\mathbb{R}$.

Esse gráfico é obtido juntando-se ao gráfico de $x^{3/2}$ o seu refletindo em relação ao eixo vertical. Note que a expressão $|x|^{3/2}$ é par.

(d) Domínio: $(-\infty, 0]$.

Esse gráfico é obtido refletindo o gráfico de $x^{3/2}$ em relação ao eixo vertical. De fato ele é a parte à esquerda da origem no gráfico da expressão $|x|^{3/2}$.

(e) Domínio: $(-\infty, 2]$.

Esse gráfico é obtido transladando-se horizontalmente de 2 o gráfico de $-x^{3/2}$.

(f) Domínio: $\mathbb{R}$.

Note que a expressão é par e tem a forma $(2+x)^{3/2}$ quando $x \geq 0$ a qual já descrevemos como construir a partir do gráfico de $x^{3/2}$. À esquerda da origem, o gráfico é o refletido em relação ao eixo das ordenadas do gráfico de $(2+x)^{3/2}$ quando $x \geq 0$.

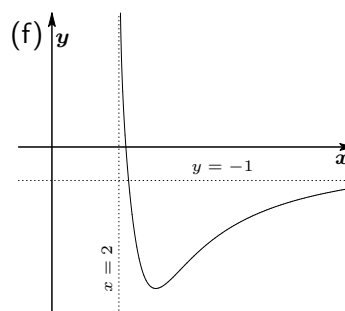
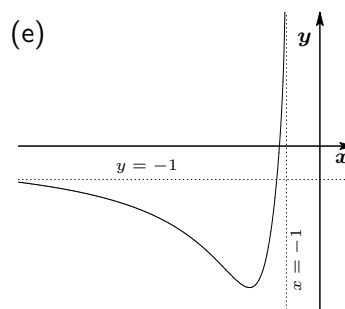
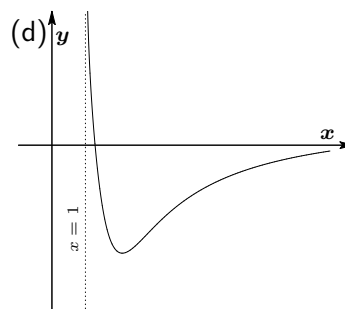
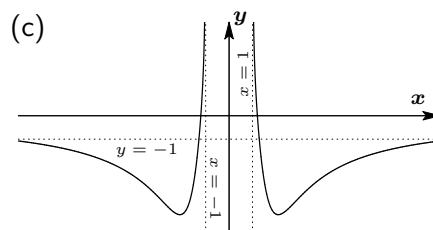
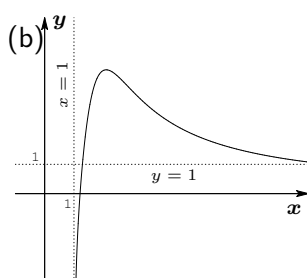
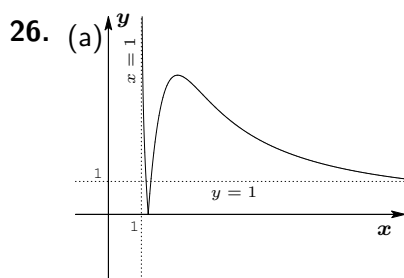
26. (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Lição 16

1. $-\frac{2\times 7^4}{3}$

2. $-2^{101}/5$

3. $2^{20}\times 5^{7/3}$

4. As progressões geométricas dadas são convergentes e suas somas valem os termos do meio nas desigualdades a seguir.

(a) $\frac{14}{3} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} < 15.$

(b) $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}} < \frac{15}{26}$.

5. O produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica pode ser escrito das seguintes formas:

$P_n = a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times \cdots \times a_1 r^{n-1}$

$P_n = a_n \times \dfrac{a_n}{r} \times \dfrac{a_n}{r^2} \times \cdots \times \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$.

Logo,

$P_n^2 = (a_1 a_n) \times (a_1 a_n) \times \cdots \times (a_1 a_n)$

onde o fator $a_1 a_n$ aparece n vezes. Portanto, $P_n^2 = (a_1 a_n)^n$ e consequentemente, $P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$ como queríamos provar.

6. (a) Está bem definida quando $x \in (-1\,,1\,)$ e vale $\frac{x}{1-x^2}$.

(b) Está bem definida quando $x \in (-\infty\,,-1) \cup (\,1\,,\infty)$ e vale $\frac{x}{x-1}$.

(c) Está bem definida quando $x \in (-1\,,1\,)$ e vale $x - \frac{2x^3}{1-x^4} + \frac{3x^5}{1-x^4}$.

7. Conjunto solução: $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\right)$.

8. A equação tem uma única solução, a saber, $x = 0$.

9. (a) $[\,0\,,1\,)$.

(b) $(\,0\,,1\,)$.

10. O n-ésimo termo vale:

(1) ar^{n-1};

(2) $a_2\,r^{n-2}$ onde a_2 denota o segundo termo da progressão geométrica;

(3) $a_3\,r^{n-3}$ onde a_3 denota o terceiro termo da progressão geométrica.

E o $(n+k)$-ésimo termo vale:

(4) $a_k\,r^n$ onde a_k denota o k-ésimo termo da progressão geométrica.

11. Sem comentários !!!

12. (1) 1;

(2) $1/(a-1)$ desde que $|a| > 1$;

(3) $1/(|a|-1)$ desde que $|a| > 1$;

(4) $1/(|a|+1)$ desde que $|a| > 1$;

(5) $1/(a+1)$ desde que $|a| > 1$.

13. Sem comentários !!

14. (1) a;

(2) $\sqrt[3]{a^2 b}$;

(3) $a^{1/(n-1)}$;

(4) $(a^n b)^{1/(n^2-1)}$.

15. A equação tem uma única solução, a saber, $x = 24$.

16. A equação tem uma única solução, a saber, $x = 3 - \sqrt{5}$.

17. Conjunto solução: $(-2\,,3-\sqrt{5})$.

18. Para $-1 < a\,,b < 1$ temos que:

- $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots = \frac{1}{1-a}$
- $B = 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots = \frac{1}{1-b}$.

Calculando a expressão a seguir, obtemos:

$$\frac{AB}{A+B-1} = \frac{\frac{1}{(1-a)(1-b)}}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} - 1} =$$

$$= \frac{1}{1-b+1-a-(1-a)(1-b)} =$$

$$= \frac{1}{1-ab} = 1 + ab + a^2b^2 + a^3b^3 + \cdots$$

provando o que pretendíamos.

19. (a) $\frac{1-x^{2n+2}}{(1+x)(1-x^{n+1})}$ desde que $x \neq \pm 1$;

(b) $\frac{1-x^{3n+3}}{(1+x+x^2)(1-x^{n+1})}$ desde que $x \neq \pm 1$;

(c) $\frac{1}{1+x+x^2}$ desde que $|x| < 1$;

(d) $\frac{1}{1-x+x^2}$ desde que $|x| < 1$;

(e) $\frac{1}{1-x}$ desde que $|x| < 1$.

20. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

21. $\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$.

22. $\big(\sqrt{b^2+4a}-b\big)/2$.

23. $82/3$.

24. 65 .

25. A soma vale n^2.

26. $\frac{1}{x}-1$ para todo $x \in (\,0\,,2)$.

27. Domínio: $(-1\,,1\,)$.

28. Sem comentários !!!

29. Nesta solução usaremos, repetidamente, a seguinte observação: se $a\,,b$ são números reais positivos então,

$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$.

Sejam dados $a > 0$ e um inteiro $n \geq 2$. Assim,

$(1+a)^2 = (1+a)(1+a) > 1+2a$.

Agora, como $1+a > 0$ segue da observação colocada acima que:

$$
\begin{aligned}
(1+a)^3 &> (1+2a)(1+a) > 1+3a \\
(1+a)^4 &> (1+3a)(1+a) > 1+4a \\
(1+a)^5 &> (1+4a)(1+a) > 1+5a \\
(1+a)^6 &> (1+5a)(1+a) > 1+6a \\
(1+a)^7 &> (1+6a)(1+a) > 1+7a \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente. Desta forma concluiremos que

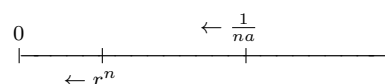
$$(1+a)^n > 1+na$$

quando $a > 0$ e $n \geq 2$.

30. Seja $0 < r < 1$. Assim, r pode ser escrito na forma $r = 1/(1+a)$ onde $a > 0$. Consequentemente, segue da desigualdade do exercício anterior que:

$$r^n = \Big(\frac{1}{1+a}\Big)^n < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}.$$

0 $\qquad \leftarrow \frac{1}{na}$

$\leftarrow r^n$

E essa desigualdade nos garante que r^n tende para zero a medida que n cresce indefinidamente pois $\frac{1}{na}$ tem esse propriedade e, r^n é positivo e menor do que $\frac{1}{na}$.

Se $-1 < r < 0$ então podemos escrever r na forma $r = -1/(1+a)$ onde $a > 0$. Nesse caso, teremos:

$$r^n = (-1)^n\Big(\frac{1}{1+a}\Big)^n$$

que também tende para zero quando n cresce indefinidamente pois

$$\Big(\frac{1}{1+a}\Big)^n$$

tem essa propriedade. Note que r^n é positivo quando n é par e negativo quando n é ímpar. Assim, r^n oscila em torno da origem e a *amplitude de oscilação* tende para zero quando n cresce indefinidamente.

Aqui estamos entendendo que a *amplitude de oscilação* nada mais é do que a distância de r^n a origem.

Se $r = 0$, evidentemente, r^n tende para zero quando n cresce indefinidamente pois $r^n = 0$ nesse caso.

Assim, provamos que r^n tende para zero quando $-1 < r < 1$ e n cresce indefinidamente.

Bibliografia

[1] T.M. Apostol, *Calculus*, Vol. I, 2ª Ed., John Wiley & Sons, 1967.

[2] T.M. Apostol, *Irracionality of the square root of two - A geometric proof*, The American Mathematical Monthly **107**, No 9 (2000) 841–842.

[3] P.R. Halmos, *Teoria ingênua dos conjuntos*, Ed. USP, São Paulo, 1970.

[4] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, 1997.

[5] E.L. Lima, *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993.

[6] E.L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, 1989.

[7] E.L. Lima, *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

[8] E.L. Lima, *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

[9] R.G. Bartle, *Elementos de Análise Real*, Ed. Campus, RJ (1983).

[10] W. Rudin, *Princípios de Análise Matemática*, Ed. UnB e Ed. Ao Livro Técnico, 1971.

[11] G.S. Mózer, *Para que Servem Os Números Irracionais ? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT-UFF, 2013

[12] G. Ávila, *Análise Matemática para Licenciatura*, Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

[13] G. Ávila, *Introdução às Funções e à Derivada*, Editora Atual, 1997.

[14] R.B. Nelsen, *Proofs Without Words*, The Mathematical Association of America, 1993.

[15] D.G. de Figueiredo, *Números Irracionais e Transcendentes*, Coleção Iniciação Científica, SBM, 2000.

Índice